Fonctions du premier degré

Karim Saïd

Ecole Technique, Année scolaire 2020-2021

Définition. On appelle *fonction affine* toute fonction f dont l'expression fonctionnelle est de la forme

$$\boxed{f(x) = px + h.}$$

Remarque. Dans le cas particulier où $h = 0$, on parle de *fonction linéaire*. L'expression fonctionnelle d'une telle fonction est donc de la forme

$$\boxed{f(x) = px.}$$

Exercice 1. Représenter graphiquement les fonctions ci-dessous.

a) $f_1(x) = 2x$ b) $f_2(x) = -2x$

c) $f_3(x) = \frac{1}{2}x$ d) $f_4(x) = -1$

e) $f_5(x) = x + 3$ f) $f_6(x) = 2x + 1$

g) $f_7(x) = -2x - 3$ h) $f_8(x) = 4x - 6$

1 Interprétation géométrique des paramètres d'une fonction affine

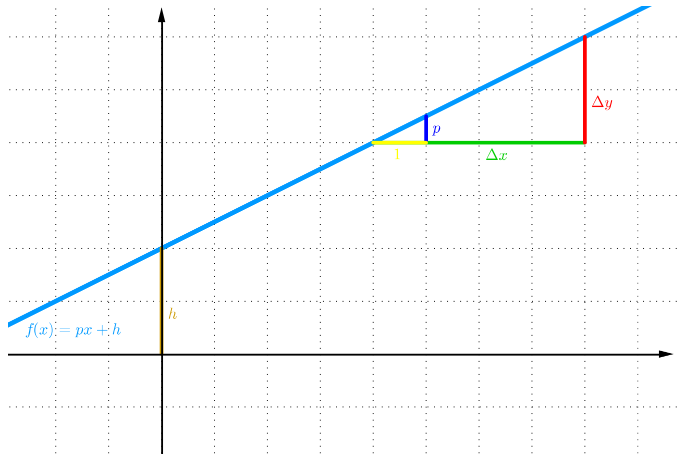
Théorème. *Soit la fonction affine f définie par $f(x) = px + h$. Les deux coefficients p et h sont des constantes ayant un sens géométrique :*

1. *p est la pente*

$$\boxed{p = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

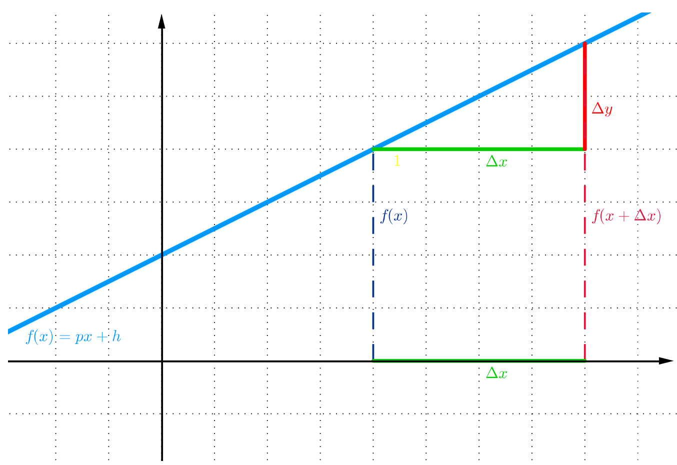
où Δx est l'accroissement selon l'axe O_x et Δy l'accroissement correspondant selon l'axe O_y.

2. *h est l'ordonnée à l'origine (c'est-à-dire l'ordonnée du point d'abscisse nulle).*



Preuve. La pente de f est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &&= \frac{p(x+\Delta x)+h-(px+h)}{2\cdot 27}\\ &= \frac{p\Delta x}{\Delta x} &&= p.\end{aligned}$$



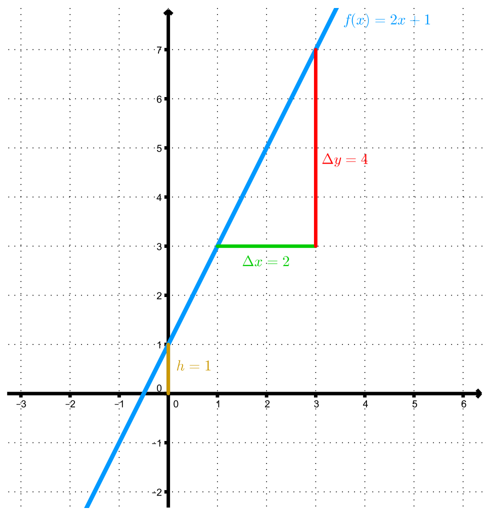
Enfin, comme $f(x) = h$, h est bien l'ordonnée à l'origine. □

Remarque. Par le théorème de Thalès, la pente est indépendante du Δx choisi.

Remarque.

La pente d'une droite peut également s'exprimer en pout-cent, comme c'est le cas des panneaux routiers. Dans le cas d'une pente de 10%, cela signifie que sur une distance horizontale de 100 m, on monte ou descend d'une hauteur de 10 m.

Exemple. Soit $f(x) = 2x + 1$.



D'après le théorème et le graphe ci-dessus, f est de pente 2 et a 1 pour ordonnée à l'origine.

on peut retrouver ces résultats en reproduisant le raisonnement effectué lors de la preuve du dernier théorème.

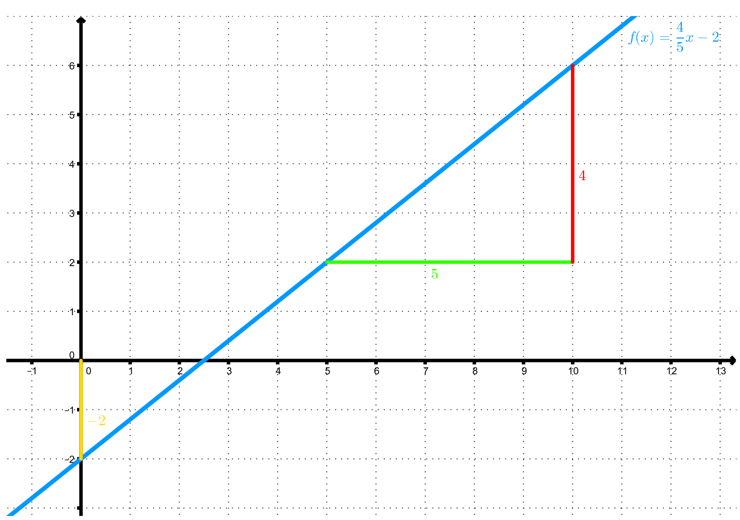
La pente de f est donc donnée par

$$p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(3)}{2} = \frac{11 - 7}{2} = 2.$$

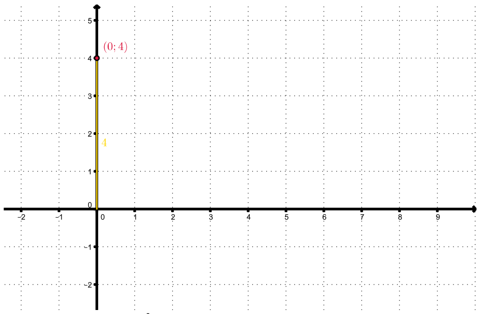
Exemple. On lit sur le graphe ci-dessous que la droite a pour pente $p = \dfrac{4}{5}$ et qu'elle passe par le point $(0; -2)$.

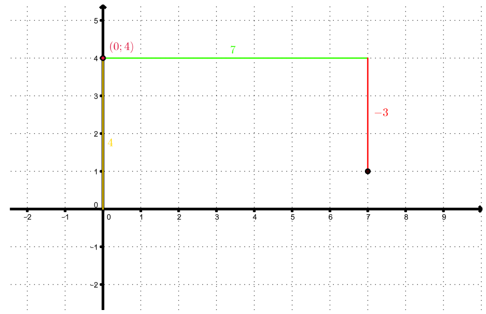
Ainsi, elle a pour équation

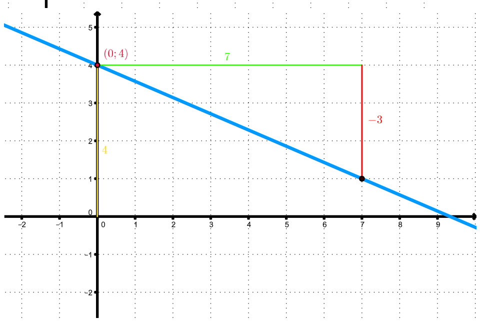
$$f(x) = \frac{4}{5}x - 2.$$



Exemple. Réciproquement, la droite $f(x) = -\dfrac{3}{7}x + 4$ a pour pente $p = -\dfrac{3}{7}$ et $h = 4$ comme ordonnée à l'origine. Il est possible de la représenter graphiquement comme suit :







Exercice 2. Déterminer la pente de chacune des droites ci-dessous, puis les représenter graphiquement.

a) $f_1(x) = x + 3$

b) $f_2(x) = 2x - 2$

c) $f_3(x) = 3x + 2$

d) $f_4(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$

e) $f_5(x) = -x + 4$

f) $f_6(x) = -2x - 3$

g) $f_7(x) = -3x - 1$

h) $f_8(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2$

Exercice 3. Déterminer l'expression fonctionnelle de la droite de pente -3 passant par le point $A(4; 7)$, avant de la représenter graphiquement.

Exercice 4. Déterminer l'expression fonctionnelle de la droite passant par les points $A(-1; -9)$ et $B(3; 11)$, avant de la représenter graphiquement.

Exercice 5. Représenter les graphes des fonctions affines f telles que :

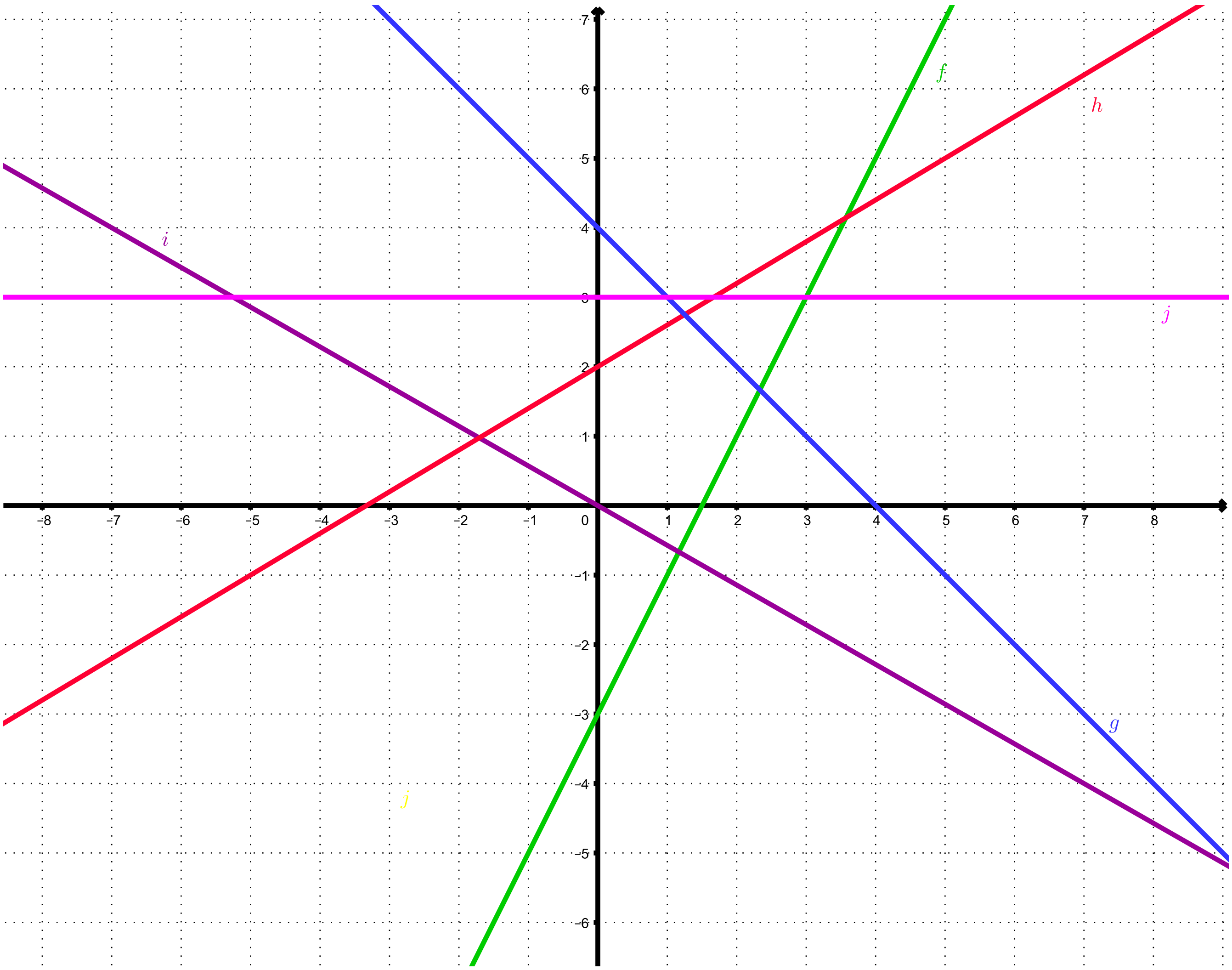
a) $f(-1) = 2$ et la pente du graphe de f vaut -2.

b) $g(0) = -1$ et la pente du graphe de g vaut $\frac{3}{2}$.

c) $h(2) = 0$ et la pente du graphe de h vaut $-\frac{3}{5}$.

d) $j(4) = 5$ et la pente du graphe de j vaut 0.

Exercice 6. Trouver l'expression fonctionnelle des 5 fonctions dont les graphes sont les droites ci-dessous.



2 Intersection de deux droites

Exemple. Une piscine propose deux variantes de tarifs. Il est possible de payer chaque entrée 5 francs ou de débourser une taxe de 15 francs et chaque entrée coûte alors 2 francs.

On se demande à partir de combien d'entrées la deuxième variante est plus rentable que la première.

Il convient de modéliser algébriquement la situation.

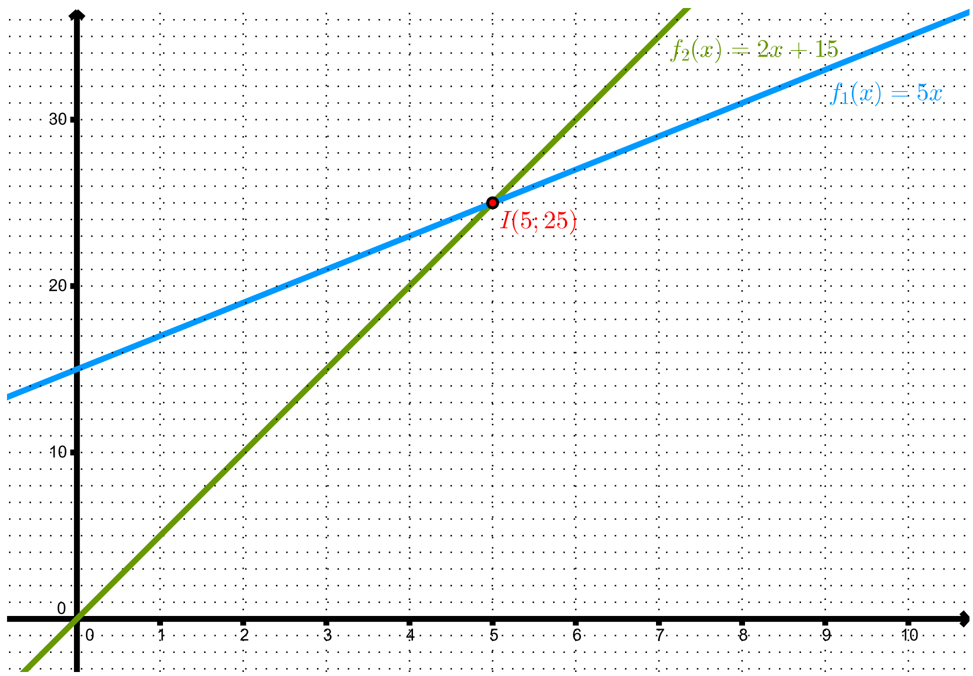
Posons x le nombre d'entrées.

les tarifs offerts par ces deux variantes peuvent être calculés en fonction de x grâce aux expressions fonctionnelles suivantes :

$$f_1(x) = 5x$$

$$f_2(x) = 2x + 15.$$

Ces deux fonctions sont représentées dans le graphe ci-dessous.



On constate que pour x "petit", il est préférable d'adopter la première variante et que la deuxième est donc moins onéreuse pour x "grand". La deuxième variante est la plus rentable à partir du moment où les deux offrent les mêmes tarifs.

Graphiquement, on observe que les deux droites s'intersectent au point $I(5; 25)$. Ainsi, la deuxième variante devient meilleure à partir de 5 entrées (strictement à partir de 6).

Algébriquement, cela signifie que $f_1(x) = f_2(x)$.

Pour retrouver la solution $x = 5$, il suffit de résoudre l'équation $f_1(x) = f_2(x)$:

$$\begin{array}{rcl|l} 5x & = & 2x + 15 & -2x \\ 3x & = & 15 & :3 \\ x & = & 5 & \end{array}$$

Exercice 7. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des fonctions f et g dans chacun des cas suivants.

a) $f(x) = -x + 5$ et $g(x) = 3x + 1$

b) $f(x) = 3x - 6$ et $g(x) = -2x + 4$

c) $f(x) = 2x - 4$ et $g(x) = -x + 5$

d) $f(x) = 5x - 2$ et $g(x) = 3x + 4$

e) $f(x) = -2x + 8$ et $g(x) = 12$

f) $f(x) = -7x$ et $g(x) = -3x$

g) $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = -2x - 3$

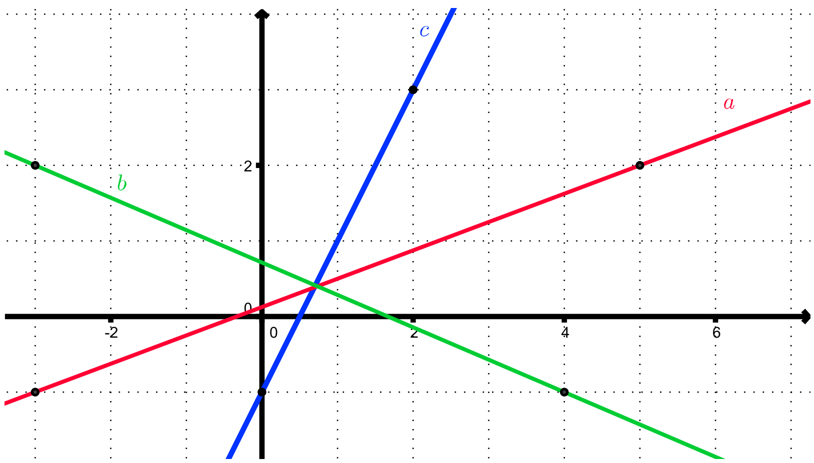
h) $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = 3x + 4$

Exercice 8. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre les droites suivantes.

a) $d_1 : y = \frac{3}{5}x - 2$ et $d_2 : y = \frac{1}{2}x + 1$

b) $d_3 : -3x + 2y = 6$ et $d_4 : 2x - 8y - 16 = 0$

Exercice 9. Les trois droites a, b et c se coupent-elles en un point ou forment-elles un triangle ?

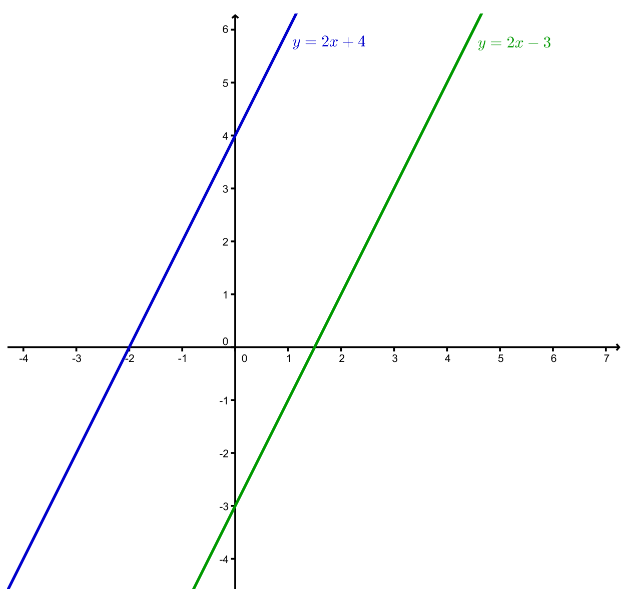


3 Droites particulières

3.1 Droites parallèles

Théorème. *Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont mêmes pentes.*

Exemple. Les droites $y = 2x - 3$ et $y = 2x + 4$ sont parallèles.



3.2 Droites perpendiculaires

Théorème. *Deux droites de pentes respectives p_1 et p_2 sont perpendiculaires si et seulement si*

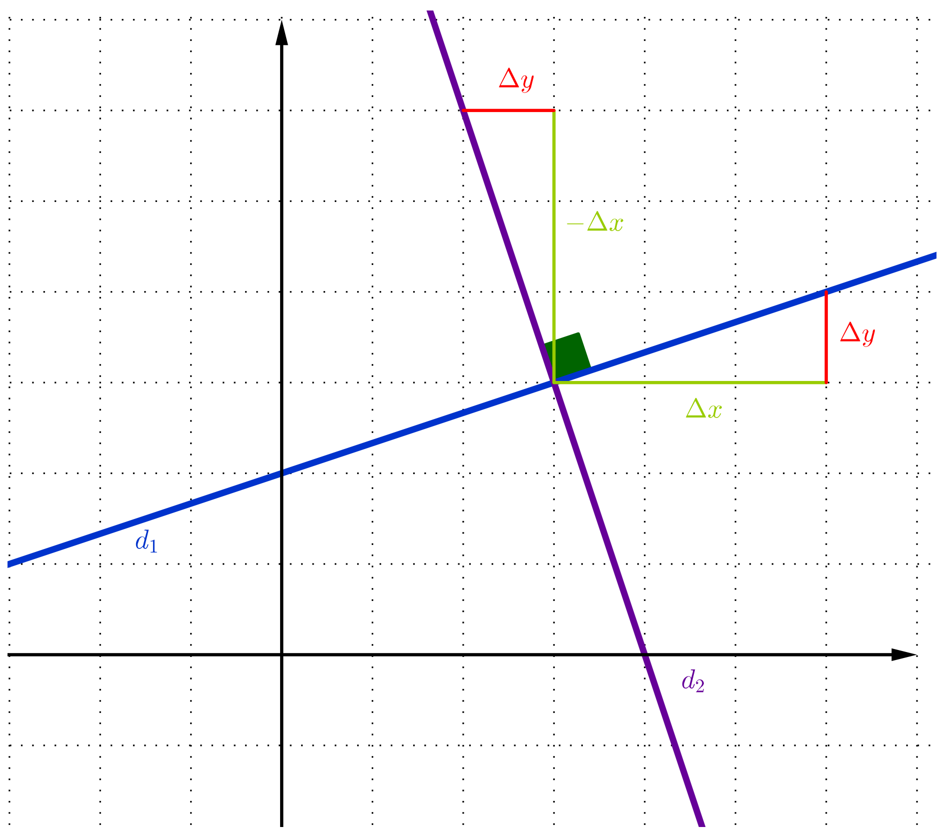
$$\boxed{p_1 \cdot p_2 = -1.}$$

Preuve. d_1 a pour pente

$$p_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Comme d_2 est perpendiculaire à d_1, on peut obtenir d_2 par rotation de d_1 de 90° (dans le sens horaire).

Ainsi, Δx devient un accroissement vertical négatif et Δy un accroissement horizontal positif.



d_2 a donc pour pente

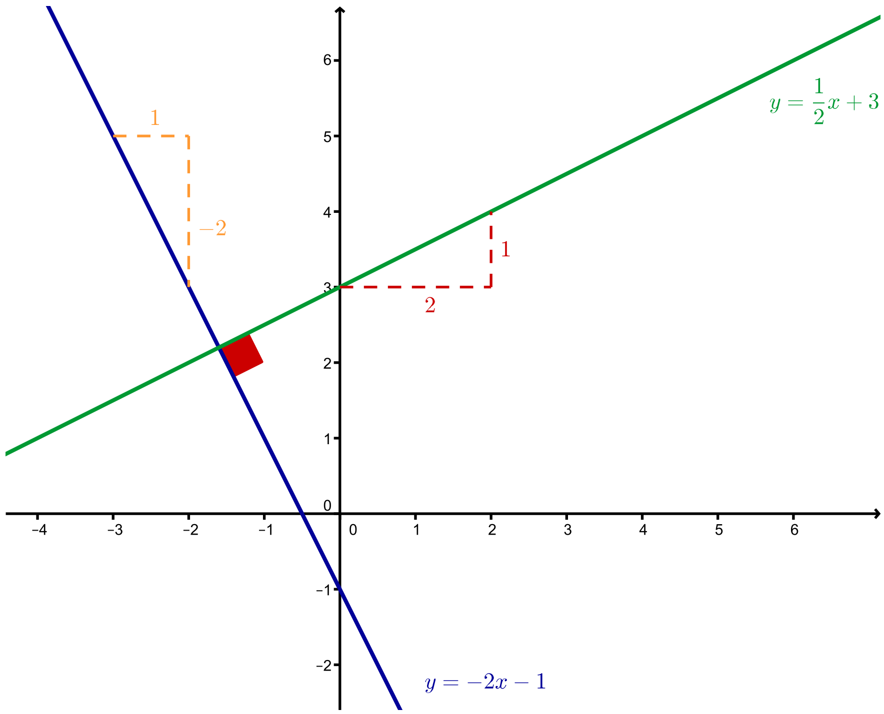
$$p_2 = \frac{-\Delta x}{\Delta y}.$$

Il s'ensuit que

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{-\Delta x}{\Delta y} = -1.$$

$\square$

Exemple. Les droites $y = -2x - 1$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$ sont perpendiculaires.



3.3 Droites horizontales

Une droite horizontale est aussi appelée *fonction constante*. Elle est définie par $f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$. Son graphe est une droite parallèle à l'axe O_x passant par le point $(0; a)$.

Exemple.

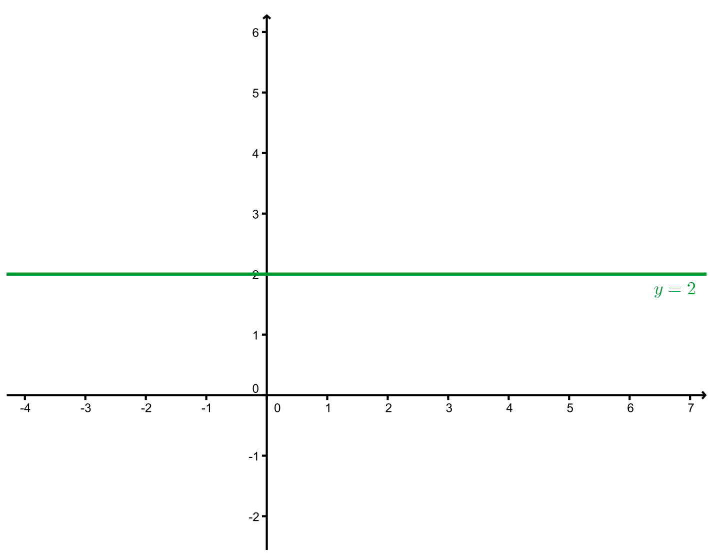


FIGURE 1 – Graphe de $y = 2$.

3.4 Droites verticales

Une droite verticale est définie par $x = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exemple.

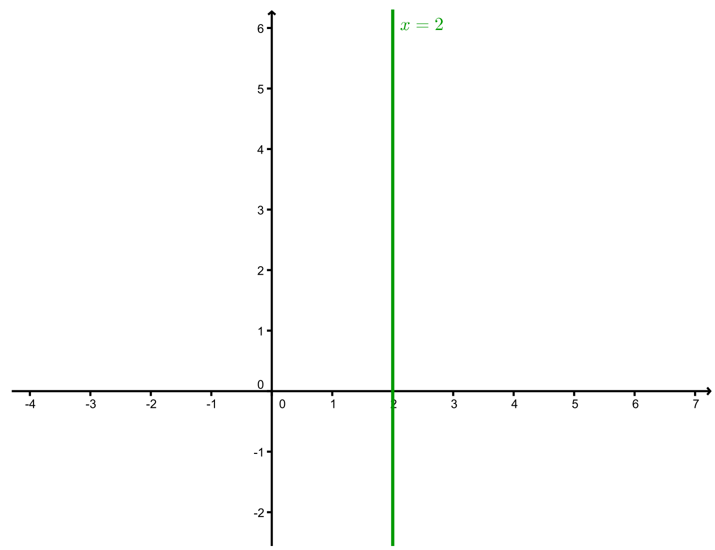


FIGURE 2 – Graphe de $x = 2$.

Exercice 10. Déterminer l'équation de la droite

a) parallèle à $y = -3x + 2$ passant par l'origine.

b) parallèle à $y = \dfrac{3x+5}{2}$ passant par le point $A(6; 1)$.

c) perpendiculaire à $y = -3x + 2$ passant par l'origine.

d) perpendiculaire à $y = 2x$ passant par le point $B(4; 2)$.

Exercice 11. Trouver l'équation de la droite passant par le point $P(3; -5)$ et parallèle à la droite d'équation $2x + 2y = 4$

Exercice 12. Trouver l'équation de la droite passant par le point $A(3; 1)$ et parallèle à la droite $2x + 3y = 15$

Exercice 13. Trouver l'équation de la droite passant par le point $P(3; -5)$ et perpendiculaire à la droite $3x + 2y = 6$

4 Applications

Exercice 14. La Société Speedza livre des pizzas à domicile. À ses vendeurs, elle offre à choix deux modèles de rémunération :

Modèle 1 : Salaire mensuel 4500 francs plus 5% de commission sur les ventes.

Modèle 2 : Salaire mensuel 4000 francs plus 10% de commission sur les ventes.

Vous êtes un nouvel employé. Quel mode de rémunération choisissez-vous ?

Exercice 15. Un travail écrit comporte 20 points. La note 1 correspond à 0 point et la note 6 à 20 points. Déterminer la fonction permettant de calculer la note N en fonction du nombre de points x.

Exercice 16. Une ville a installé des usines pour alimenter ses citoyens en eau potable. Elle finance les coûts d'exploitation en facturant une redevance fixe et l'eau consommée. Un des voisins de Jean a reçu son décompte et pour une consommation de 60'000 litres il paie 88 francs ; un autre voisin paie 100 francs pour une consommation de 75'000 litres. Jean n'a pas reçu son décompte, mais il sait qu'il a consommé 82'000 litres d'eau.

a) Quel montant doit-il prévoir ?

b) Déterminer également le montant de la taxe fixe.

Exercice 17. On obtient la température en degrés Celsius par rapport à une valeur en Fahrenheit par la fonction f définie par

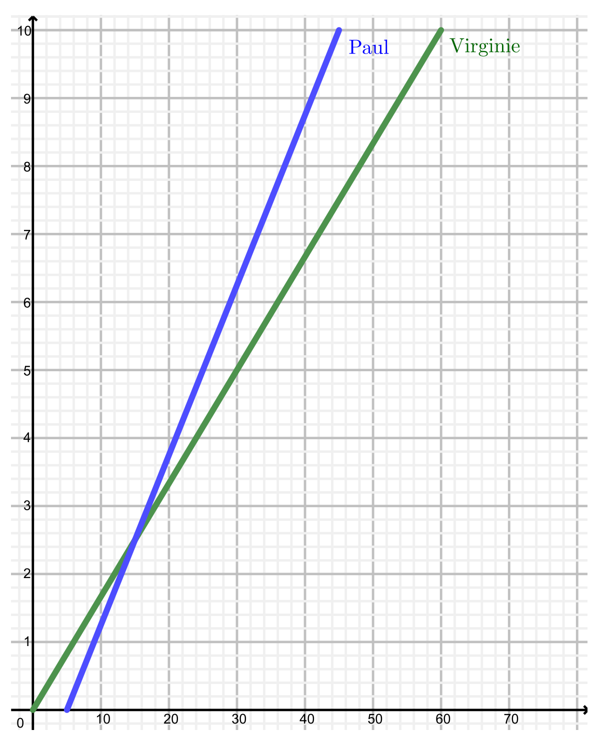
$$f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}.$$

a) A quelle température exprimée en degrés Celsius correspond une température de 36 Fahrenheit ?

b) A quelle température lit-on la même valeur sur les deux échelles ?

c) Pour quelle température la valeur en Fahrenheit est-elle le double qu'en Celsius ?

Exercice 18. Paul et Virginie sont inscrits aux 10 km de Lausanne. Virginie part 5 minutes avant Paul, comme le montre le graphe figurant ci-dessous.



a) Qui est arrivé en premier ? Avec combien de minutes d'avance ?

b) Quelle distance les sépare lorsque Paul franchit la ligne d'arrivée ?

c) Quelles ont été leurs vitesses respectives ?

Exercice 19. Un cinéma propose deux abonnements à ces clients. L'abonnement A propose de voir un film à 7 Frs 50 et l'abonnement B propose de payer une base de 20 Frs., puis 4 Frs 50 par film. Quel est la formule la plus avantageuse si on veut regarder 5, 10 ou 15 films ?

Exercice 20. Dans un magasin, les cartouches d'encre pour imprimante sont vendues 15 francs la pièce. Sur internet, elles sont vendues 10 francs la pièce, mais on paie 40 francs de frais de livraison quel que soit le nombre de cartouches achetées.

a) Représenter dans un même repère les 2 fonctions déterminant le prix à payer pour x cartouches.
On prendra 1 unité pour 1 cartouche achetée sur l'axe des x et 1 unité pour 10 Frs. sur l'axe des y ;

b) Par lecture sur le graphique
   a) Déterminer le prix le plus avantageux pour l'achat de six cartouches ;
   b) Quelle formule est la plus avantageuse si l'on dispose de 80 Frs. ?
   c) A partir de combien de cartouches le prix sur internet est-il inférieur au prix en magasin ?

Exercice 21. Un vidéoclub propose à ses clients les 3 formules suivantes :

— **Formule 1 :** 20 Frs. d'abonnement annuel plus 1 Fr. par DVD loué.
— **Formule 2 :** 2 Frs. par DVD loué et aucun frais d'abonnement.
— **Formule 3 :** 70 Frs. à l'année quel que soit le nombre de DVD loué.

a) représenter graphiquement une fonction déterminant le prix à payer pour x DVD, pour chacune des trois formules proposées, dans un même système d'axes.
On prendra 1 unité pour 5 DVD loués sur l'axe des x et 1 unité pour 10 Frs sur l'axe des y ;

b) lire sur le graphique la formule la plus intéressante en fonction du nombre de DVD loué.

Exercice 22. On a effectué les mêmes trajets avec deux taxis différents. Avec le premier, on a payé 8,50 francs pour un trajet de 2,5 km et 15,70 francs pour un trajet de 5,5 km. Avec le second taxi, pour les mêmes distances, on a payé respectivement 8,25 francs et 16,35 francs. Pour chaque taxi, trouver la fonction donnant le prix de la course en fonction de la longueur du trajet. Représenter graphiquement les fonctions trouvées. Pour quel trajet, le prix de la course est-il le même avec les deux taxis.

Exercice 23. Pour un travail écrit comptant 12 points, la note 1 correspond à 0 points et la note 6 à 12 points.

a) Déterminer l'expression fonctionnelle de la fonction affine f qui donne la note en fonction du nombre de points obtenus.

b) — le maître A décide de donner la note 6 à partir de 10 points (0 point donne la note 1 et 10 points et plus la note 6).
   — le maître B décide de commencer de noter à 2 (0 point donne la note 2 et 12 points la note 6).

   Pour pour quels résultats est-on avantagé par le maître A plutôt que par le maître B ?

Exercice 24. Un réparateur informatique demande pour le déplacement un montant forfaitaire de 30 francs. Quel est son tarif de l'heure sachant que l'on a payé 390 francs une réparation nécessitant 4 heures et demi d'intervention ?

Exercice 25. Une voiture s'engage sur une route avec le réservoir plein et roule à vitesse constante. Après 200 km de route, il reste 40 litres d'essence et après 450 km, il reste 15 litres. Déterminer

a) La fonction qui détermine le nombre de litres restants dans le réservoir en fonction des kilomètres parcourus.

b) La capacité du réservoir.

c) La consommation au 100 km.

d) La distance maximale que l'on peut parcourir avec un plein.

Exercice 26. Voici les prix d'une compagnie d'électricité

	Prix par kilowatt	Taxe mensuelle
De 1 à ...		0 CHF
Plus que ...		36,90 CHF

a) En utilisant le graphique ci-dessous et sachant que $A(1600; 100)$, $B(5000; 286.9)$ et $C(7000; 386.9)$, déterminer le prix du kilowatt pour chaque situation

b) A partir de combien de kilowatt paie-t-on une taxe mensuelle ?

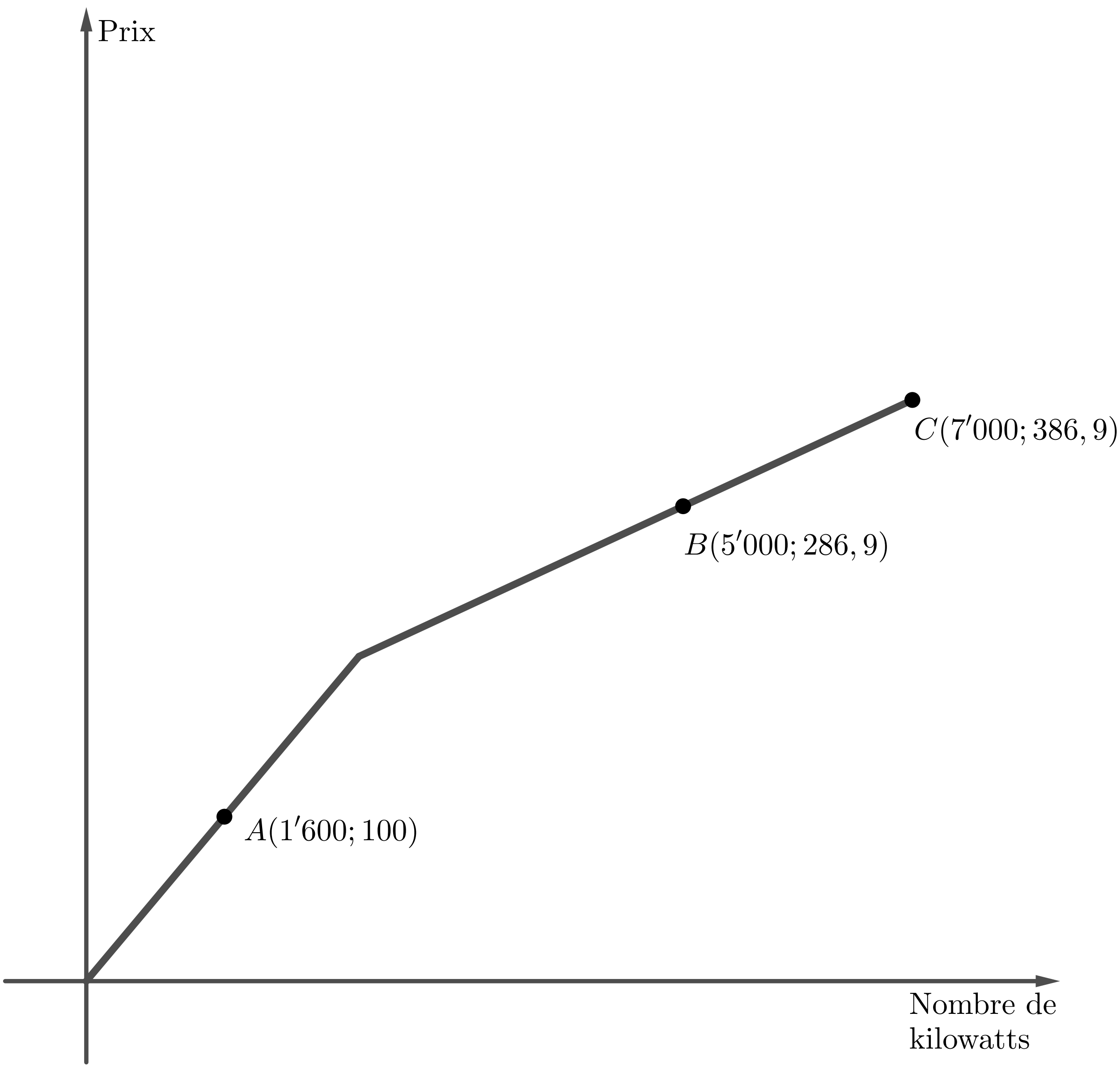
Exercice 27. En Suisse, l'espérance de vie à la naissance des femmes peut être modélisée par la formule

$$e_0 = 0,4a - 717$$

où a représente l'année d'observation et e_0 l'espérance de vie à l'année a.

a) Quelle était l'espérance de vie d'une femme en 1990 ?

b) En quelle année l'espérance de vie des femmes était-elle de 65 ans ?



Exercice 28. Deux agences de location de voitures ont des tarifs différents. Dans la première agence, on facture 300 francs de frais fixes puis 60 centimes par kilomètre parcouru. On constate que :

— pour un parcours de 250 km, le prix demandé est identique dans les deux agences ;

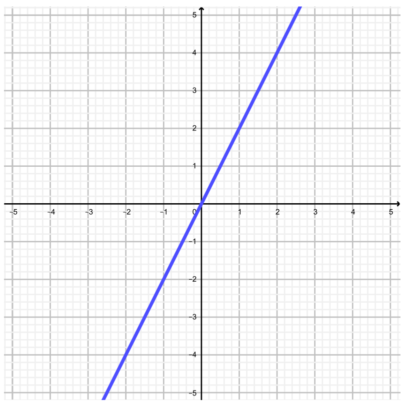
— pour un parcours de 750 km, le prix demandé dans la deuxième agence est supérieur de 100 francs à celui de la première agence.

Déterminer les frais fixes et le prix au kilomètre de la deuxième agence.

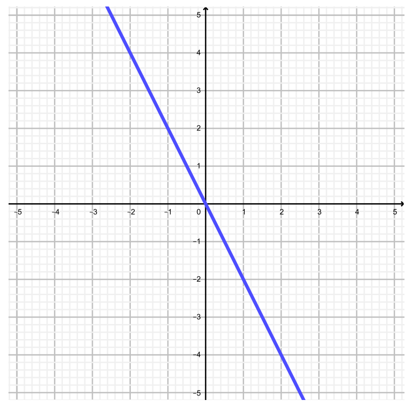
Solutions

Exercice 1.

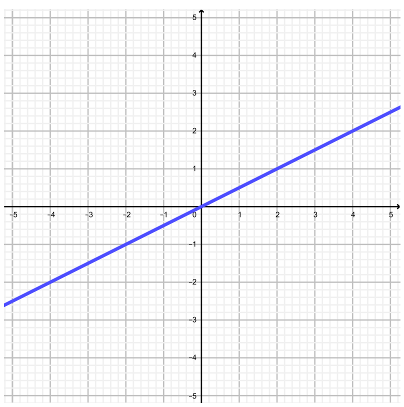
a)



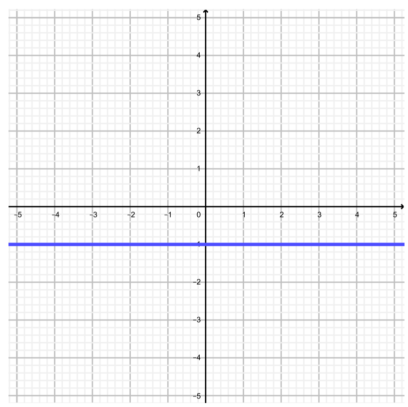
b)



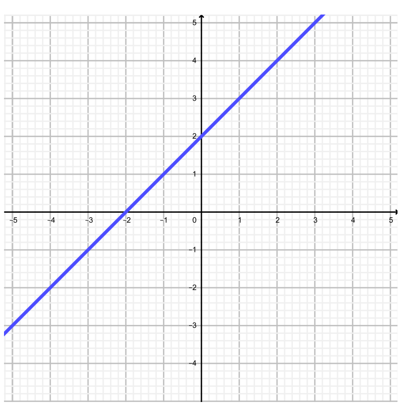
c)



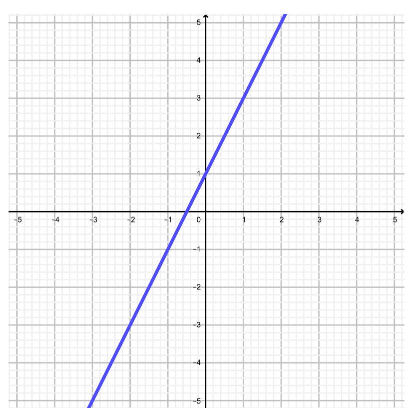
d)



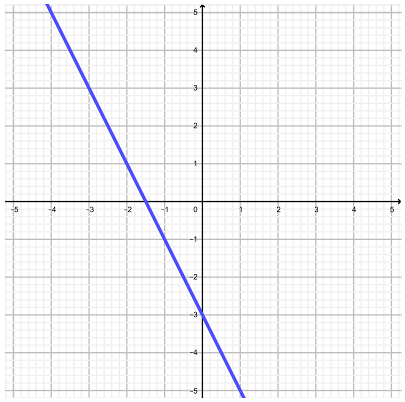
e)



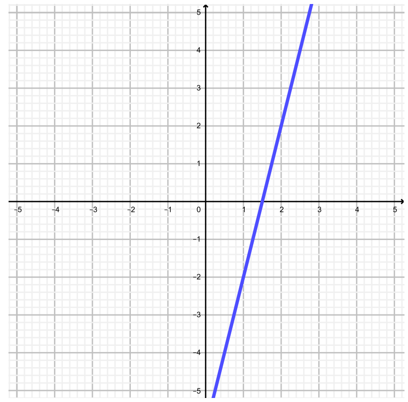
f)



g)

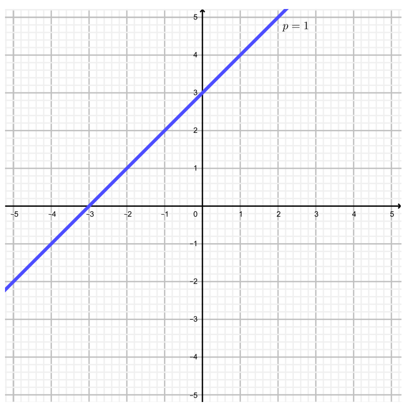


h)

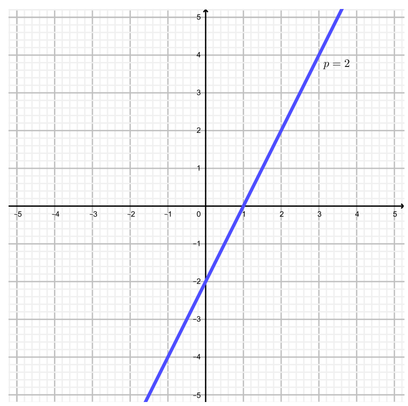


Exercice 2.

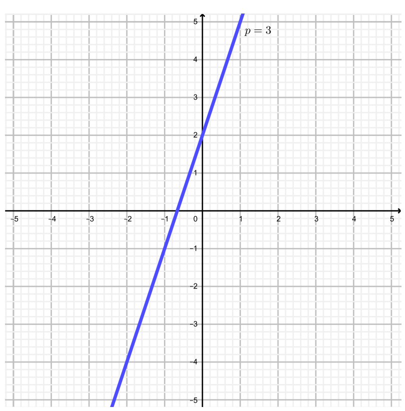
a)



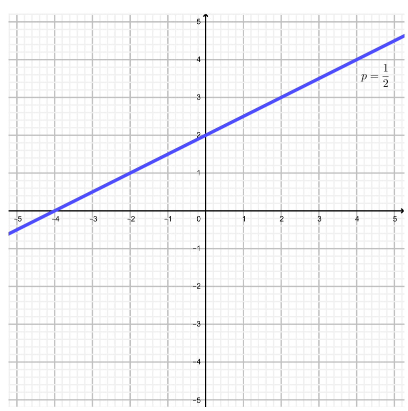
b)



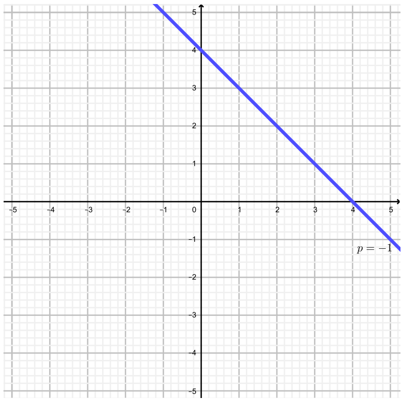
c)



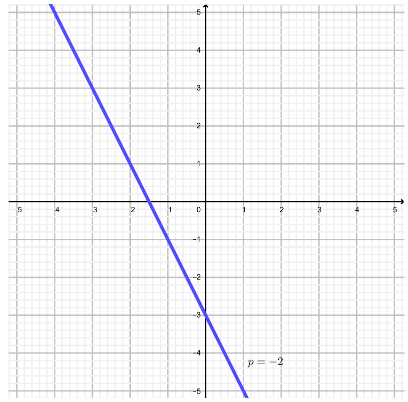
d)



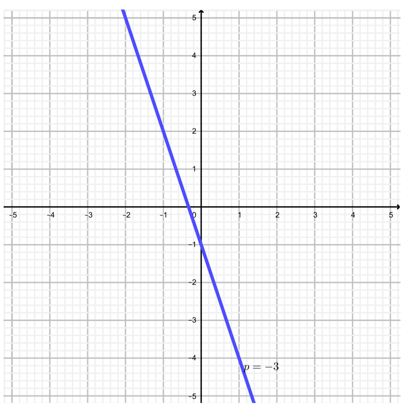
e)



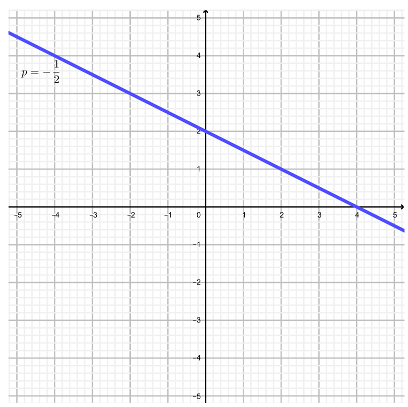
f)



g)



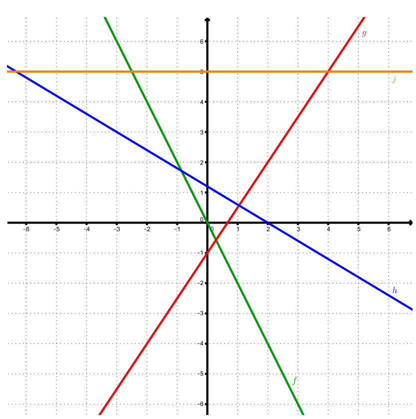
h)



Exercice 3. $y = -3x + 19$.

Exercice 4. $y = 5x - 4$.

Exercice 5.



Exercice 6.

- $f(x) = 2x - 3$.
- $g(x) = -x + 4$.
- $h(x) = \dfrac{3}{5}x + 2$.
- $i(x) = -\dfrac{4}{7}x$.
- $j(x) = 3$.

Exercice 7.

a) $I(1;4)$
b) $I(2;0)$
c) $I(3;2)$
d) $I(3;13)$
e) $I(-4;12)$
f) $I(0;0)$
g) Pas d'intersection
h) Infinité d'intersections

Exercice 8.

a) $I(30;16)$.
b) $I(-4;-3)$.

Exercice 9. Elles forment un triangle.

Exercice 10.

a) $y = -3x$.
b) $y = \frac{3}{2}x - 8$.
c) $y = \frac{1}{3}x$.
d) $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Exercice 11. $y = -x - 2$.

Exercice 12. $y = -\dfrac{2}{3}x + 3$.

Exercice 13. $y = \dfrac{2}{3}x - 7$.

Exercice 14. Le modèle 1 jusqu'à 10'000 francs et le modèle 2 sinon.

Exercice 15. $N = \dfrac{1}{4}x + 1$.

Exercice 16.

a) $105,60$ francs.
b) 40 francs.

Exercice 17.

a) $2,\overline{2}$°C.
b) -40°C $= -40$ F.
c) 320 F.

Exercice 18.

a) Paul avec 15 minutes d'avance.

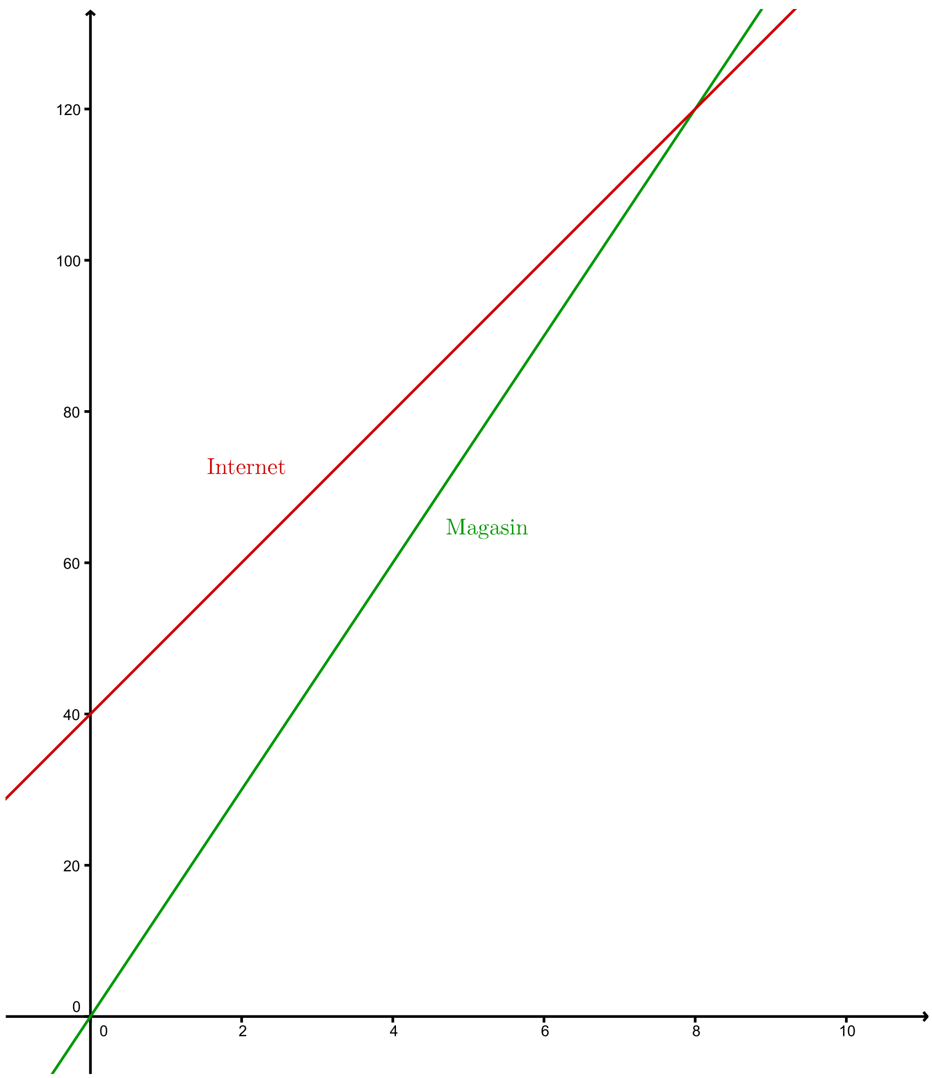
b) 3 km.

c) Paul : $15\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Virginie : $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Exercice 19. Pour 5 films : abonnement A ; pour 10 et 15 films : abonnement B.

Exercice 20.

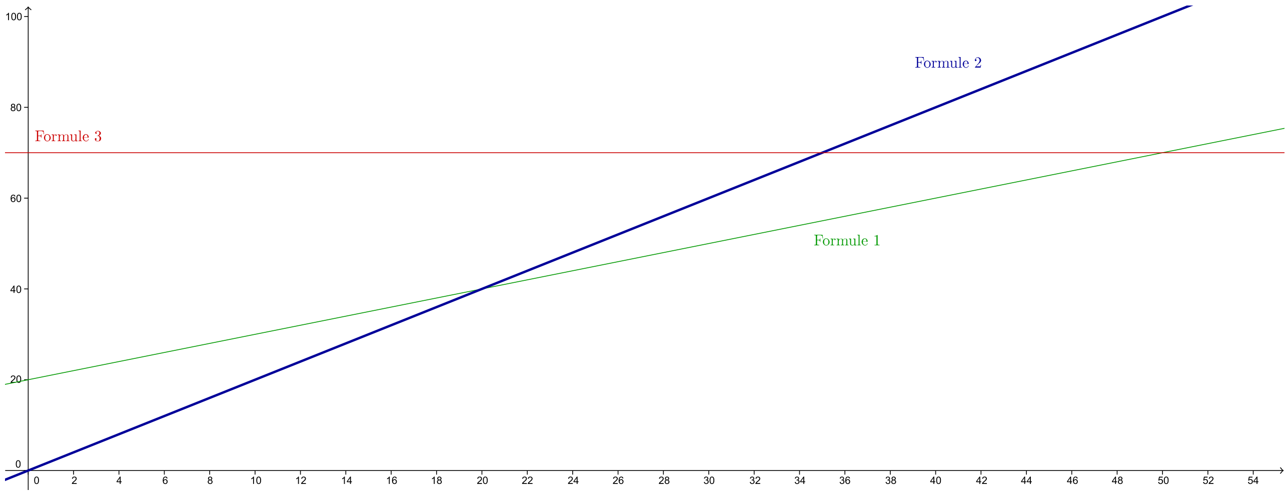
a)



b)
   a) Magasin.
   b) Magasin.
   c) A partir de 8 cartouches.

Exercice 21.

a)



b) — entre 0 et 20 DVD loués : Formule 2.
— entre 20 et 50 DVD loués : Formule 1.
— à partir de 50 DVD loués : Formule 3 ;

Exercice 22. $y = 2,4x + 2,5$, $y = 2,7x + 1,5$. Le prix est le même pour un trajet de $x = 3,33$ km.

Exercice 23.

a) $f(x) = \dfrac{5x}{12} + 1$.

b) Par le maître A à partir de 6 points.

Exercice 24. 80 francs de l'heure.

Exercice 25.

a) $f(x) = -0,1x + 60$.

b) 60 litres.

c) 10 litres pour 100 km.

d) 600 km.

Exercice 26.

a) $0,0625$ francs et $0,05$ francs.

b) $y = 0,0625x$, $y = 0,05x + 36,9$. Intersection à $x = 2952$ kilowatts.

Exercice 27.

a) 79 ans.

b) En 1955.

Exercice 28. Frais fixes : 250 francs et prix au kilomètre : 80 centimes.

Table des matières