Fonctions

Karim Saïd

Ecole Technique, Année scolaire 2020-2021

1 Introduction

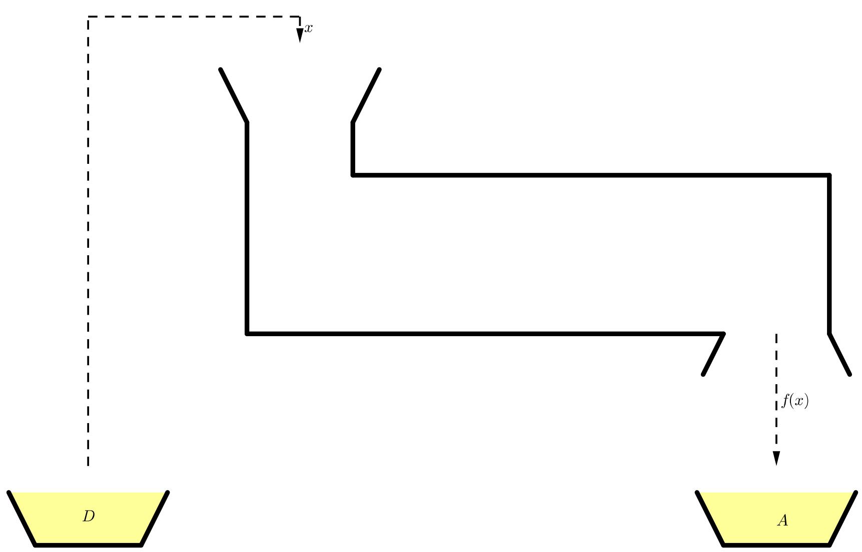
Le terme de *fonction* s'utilise dans le langage courant. Par exemple, le prix d'un billet de train dépend de la longueur du trajet. On dit que le prix est *fonction* de cette longueur. L'aire d'un disque dépend de son rayon ; son aire est donc *fonction* de son rayon.

2 Notion de fonction

Définition. On appelle *application* d'un ensemble D dit de départ, dans un ensemble A dit d'arrivée toute correspondance, souvent notée f, assignant à chaque $x \in D$ un unique élément de A, noté $f(x)$ ou y.

Une fonction se note souvent sous la forme

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} D & \to & A \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} .$$



1. Une application d'une partie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est appelée *fonction*.
2. L'élément $y = f(x)$ est appelé *image* de x par f.
3. Une formule permettant de calculer les images est appelée *expression fonctionnelle* de f.

Exemple. Avec 1 franc suisse, on obtient $0,87$ euros. Le nombre d'euros que l'on obtiendra dépendra du nombre de francs que l'on changera. On dit alors que le nombre d'euros est fonction du nombre de francs suisses.

Il est possible de représenter cette fonction de différentes manières :

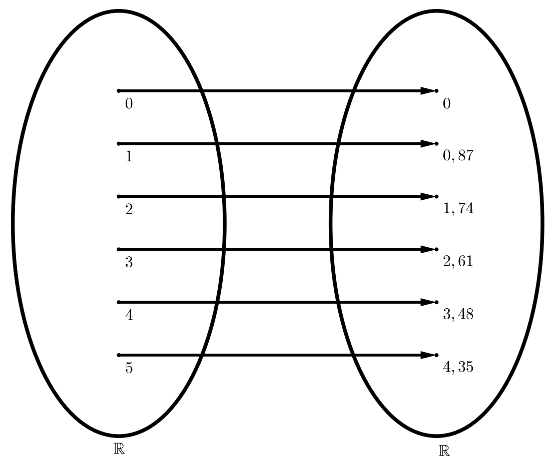
Tableau de valeurs

Le désavantage d'un tableau de valeurs est le fait qu'il ne permet pas de savoir quelles sont les valeurs de f en dehors de celles qui y figurent.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	$0,87$	$1,74$	$2,61$	$3,48$	$4,35$

Diagramme sagital

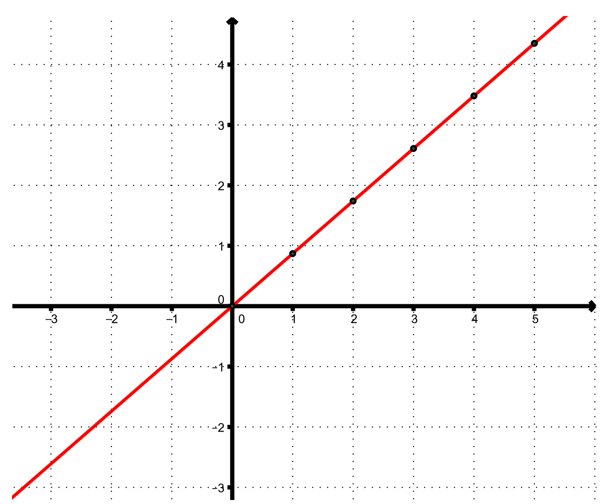
L'inconvénient du diagramme sagital est le même que celui d'un tableau de valeurs. Il présente cependant l'avantage de mettre en avant les ensembles de départ et d'arrivée et est plus cohérant qu'un tableau de valeurs lorsque les ensembles de départs et d'arrivée ne sont pas numériques.



Graphe

Pour dessiner un graphe, il suffit de choisir une valeur de x, prise dans l'ensemble de départ et de calculer son image $f(x)$. x sera la première coordonnée (*l'abscisse*) du point et $y = f(x)$ sera la deuxième (*l'ordonnée*). Autrement dut, le point sur la verticale correspondant à x sera à hauteur $y = f(x)$. Après avoit calculé les coordonnées de plusieurs points, il suffit de relier les points à la main.

Très pratique et relativement précise, la repréentation graphique d'une fonction reste néanmoins restreinte à une région. Ici, par exemple, le graphe ne montre pas comment la fonction se comporte explicitement pour $x < -3$ et pour $x > 5$.



Forme verbale

"A un certain nombre, on fait correspondre son produit par $0,87$".

En fonction de la complexité de la correspondance, il peut être fastidieux de comprendre la phrase la décrivant.

Expression fonctionnelle

L'expression fonctionnelle de f s'écrit

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 0,87x \end{array}$$

ou

$$f(x) = 0,87x$$

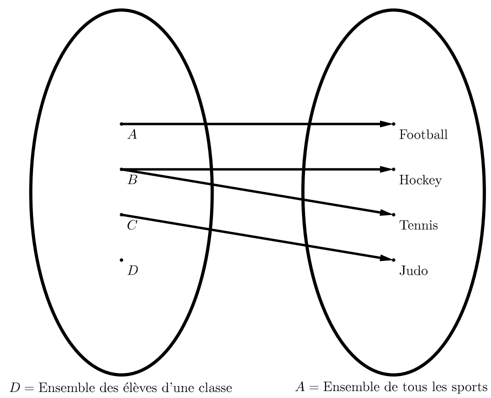
ou

$$y = 0,87x.$$

L'expression fonctionnelle est la meilleure manière de décrire une fonction, car en la connaissant, on peut construire un tableau de valeurs, un diagramme sagital et un graphe, alors que le contraire n'est pas toujours possible.

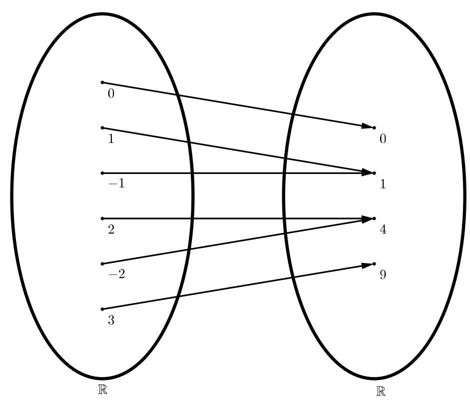
Exemple.

Si D = Ensemble des élèves d'une classe et A = Ensemble des sports, la correspondance ci-contre, qui associe à chaque élève le ou les éventuels sports qu'il apprécie n'est pas une application, car deux sports sont associés à B et aucun à D.



Exemple.

La correspondance ci-contre, qui à chaque nombre réel x associe son carré est une fonction, car à tout nombre réel admet un et un seul carré.



Exemple. La correspondance f définie par

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

n'est pas une fonction, car $x = 0$ n'admet pas d'image ; $\dfrac{1}{0}$ étant indéfini.

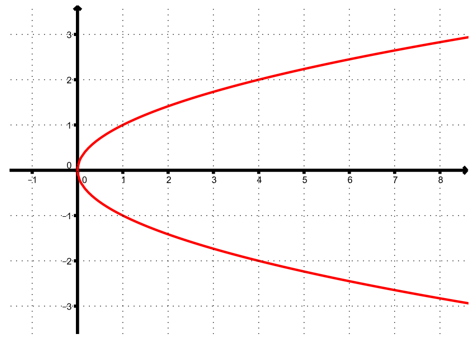
En revanche,

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

est une fonction, car tout x non nul admet un et un seul inverse.

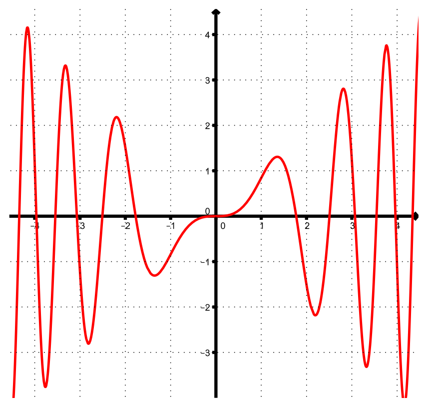
Exemple.

La courbe ci-contre ne représente pas une fonction, car deux images sont assocées à $x = 2$ (entres autres).



Exemple.

La courbe ci-contre est une fonction, car chaque $x \in D = \mathbb{R}$ admet une et une seule image.



Exercice 1. Soit la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2+5 \end{array}.$$

a) Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de f ?

b) Quelle est l'expression fonctionnelle de f ?

c) Quelle est l'image de 3 par f ?

d) Quelle est l'image de -2 par f ?

Exercice 2. Voici un tableau de valeurs correspondant à une fonction f :

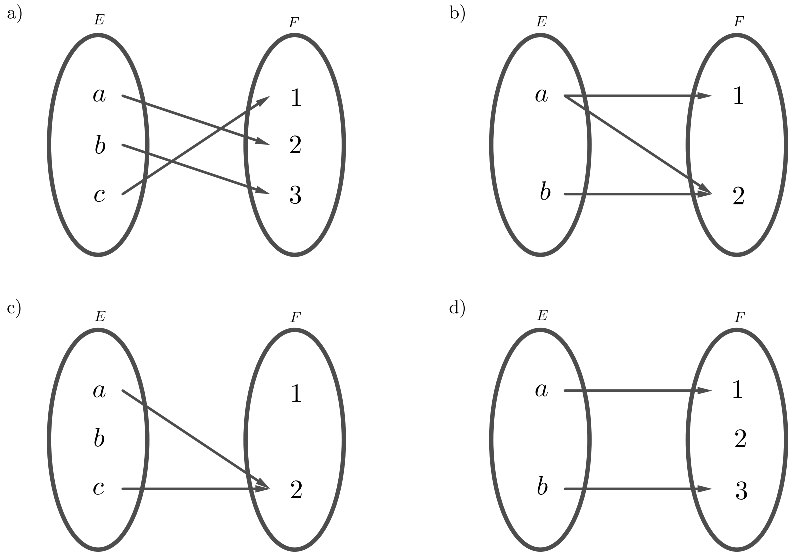
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	2	1	-3	-4	5	3	4	-4

a) Quelle est l'image de 3 par la fonction f ?

b) Quel nombre a pour image -3 par la fonction f ?

c) Quels nombres ont la même image par la fonction f ?

Exercice 3. Parmi les diagrammes suivants, lesquels correspondent à des fonctions de E dans F ?



Exercice 4. Déterminer si les correspondances ci-dessous sont des fonctions. Justifier les réponses.

$$a : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 3x-2 \end{array}$$

$$b : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 5x-7 \end{array}$$

$$c : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-3} \end{array}$$

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rl} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. \end{array}.$$

$$e : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 5x^2-5 \end{array}.$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}.$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array}.$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0 \end{array} \right. \end{array}.$$

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2-1} \end{array}$$

$$j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$$

Exercice 5. Représenter graphiquement les fonctions f ci-dessous.

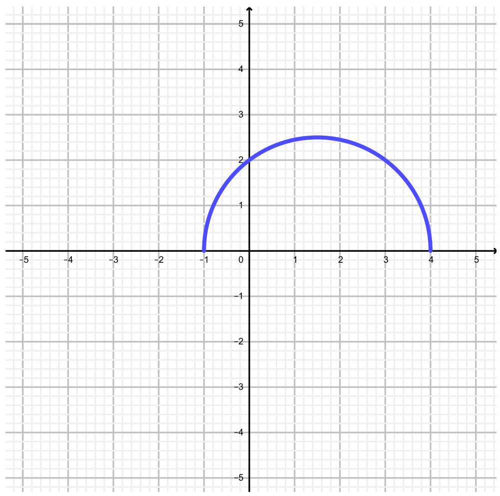
a) $f(x) = x$ b) $f(x) = -x$

c) $f(x) = |x| - 1$ d) $f(x) = -3$

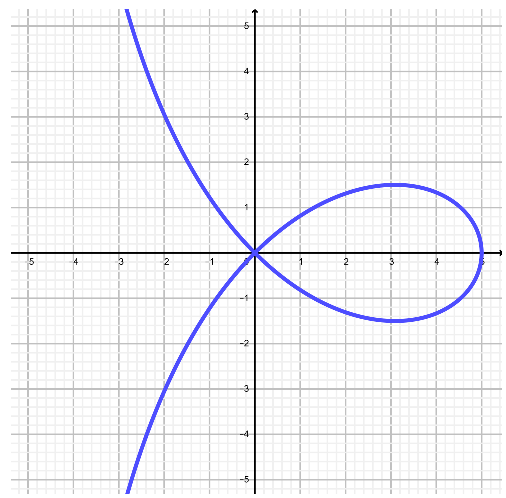
e) $f(x) = x^3$ f) $f(x) = x^4$

Exercice 6. Déterminer si les graphiques suivants représentent des fonctions ou non.

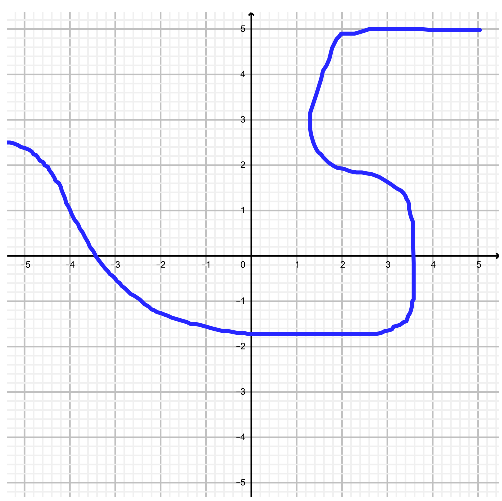
a)



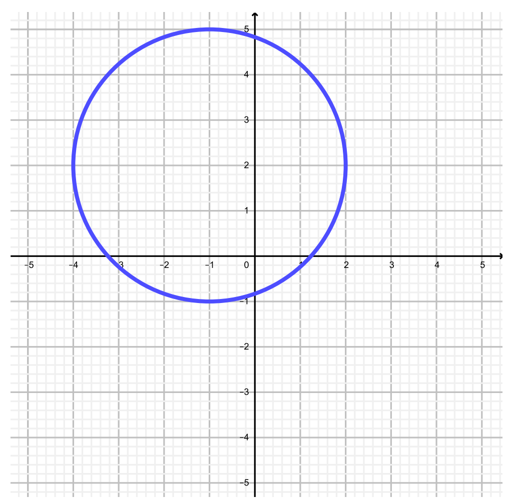
b)



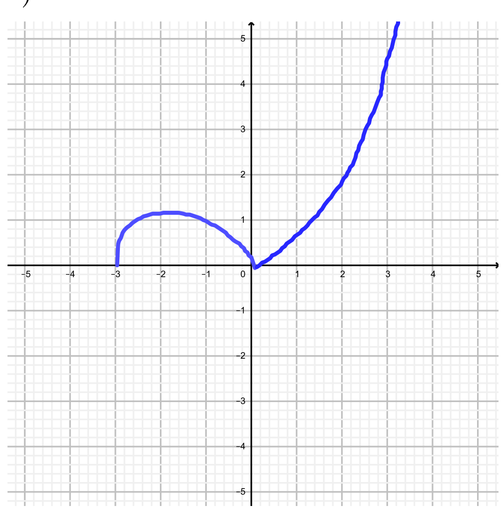
c)



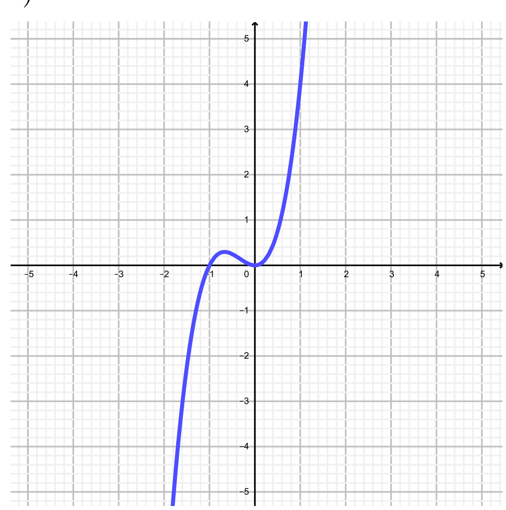
d)



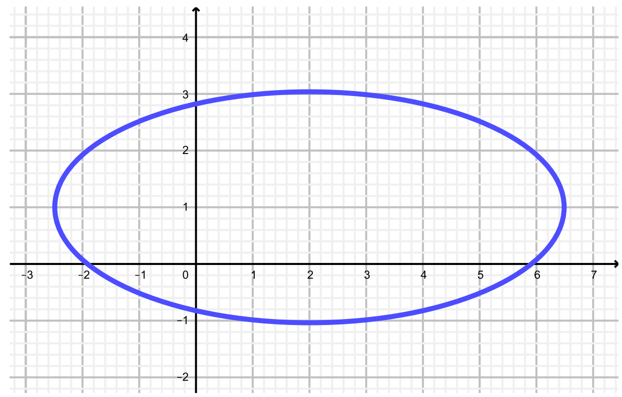
e)



f)



Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, expliquer pourquoi on ne peut pas trouver une fonction qui, à x envoie y.



x	-2	1	0	2	-1	1
y	-4	3	-3	5	2	4

Exercice 8. Compléter les tableaux suivants représentant des fonctions.

a)

3	1	10			x
-9	-3	-30	48	-66	

b)

-10	0	1	5	10	x
95	-5	-4			

c)

4		15	11		x
$1,\overline{3}$	6	5	$3,\overline{6}$	$-1,\overline{6}$	

d)

100	200	300		60	x
20	30	40	55		

e)

9	36		100		x
$1,5$	3	4	5	$4,5$	

f)

	4	1	5	6	x
8	64	1	125		

g)

-1	0	6	$\frac{3}{2}$		x
-5	-3		0	13	

h)

-20	20	0	-25	25	x
15	25	5	20	30	

Exercice 9. Soit la fonction f définie par

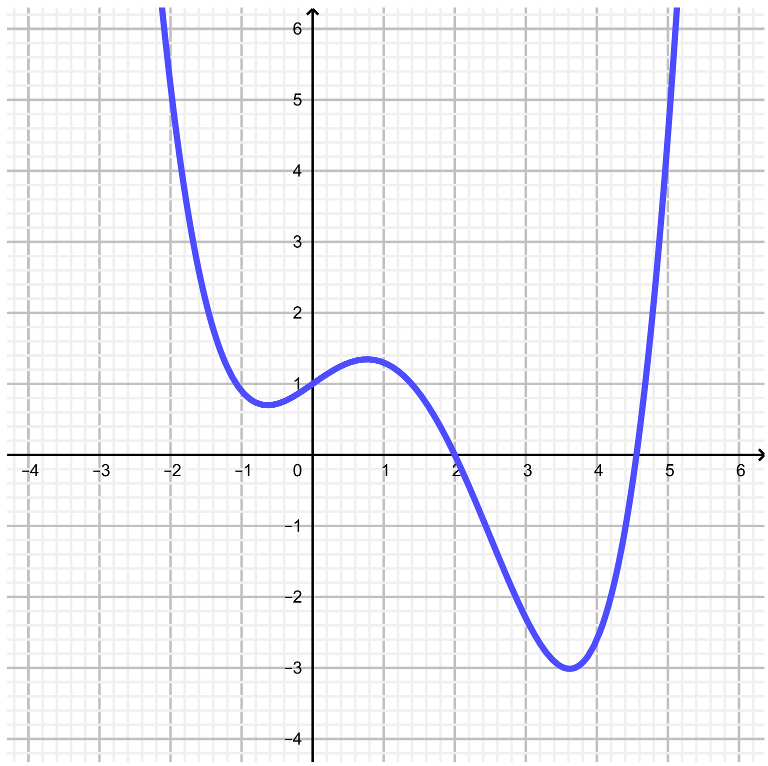
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}.$$

Calculer

a) $f(-3)$ b) $f(0)$

c) $f(1)$ d) $f(2)$

Exercice 10. La figure ci-dessous représente le graphe d'une fonction f.



En observant le graphe, estimer

a) La valeur de $f(0)$.

b) La valeur de $f(-2)$.

c) Les valeurs de x sachant que $f(x) = 0$.

d) Les valeurs de x sachant que $f(x) = 1$.

e) La valeur de a sachant que l'équation $f(x) = a$ ne possède qu'une seule solution ? Quelle est cette solution ?

f) Les valeurs de x sachant que $f(x) = x$.

Exercice 11. Soit la fonction f définie par $f(x) = 4 - x^2$. Calculer

a) $f(0)$ b) $f(\sqrt{2})$

c) $f(\sqrt{2} - 2)$ d) $f(-x)$

e) $3f(x)$ f) $f(3x)$

Exercice 12. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Déterminer

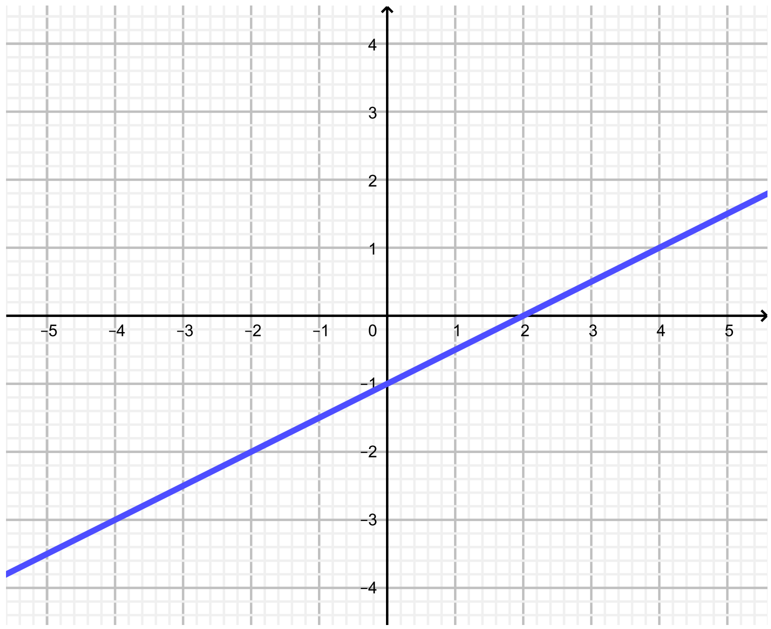
a) $f(3)$ b) $f(-1)$

c) $f(a)$ d) $f(3a)$

e) $f(k - 1)$ f) $f(2k - 3)$

g) $f(2k) - 3$ h) $f(2 + k) - f(2)$

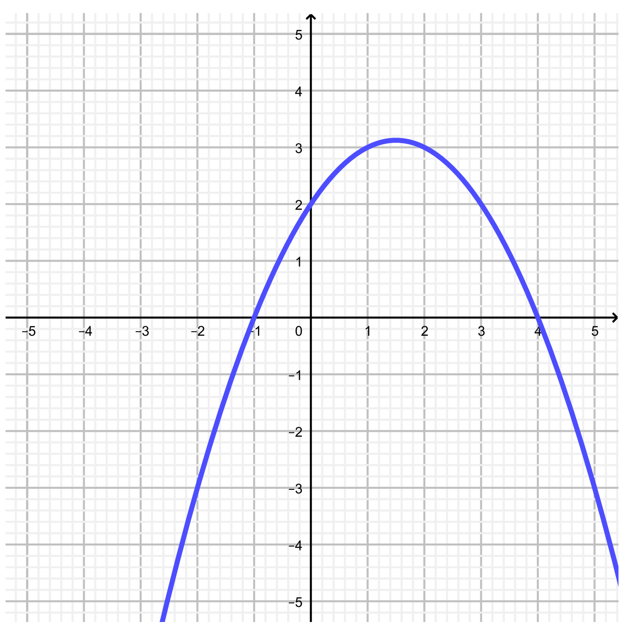
Exercice 13. On donne une fonction f par son graphe.



Dessiner le graphe des fonctions g définies par

a) $g(x) = -f(x)$ b) $g(x) = f(-x)$
c) $g(x) = f(x+1)$ d) $g(x) = f(x) - 2$
e) $g(x) = f(x-1) + 2$ f) $g(x) = 2f(x)$

Exercice 14. On donne la fonction f par son graphe.



Dessiner le graphe des fonctions g définies par

a) $g(x) = -f(-x)$ b) $g(x) = f(x-2)$
c) $g(x) = f(x) + 2$ d) $g(x) = f(x+1) - 2$
e) $g(x) = 2f(x)$ f) $g(x) = -2f(x-1) + 1$

Exercice 15. On donne la courbe

$$\mathcal{C} : y = x^3 - 6x^2.$$

Déterminer l'équation de la courbe image si

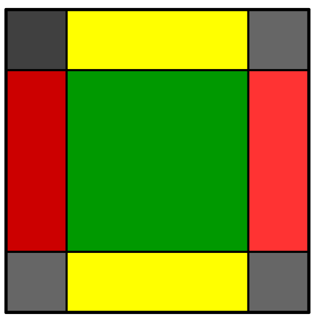
a) $\mathcal{C}$ subit une symétrie d'axe O_x.

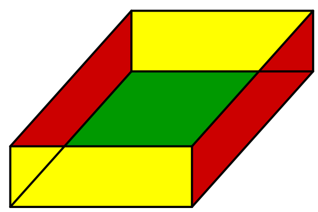
b) $\mathcal{C}$ subit une symétrie d'axe O_y.

c) $\mathcal{C}$ est déplacée de 2 unités vers la droite.

d) $\mathcal{C}$ subit une dilatation verticale de facteur $\frac{1}{2}$ par rapport à l'axe O_x.

Exercice 16. Une entreprise fabrique des boîtes sans couvercle en découpant quatre carrés identiques de côté x dans les quatre coins d'une plaque métallique de dimensions 10 cm$\times$10 cm, puis en relevant les bords.

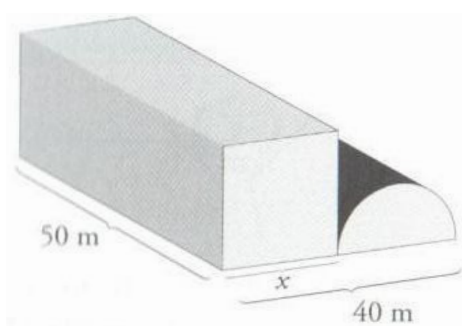




a) Calculer le volume de la boîte avec $x = 3$.

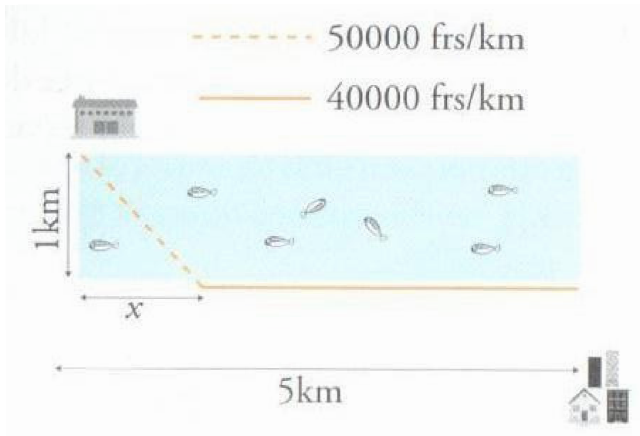
b) Déterminer l'expression mathématique qui établit la relation entre la mesure x et le volume $V(x)$ de la boîte.

Exercice 17. Un agriculteur désire construire deux hangars. Une entreprise lui propose deux formes pour ces hangars : l'un en forme de parallélépipède rectangle à base carrée de côté x, et l'autre en forme de demi-cylindre. Il veur les disposer côte à côte, sur un terrain rectangulaire de 40 m sur 50 m, à l'image de ce qui figure ci-dessous.



Exprimer le volume total des deux hangars en fonction de x.

Exercice 18. Une ligne électrique doit passer en partie à travers une rivière et le long de la berge pour relier une usine à la ville. On sait que la ligne coûte 50000 francs par km pour traverser la rivière et 40000 francs pour longer la berge. Exprimer la dépense globale $D(x)$ en fonction de la seule distance x.



Solutions

Exercice 1.

a) $E = \mathbb{Z}$ et $F = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^2 + 5$.

c) $f(3) = 14$.

d) $f(-2) = 9$.

Exercice 2.

a) 4.

b) -1.

c) 1 et -4 ; 0 et 4.

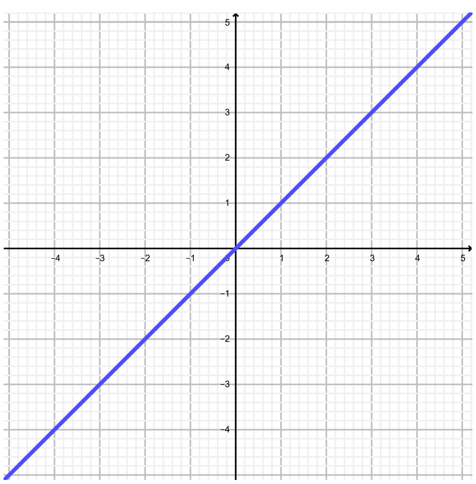
Exercice 3. a) et d).

Exercice 4.

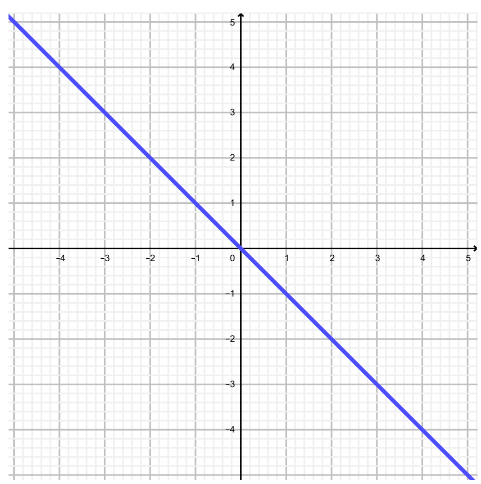
a) Oui	f) Non
b) Non	g) Oui
c) Non	h) Non
d) Oui	i) Non
e) Non	j) Oui

Exercice 5.

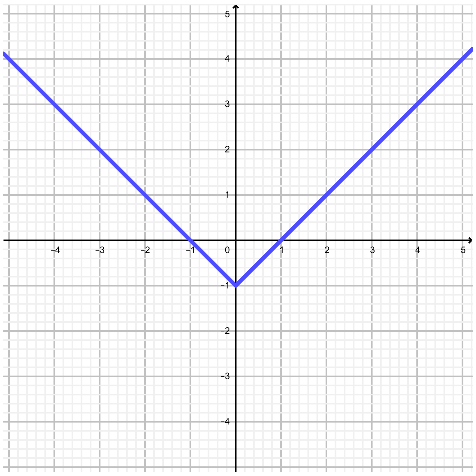
a)



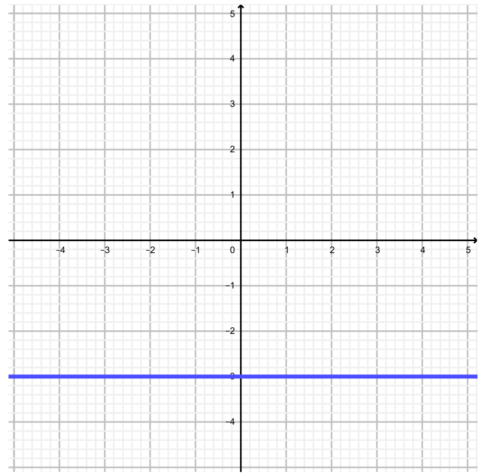
b)



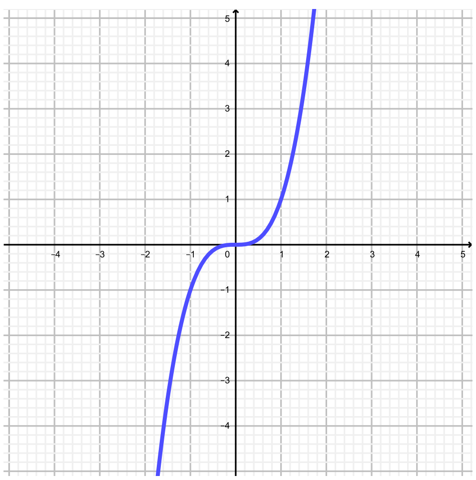
c)



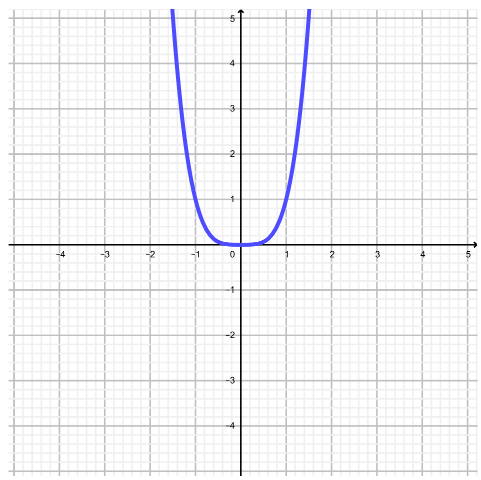
d)



e)



f)



Exercice 6.

a) Oui	b) Non
c) Non	d) Non
e) Oui	f) Oui

Exercice 7.

a) 1 a deux images différentes.

b) Toutes les valeurs de x comprises entre $-2,5$ et $6,5$ ont deux images différentes.

Exercice 8.

a)

3	1	10	-16	22	x
-9	-3	-30	48	-66	$-3x$

b)

-10	0	1	5	10	x
95	-5	-4	20	95	x^2-5

c)

4	18	15	11	-5	x
$1,\overline{3}$	6	5	$3,\overline{6}$	$-1,\overline{6}$	$\frac{x}{3}$

d)

100	200	300	450	60	x
20	30	40	55	16	$\frac{x}{10}+10$

e)

9	36	64	100	81	x
$1,5$	3	4	5	$4,5$	$\frac{\sqrt{x}}{2}$

f)

2	4	1	5	6	x
8	64	1	125	216	x^3

g)

-1	0	6	$\frac{3}{2}$	8	x
-5	-3	9	0	13	$2x-3$

h)

-20	20	0	-25	25	x
15	25	5	20	30	$\lvert x+5\rvert$

Exercice 9.

a) $f(-3) = -\dfrac{4}{5}$ b) $f(0) = \dfrac{1}{4}$

c) $f(1) = 0$ d) $f(2)$ n'est pas défini

Exercice 10.

a) $f(0) = 1$ b) $f(-2) \cong 5$

c) $x = 2$ et $x \cong 4,56$ d) $x \cong -1,07$, $x = 0$, $x \cong 1,39$ et $x \cong 4,75$

e) $a = -3$ et $x \cong 3,6$ f) $x \cong 1,19$ et $x = 5$

Exercice 11.

a) 4 b) 2

c) $4\sqrt{2} - 2$ d) $4 - x^2$

e) $12 - 3x^2$ f) $4 - 9x^2$

Exercice 12.

a) 6 b) 6

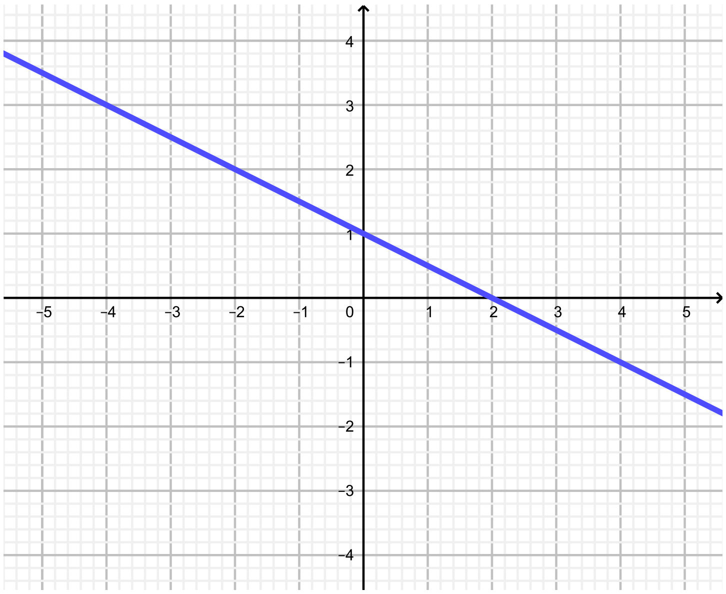
c) $a^2 - 2a + 3$ d) $9a^2 - 6a + 3$

e) $k^2 - 4k + 4$ f) $4k^2 - 16k + 18$

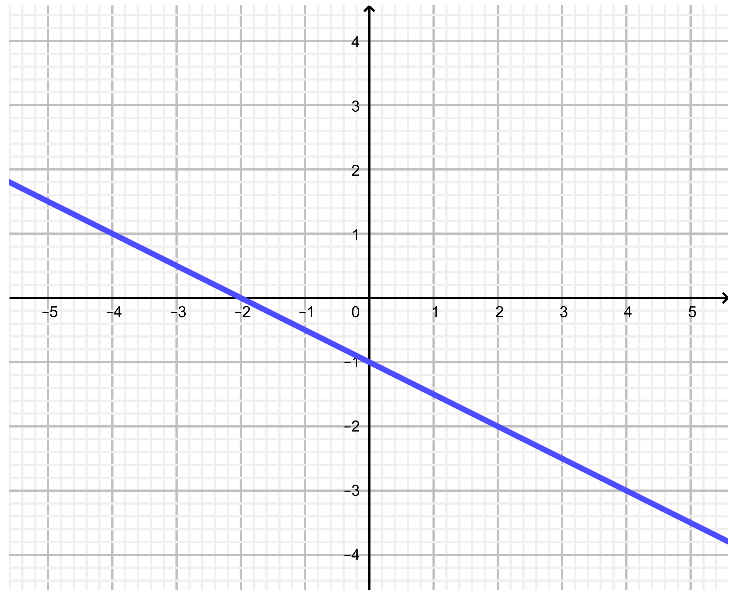
g) $4k^2 - 4k$ h) $k^2 + 2k$

Exercice 13.

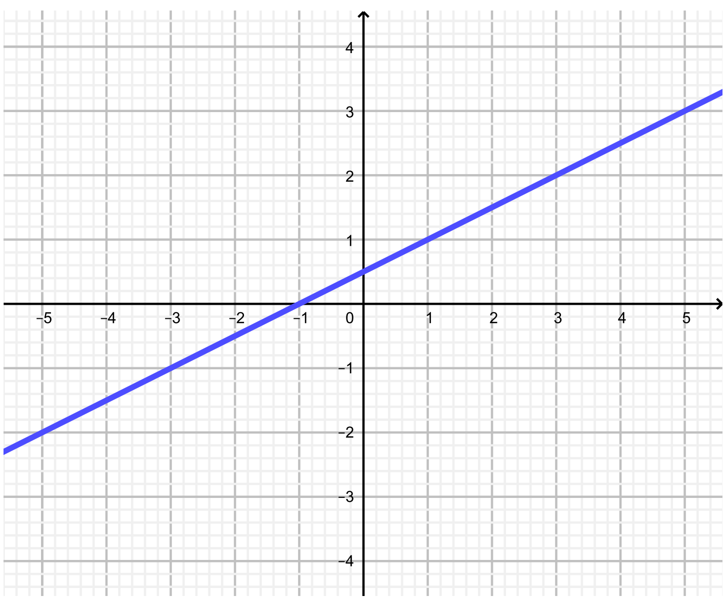
a)



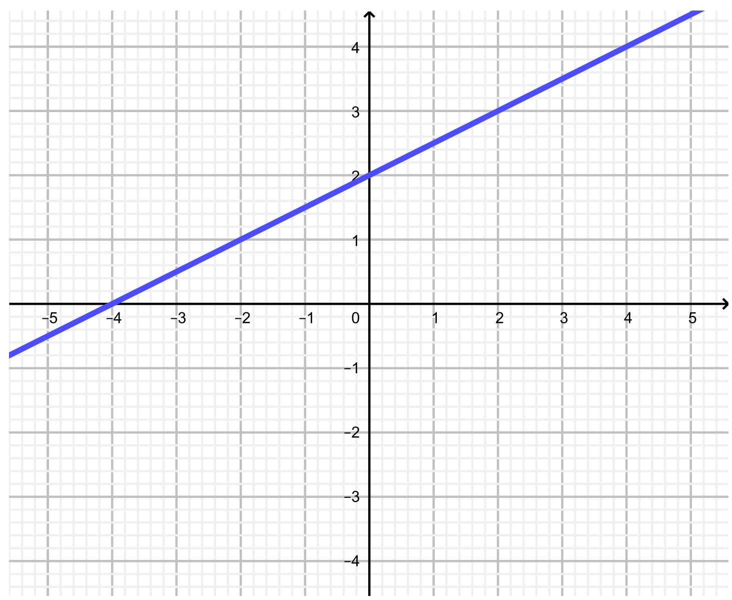
b)



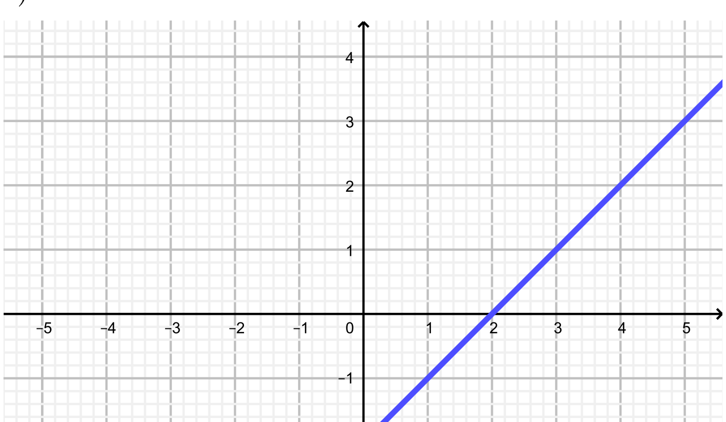
c)



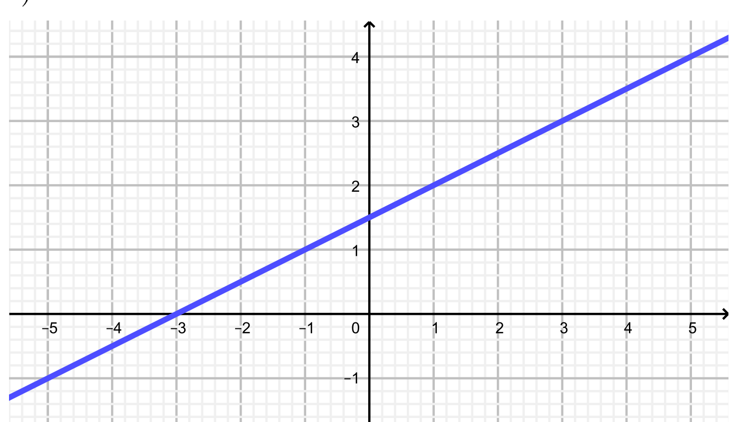
d)



e)

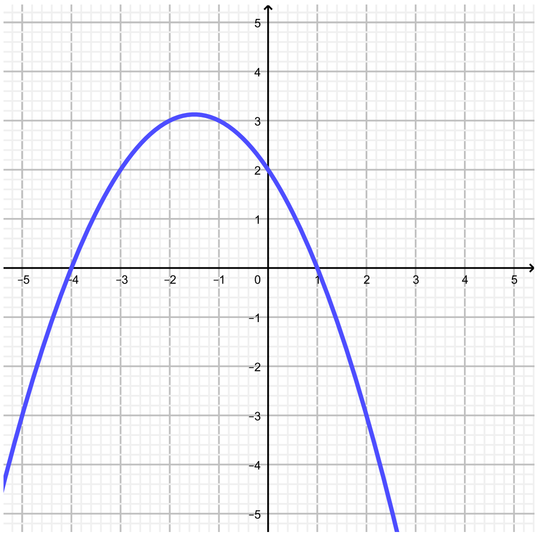


f)

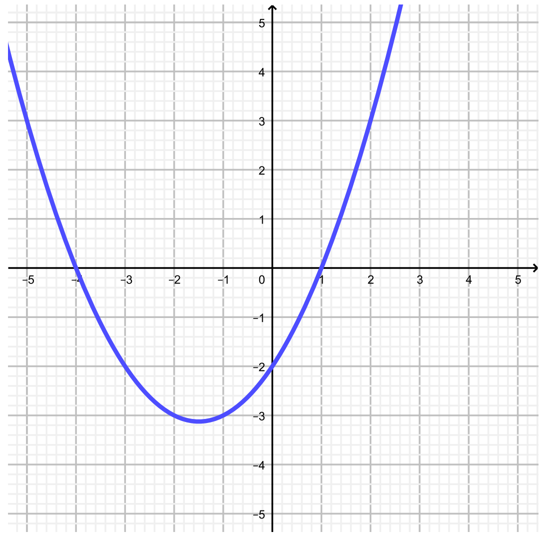


Exercice 14.

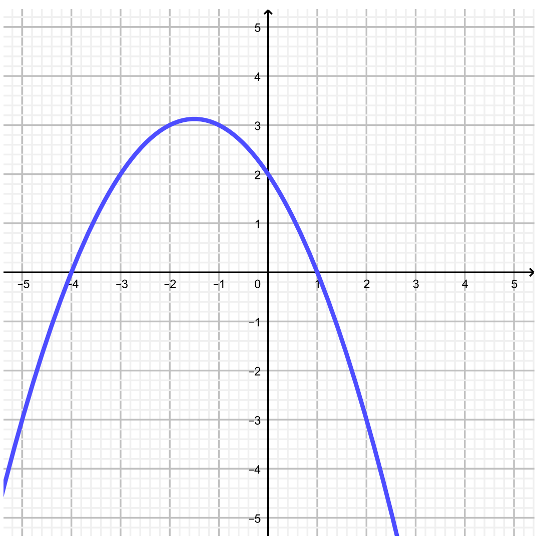
a)



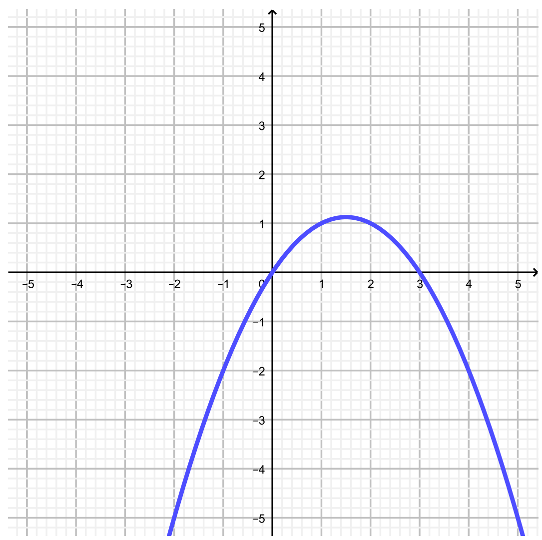
b)



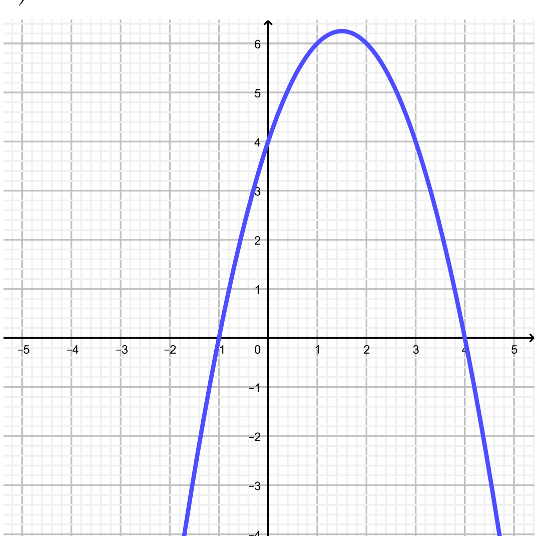
c)



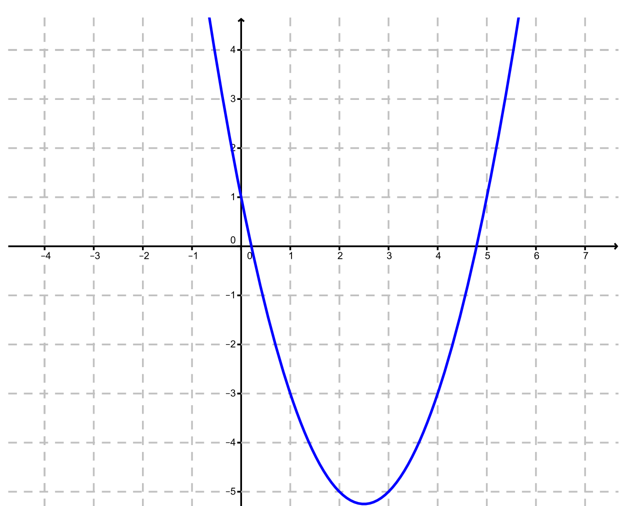
d)



e)



f)



Exercice 15.

a) $y = -x^3 + 6x^2$

b) $y = -x^3 - 6x^2$

c) $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 32$

d) $y = \dfrac{1}{2}x^3 - 3x^2$

Exercice 16.

a) $V = 48\ \text{cm}^2$.

b) $V(x) = x \cdot (10 - 2x)^2$.

Exercice 17. $V(x) = 50x^2 + 25\pi\left(20 - \dfrac{x}{2}\right)^2$.

Exercice 18. $D(x) = 50000\sqrt{1 + x^2} + 40000(5 - x)$.

Table des matières