

# Trigonométrie du triangle quelconque

Karim Saïd

Ecole Technique, Année scolaire 2020-2021

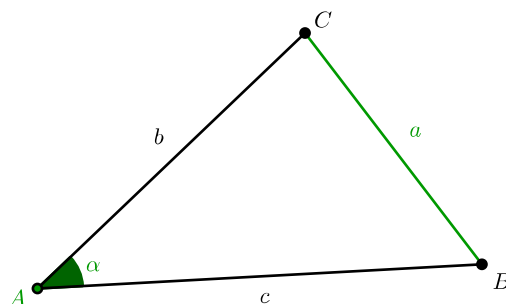
## 1 Introduction

Les résultats présentés dans un chapitre précédent se généralisent aux cas de triangles quelconques.

### 1.1 Théorème du cosinus

**Théorème (Théorème du cosinus).** *Dans un triangle quelconque, on a*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$



**Exercice 1.** Prouver le théorème du cosinus.

**Exercice 2.**

- Quel résultat exprime ce théorème quand  $\alpha = 90^\circ$  ?
- Comment s'écrit le théorème du cosinus pour les autres angles  $\beta$  et  $\gamma$  ?

**Exercice 3.** Résoudre le triangle  $ABC$  sachant que  $a = 12$ ,  $b = 7$  et  $\gamma = 28^\circ$ .

**Exercice 4.** Résoudre le triangle  $ABC$  dans chacun des cas suivants.

- $\alpha = 36^\circ$ ,  $b = 4,1$  et  $c = 6,8$  ;
- $a = 3$ ,  $b = 5$ ,  $c = 7$  ;
- $a = 4$ ,  $b = 7$ ,  $\gamma = 110^\circ$  ;
- $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $c = 5$ .

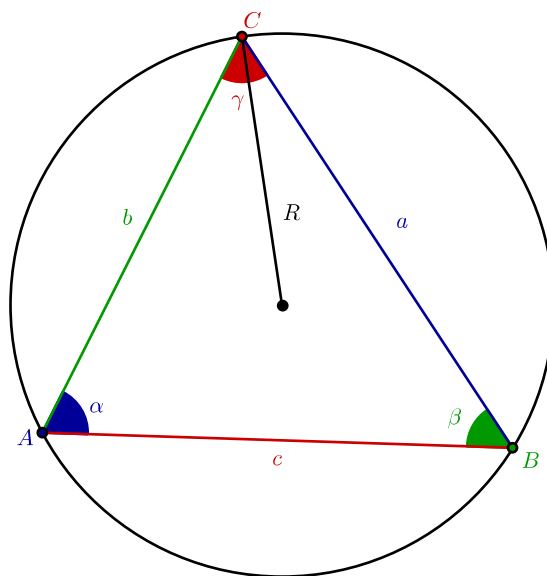
**Exercice 5.** Dans un triangle  $ABC$ , on donne  $a = 5,8$ ,  $b = 4,2$  et  $\gamma = 38^\circ$ . Calculer la longueur du segment médian issu du sommet  $A$ .

**Exercice 6.** Les deux côtés d'un parallélogramme mesurent respectivement 6,8 et 10,9. L'un des angles intérieurs mesure  $131^\circ$ . Calculer les longueurs des diagonales.

## 1.2 Théorème du sinus

**Théorème (Théorème du sinus).** Dans un triangle quelconque, le rapport entre n'importe quel côté et le sinus de l'angle opposé est égal au diamètre du cercle circonscrit. Autrement dit

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$



**Exercice 7.** Prouver le théorème du sinus.

**Exercice 8.** Résoudre le triangle  $ABC$  sachant que  $c = 10$ ,  $\alpha = 98^\circ$  et  $\gamma = 46^\circ$ .

**Attention.** L'application du théorème du sinus, pour déterminer un angle du triangle, conduit à des expressions de la forme

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \beta}{b}.$$

Il y a donc en général deux valeurs possibles pour  $\alpha$ . Par exemple, de  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ , on peut aussi bien conclure  $\alpha = 30^\circ$  que  $\alpha = 150^\circ$ . Pour savoir lequel des angles aigu ou obtus doit être éliminé, il convient de s'aider d'une esquisse ou de faire apparaître une contradiction dans la somme des angles du triangle.

**Exercice 9.** Résoudre le triangle  $ABC$  dans chacun des cas suivants.

- $\alpha = 34^\circ$ ,  $\beta = 81^\circ$  et  $c = 4,9$ ;
- $a = 3,2$ ,  $b = 5$  et  $\gamma = 48^\circ$ ;
- $a = 32$ ,  $b = 10,3$  et  $\gamma = 57^\circ$ ;
- $b = 38$ ,  $c = 24$  et  $\gamma = 103,4^\circ$ ;
- $a = 41$ ,  $c = 28,3$  et  $\alpha = 1,4v$ ;
- $\alpha = 12^\circ$ ,  $\beta = 36^\circ$  et  $\gamma = 136^\circ$ ;
- $a = 8$ ,  $b = 7$  et  $c = 14$ ;
- $a = 3$ ,  $c = 7$  et  $\beta = 41^\circ$ .

**Exercice 10.** Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle dont on donne les trois côtés  $a = 6$ ,  $b = 5$  et  $c = 10$ .

## 2 Applications

**Exercice 11.** Deux galeries horizontales d'une mine partent d'un point  $A$  vers les points  $B$  et  $C$ . On sait que  $AB = 320$  mètres et  $AC = 270$  mètres. L'angle défini par  $AB$  et  $AC$  mesure  $75^\circ$ . Quelle serait la longueur d'une galerie reliant  $B$  à  $C$  ?

**Exercice 12.** Deux points  $P$  et  $Q$  sont séparés par un étang. Pour évaluer leur distance, on prend un point auxiliaire  $S$ . Les mesures donnent  $SP = 84$  m,  $SQ = 107$  m et l'angle déterminé par  $SP$  et  $SQ$  vaut  $80^\circ$ . Calcule la distance  $PQ$ .

**Exercice 13.** Deux observateurs sont à la même altitude et distants de 1350 m. Ils pointent leurs regards au même moment sur une montgolfière située dans le plan vertical qui passe par les deux observateurs. Les mesures des angles d'élévation sont de  $65,4^\circ$  pour l'un et de  $76,5^\circ$  pour l'autre. Calculer la hauteur de la montgolfière par rapport à l'altitude des deux observateurs.

**Exercice 14.** Un observateur se trouve à l'intérieur d'une cour rectangulaire  $ABCD$  en un point  $P$  de la diagonale  $AC$ , à 32 m du point  $A$ . Le côté  $AB$  mesure 65 m et l'observateur voit le côté  $BC$  sous un angle de  $48,85^\circ$ . Calculer la longueur  $BC$ .

**Exercice 15.** Dans un triangle  $ABC$ , on donne  $a = 3,2$ ,  $b = 5,1$  et  $c = 7,5$ ; calculer

- a) la mesure de la médiane issue du sommet  $B$ ;
- b) la mesure de la bissectrice de l'angle  $\alpha$ .

**Exercice 16.** Un observateur voit un satellite sous un angle de  $35^\circ$  avec la verticale. Sachant que le satellite gravite à 1000 km au-dessus de la surface de la Terre, quelle est la distance séparant le satellite de l'observateur (rayon de la Terre : 6370 km) ?

## Solutions

**Exercice 1.**

**Exercice 2.**

**Exercice 3.**  $c \cong 6,683$ ,  $\alpha \cong 122,546^\circ$  et  $\beta \cong 29,454$ .

**Exercice 4.**

- a)  $\beta \cong 34,68^\circ$ ,  $\gamma \cong 109,32^\circ$  et  $a \cong 4,235$  ;
- b)  $\alpha \cong 21,787^\circ$ ,  $\beta \cong 38,213^\circ$  et  $\gamma = 120^\circ$  ;
- c)  $c \cong 9,174$ ,  $\alpha \cong 45,811$  et  $\beta \cong 24,189$  ;
- d)  $\alpha \cong 36,87^\circ$ ,  $\beta \cong 53,13^\circ$  et  $\gamma = 90^\circ$ .

**Exercice 5.**  $m_A \cong 2,618$

**Exercice 6.** 8,23 et 16,19.

**Exercice 7.**

**Exercice 8.**  $a \cong 13,766$ ,  $b \cong 16,847$  et  $\beta = 36^\circ$ .

**Exercice 9.**

- a)  $a \cong 3,02$ ,  $b \cong 5,34$  et  $\gamma = 65^\circ$  ;
- b)  $c \cong 3,719$ ,  $\alpha \cong 39,755^\circ$  et  $\beta \cong 92,245^\circ$  ;
- c)  $c \cong 27,768$ ,  $\alpha \cong 104,875$  et  $\beta \cong 18,125^\circ$  ;
- d) pas de solution ;
- e)  $b \cong 69,286$ ,  $\beta \cong 177,634^\circ$  et  $\gamma \cong 0,966^\circ$  ;
- f) pas de solution ;
- g)  $\alpha \cong 22,56^\circ$ ,  $\beta \cong 19,616^\circ$  et  $\gamma \cong 137,824^\circ$  ;
- h)  $b \cong 5,126$ ,  $\alpha \cong 22,567^\circ$  et  $\gamma \cong 116,433^\circ$ .

**Exercice 10.**  $r \cong 6,58$ .

**Exercice 11.**  $BC \cong 361,35$  m.

**Exercice 12.**  $PQ \cong 124,03$  m.

**Exercice 13.** 2264,998 m.

**Exercice 14.**  $BC \cong 33,24$  m.

**Exercice 15.**

- a)  $m_B \cong 5,17$  ;
- b)  $b_\alpha \cong 5,982$ .

**Exercice 16.** 1182,604 km.

**Table des matières**

**1 Introduction** **1**

    1.1 Théorème du cosinus . . . . . 1

    1.2 Théorème du sinus . . . . . 2

**2 Applications** **3**