

# Calcul littéral

Karim Saïd

Ecole Technique, Année scolaire 2020-2021

## 1 Introduction

En mathématiques, il arrive fréquemment de travailler avec des lettres. Par exemple, l'aire d'un carré de côté 2 est de  $2^2 = 4$ , tandis que celle d'un carré de côté 12 vaut  $12^2 = 144$ . Plus généralement, l'aire  $A$  d'un carré est donnée par son côté au carré. On note cela  $A = c^2$  où  $c$  désigne le côté du carré.

## 2 Polynômes

### 2.1 Définition

**Définition.** Une *expression littérale* est une écriture contenant une ou plusieurs variables.

**Exemple.**

1.  $3x^8$  est un *monôme* car il contient un seul terme.  $x$  est la *variable*, car elle peut prendre n'importe quelle valeur. 3 est appelé *coefficient* de  $x^8$ .
2.  $3x^8 - 5y$  est un binôme, car il contient deux termes.
3.  $5x^2 - 2x + 3$  est un trinôme, car il contient trois termes.

**Définition.** Lorsque le nombre de termes n'est pas précisé, on parle de *polynôme*. Le *degré* d'un polynôme par rapport à une variable est la plus grande puissance observée par rapport à celui-ci.

**Exemple.**

1.  $5x^3 - 3x^2 + 2x - 9$  est un polynôme de degré 3.
2.  $3x^4y - 2xy^5$  est un polynôme de degré 4 par rapport à  $x$  et de degré 5 par rapport à  $y$ .

**Définition.** On appelle *termes semblables* des termes qui ne diffèrent que par leurs coefficients.

**Exemple.**

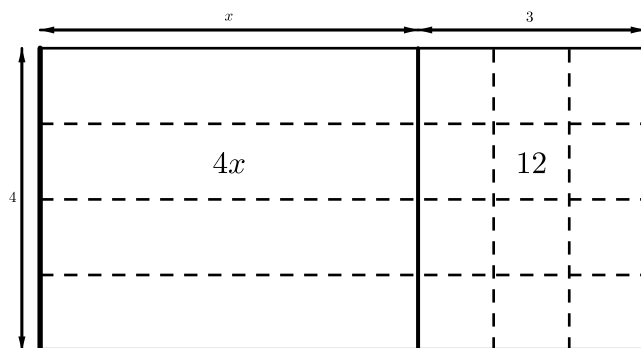
1.  $3x^2y^5$  et  $-6x^2y^5$  sont des termes semblables.
2.  $3x^2y^5$  et  $-6x^5y^2$  ne sont pas des termes semblables.

## 2.2 Opérations sur les polynômes

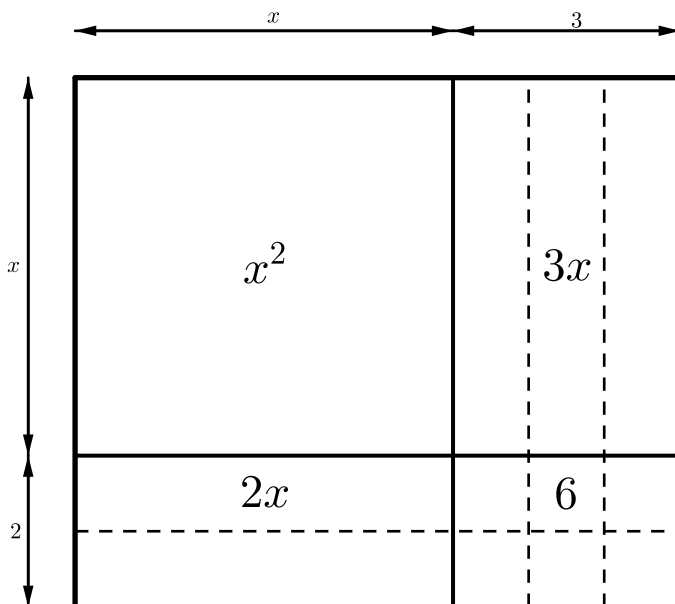
Il est possible de regrouper deux monômes uniquement si ceux-ci sont semblables. par ailleurs, pour multiplier deux polynômes, on distribue.

**Exemple.**

1.  $(3x^2 - 2x + 7) + (x^2 + 3x) = 3x^2 - 2x + 7 + x^2 + 3x = 4x^2 + x + 7.$
2.  $(3x^2 - 2x + 7) - (x^2 + 3x) = 3x^2 - 2x + 7 - x^2 - 3x = 2x^2 - 5x + 7.$
3.  $4 \cdot (x + 3) = 4 \cdot x + 4 \cdot 3 = 4x + 12.$



4.  $(x + 2) \cdot (x + 3) = x \cdot x + x \cdot 3 + 2 \cdot x + 2 \cdot 3 = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6.$



5.  $(3x - 2) \cdot (x^2 + 3) = 3x \cdot x^2 + 3x \cdot 3 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot 3 = 3x^3 + 9x - 2x^2 - 6.$

**Exercice 1.** Réduire les expressions suivantes au maximum.

- |                            |                                  |
|----------------------------|----------------------------------|
| a) $a + b + c + a + b - c$ | b) $2x + 3y + 3x - 2y$           |
| c) $-6x + 9x - 10y - 20y$  | d) $4x^2 - 4 + 3x^2 - 1$         |
| e) $8ab - a^2 + b^2 - 8ab$ | f) $2ab - 3ab + 5ba - 14ab + ba$ |
| g) $5b^2 - b^2 - 4b^2$     | h) $(2b)^3 - b^3 + 2b^3$         |

**Exercice 2.** Réduire les expressions suivantes au maximum.

- |  |   |
|--|---|
| a) $4x^2 + 3y - (6x^2 - 2y)$                                   | b) $(x^2 - 2x - 3) - (x^2 + 4x + 9)$          |
| c) $(3a - 2b + c) - (-3a - 2b - c)$                            | d) $18x - [7x - (8x - y)]$                    |
| e) $5x - [x - (5x - 3)]$                                       | f) $- [16x - (-16x - 1)]$                     |
| g) $5x^3 - \{4x + 3x[2x^2 - 3(x - 5)]\}$                       | h) $4x - \{2x - [3y - (5x - 4y) + 3x]\} - 2y$ |
| i) $25x - \{13x - [24x - (5x + 3y) - (7x - y)] + (24x - 2y)\}$ | j) $- 3x^3\{9x^2 - [3x^3 - 2x(4x + 1)]\}$     |

**Exercice 3.** Réduire les expressions suivantes au maximum.

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| a) $3(5a + 2)$                     | b) $- 5(a - 3)$  |
| c) $- 3(x - 2y + 3z)$              | d) $\frac{3}{5}x \left( 2x^5 - 4x - \frac{3}{7} \right)$ |
| e) $(x + 3)(x + 5)$                | f) $(3z - 1)(4 + 2z)$                                    |
| g) $(2x + 3)^2$                    | h) $(a - 1)(4a^2 + 3a - 1)$                              |
| i) $(a + b + c) \cdot (a - b - c)$ | j) $(4a - 5x)(5c + 4b)4n$                                |
| k) $(x - 2)(x + 2)(5x - 2)$        | l) $(3a - 2b)(2c - 4d)(5x - 2y)$                         |

**Exercice 4.** Réduire les expressions suivantes au maximum.

- |  |   |
|--|---|
| a) $5x - 4(2x + 3)$                          | b) $x(2 - x + x^2) - 3(x - 2)$                    |
| c) $(4y + 6x)(3a - 5b) - (2x - 6y)(2a + 3b)$ | d) $(2a - 6c)(4b - 2d) - (2a - 6c)(5b - 3d)(-3x)$ |
| e) $(3x - 1)(x + 2) - (2x + 5)^2$            | f) $(x - 3y)^2 - (3y - x)^2$                      |

**Exercice 5.** Evaluer les polynômes suivant pour  $p = -2$ ,  $q = 4$  et  $r = -5$ .

- |                  |                          |
|------------------|--------------------------|
| a) $- 3(p + 5q)$ | b) $\frac{q + r}{q + p}$ |
| c) $2(q - r)$    | d) $\frac{3q}{3p - 2r}$  |

## 2.3 Identités remarquables

**Théorème.** Si  $a$  et  $b$  sont deux monômes, alors

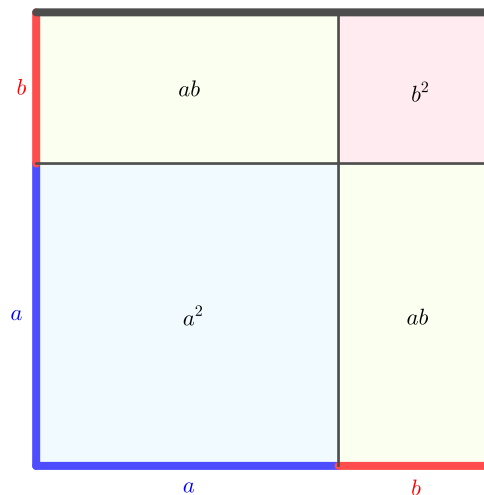
1.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3.  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4.  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5.  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

*Preuve.* Soient  $a$  et  $b$  deux monômes.

On a

1.

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\
 &= a^2 + ab + ba + b^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2.
 \end{aligned}$$



2.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)^2(a-b) \\ &= (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) \\ &= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

□

**Exemple.**

1.

$$\begin{aligned}(5x+3y)^2 &= (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 3y + (3y)^2 \\ &= 25x^2 + 30xy + 9y^2.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(4x^3 - y^2)^2 &= (4x^3)^2 - 2 \cdot 4x^3 \cdot y^2 + (y^2)^2 \\ &= 16x^6 - 8x^3y^2 + y^4.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(9x^4 + 2x^3)(9x^4 - 2x^3) &= (9x^4)^2 - (2x^3)^2 \\ &= 81x^8 - 4x^6.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 (4x + 5y)^3 &= (4x)^3 + 3 \cdot (4x)^2 \cdot 5y + 3 \cdot 4x \cdot (5y)^2 + (5y)^3 \\
 &= 64x^3 + 3 \cdot 16x^2 \cdot 5y + 3 \cdot 4x \cdot 25y^2 + 125y^3 \\
 &= 64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3.
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 (5x^3 - 2y)^3 &= (5x^3)^3 - 3 \cdot (5x^3)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 5x^3 \cdot (2y)^2 - (2y)^3 \\
 &= 125x^9 - 3 \cdot 25x^6 \cdot 2y + 3 \cdot 5x^3 \cdot 4y^2 - 8y^3 \\
 &= 125x^9 - 150x^6y + 60x^3y^2 - 8y^3.
 \end{aligned}$$

**Exercice 6.** Effectuer à l'aide des identités remarquables.

a)  $(x + 1)^2$

b)  $(x + 5)^2$

c)  $(x - 2)(x + 2)$

d)  $(2x - 4)(2x + 4)$

e)  $(3x + 6)(3x - 6)$

f)  $(5 - 4x)^2$

g)  $\left(\frac{4}{3}x - 3y\right)^2$

h)  $\left(\frac{2}{7}x - \frac{3}{2}y\right)^2$

i)  $(3x - 2y)^2$

j)  $(a^2 - 5)^2$

k)  $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$

l)  $(x^2y - z)(x^2y + z)$

**Exercice 7.** Effectuer à l'aide des identités remarquables.

a)  $(1 + a + b)(1 + a - b)$

b)  $(2x - y - 2)(2x - y + 2)$

c)  $(4 + z - w^2)(4 + z + w^2)$

d)  $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$

**Exercice 8.** Effectuer à l'aide des identités remarquables.

a)  $(x + 1)^3$

b)  $(x^2 - 1)^3$

c)  $(2x + 3y)^3$

d)  $(3x - 8)^3$

e)  $(4x^2 - 3x^3)^3$

f)  $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^3$

**Exercice 9.** Compléter.

a)  $64x^2 + \dots \cdot x + \frac{1}{9} = (\dots + \dots)^2$

b)  $9x^2 - 24x + \dots = (\dots - \dots)^2$

c)  $\left(\frac{1}{3}x + \dots\right)^2 = \dots + 4x + \dots$

d)  $\left(\frac{1}{5}x + \dots\right)^2 = \dots + \frac{3}{10}x + \dots$

### 3 Factorisation

En développant  $2x(x - y)$ , on obtient  $2x^2 - 2xy$ . *Factoriser*  $2x^2 - 2xy$  consiste à retrouver le produit  $2x(x - y)$ .

Autrement dit :

$  \begin{array}{ccc}  & \xrightarrow{\text{Développer}} & \\  2x(x - y) & & 2x^2 - 2xy \\  & \xleftarrow{\text{Factoriser}} &   \end{array}  $
---

Suivant les cas, différentes techniques de factorisation seront utilisées.

**Exemple.****1. Mise en évidence**

Soit à factoriser  $8x^3y^2 - 12x^2y^3$ .

Les deux monômes étant des multiples de  $4x^2y^2$ , il est possible de mettre ce terme *en évidence* :

$$8x^3y^2 - 12x^2y^3 = 4x^2y^2(2x - 3y).$$

Pour le vérifier, il suffit de développer le terme de droite.

**2. Mise en évidence d'une parenthèse**

Soit à factoriser  $2(x - y)^2 + 4(x - y)$ .

On peut voir cette expression comme une somme de deux termes dont chacun est multiple de  $2(x - y)$ . Il est donc possible de mettre  $2(x - y)$  en évidence :

$$2(x - y)^2 + 4(x - y) = 2(x - y)((x - y) + 2) = 2(x - y)(x - y + 2).$$

**3. Mise en évidence par groupements**

Soit à factoriser  $2x + 2y + xz + yz$ .

Il n'est pas possible de procéder à une mise en évidence, car les monômes composant le polynôme ci-dessous n'ont aucun diviseur commun. Il est cependant possible de mettre 2 en évidence pour les deux premiers termes et  $z$  pour les deux derniers, afin de se ramener au cas précédent :

$$2x + 2y + xz + yz = 2(x + y) + z(x + y) = (x + y)(2 + z).$$

**4. Identités remarquables**

Soit à factoriser  $9x^2 + 24xy + 16y^2$ . ce trinôme étant de la forme  $a^2 + 2ab + b^2$ , il s'agit de l'écrire sous la forme  $(a + b)^2$  :

$$\underbrace{9x^2}_{=a^2} + \underbrace{24xy}_{=2ab} + \underbrace{16y^2}_{=b^2} = (\underbrace{3x}_{=a} + \underbrace{2y}_{=b})^2.$$

**5. Identités remarquables**

Quant au binôme  $25x^2 - 9y^2$ , il est de la forme  $a^2 - b^2$ . On a donc

$$\underbrace{25x^2}_{=a^2} - \underbrace{9y^2}_{=b^2} = (\underbrace{5x}_{=a} + \underbrace{3y}_{=b})(\underbrace{5x}_{=a} - \underbrace{3y}_{=b}).$$

**6. Factorisation du trinôme du deuxième degré**

En développant  $(x + 2)(x + 3)$ , on obtient

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6.$$

Factoriser  $x^2 + 5x + 6$  consiste à l'écrire comme produit des deux parenthèses ci-dessus.

On observe que :

- puisque le trinôme contient le terme  $x^2$ , chaque parenthèse doit contenir  $x$  ;
- chaque parenthèse contient un binôme de la forme  $x + \text{Nombre}$  ;
- le terme  $5x$  a été obtenu en calculant  $3x + 2x$  ;
- le nombre 6 a été obtenu en calculant  $2 \cdot 3$ .

Autrement dit, la factorisation sera de la forme  $(x + \text{Nombre}_1)(x + \text{Nombre}_2)$ . Le produit de ces deux nombres doit donner 6 et leur somme 5.

### 7. Factorisation du trinôme du deuxième degré

Soit à factoriser  $x^2 + 7x + 12$ .

Comme  $4 \cdot 3 = 12$  et  $4 + 3 = 7$ , on a

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3).$$

### 8. Factorisation du trinôme du deuxième degré

Soit à factoriser  $x^2 - 8x + 15$ .

Comme  $(-5) \cdot (-3) = 15$  et  $-5 - 3 = -8$ , on a

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3).$$

### 9. Factorisation du trinôme du deuxième degré

Soit à factoriser  $x^2 - 2x - 24$ .

Comme  $(-6) \cdot 4 = 24$  et  $-6 + 4 = -2$ , on a

$$x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4).$$

### 10. Un mélange

Soit à factoriser  $2x^3 - 4x^2 - 16x$ .

On a

$$2x^3 - 4x^2 - 16x = 2x(x^2 - 2x - 8) = 2x(x - 4)(x + 2).$$

### 11. Un mélange

Soit à factoriser  $2x^4 - 2y^4$ .

On a

$$2x^4 - 2y^4 = 2(x^4 - y^4) = 2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y).$$

**Exercice 10.** Mettre en évidence les facteurs communs.

a)  $ma + al$

b)  $y^3x^2 - y^2x^3$

c)  $15a^7b^2 - 10a^5b^3$

d)  $25x^5y^4 - 35x^4y^3 + 30x^3y^6$

e)  $y(b - a) - x(b - a)$

f)  $(a + b)^3 + (a + b)^2$

**Exercice 11.** Mettre  $-1$  en évidence.

- |                        |                          |
|------------------------|--------------------------|
| a) $a - b$             | b) $-2m - 3n$            |
| c) $-2a^2 + 3a - 7$    | d) $a(b - c)$            |
| e) $(m - n) + (a - 1)$ | f) $2(x - 1) - 3(1 - y)$ |

**Exercice 12.** Factoriser au maximum.

- |   |   |
|---|---|
| a) $(4a - 5b)(3p - 2q) - (a + 5b)(3p - 2q)$ | b) $n(x - y) - (x - y)$                               |
| c) $(5x + 2y) - 2x(2y + 5x)^2 + 7(5x + 2y)$ | d) $(2x - 1)^2 - 3(2x - 1)(x + 2) + (x + 4)(2x - 1)$  |
| e) $(x + 3)^3 - 2(x + 3) + 5x + 15$         | f) $m(a - b) + n(b - a)$                              |
| g) $r(a - 2) - r^2(2 - a) + r^3(2 - a)$     | h) $(x + 1)(x - y) - (x - 3)(x - y) + (x + 2)(y - x)$ |

**Exercice 13.** Factoriser au maximum.

- |  |  |
|--|--|
| a) $ac - ad + bc - bd$                     | b) $ab - ac - b + c$                     |
| c) $2ax - 6bx + ay - 3by$                  | d) $2ay^2 - axy + 6xy - 3x^2$            |
| e) $3x^3 + 3x^2 - 27x - 27$                | f) $5x^3 + 10x^2 - 20x - 40$             |
| g) $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$                  | h) $x^4 + 2x^3 - x - 2$                  |
| i) $2ax - b - 5ay - 2bx + a + 5by$         | j) $2x^2 + 10xy - 30z - 12xz + 25y + 5x$ |
| k) $10ac - 2ad - 5bc + 4ae - 2be + bd$     | l) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$       |
| m) $30r^2 + 30s - 45rs - 20t - 20r + 30rt$ | n) $3x^2 + 2xy + 6x + 4y$                |

**Exercice 14.** Factoriser à l'aide des identités remarquables.

- |  |                              |
|--|------------------------------|
| a) $x^2 + 10x + 25$                    | b) $x^2 + 16x + 64$          |
| c) $x^2 - 14x + 49$                    | d) $4x^2 + 4x + 1$           |
| e) $9x^2 - 12x + 4$                    | f) $9x^2 - 4$                |
| g) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$ | h) $25x^2 - 70x + 49$        |
| i) $x^2 - 2\sqrt{2} + 2$               | j) $\frac{81x^2}{64} - y^2$  |
| k) $x^4 - 25x^2$                       | l) $x^3y - xy^3$             |
| m) $x^3 + 2x^2y + xy^2$                | n) $(x + y)^2 - (3x - 2y)^2$ |

**Exercice 15.** Factoriser les trinômes suivants au maximum.

- |                     |                    |
|---------------------|--------------------|
| a) $x^2 + 5x + 6$   | b) $x^2 + 3x + 2$  |
| c) $x^2 + 7x + 12$  | d) $x^2 + x - 30$  |
| e) $x^2 + 2x - 3$   | f) $x^2 + x - 12$  |
| g) $x^2 - x - 12$   | h) $x^2 + 3x + 4$  |
| i) $x^2 + 15x + 56$ | j) $x^2 + 3x + 10$ |
| k) $x^2 - 15x + 54$ | l) $x^2 + x - 56$  |



**Exercice 16.** Factoriser au maximum.

- |  |   |
|--|---|
| a) $3a^2b^2 - 6a^2b$                                 | b) $15x^3y^5 - 25x^4y^2 + 10x^6y^4$         |
| c) $121r^3s^4 + 77r^2s^4 - 55r^4s^3$                 | d) $4x^2 - 20x + 25$                        |
| e) $x^3 - 25x$                                       | f) $x^{16} - 1$                             |
| g) $u^3 - 25u$                                       | h) $b^4 - 4b^2 - 77$                        |
| i) $9m^2 + 48m + 64$                                 | j) $3a^2(b - 2) - ab(2 - b) + a(b - 2)$     |
| k) $(a^2 - 1)^2 - (a + 2)^2$                         | l) $a^2(x^2 - 1) + a(1 - x^2) - 6(x^2 - 1)$ |
| m) $(2x - 1)^2 - 3(2x - 1)(x + 2) + (x + 4)(2x - 1)$ | n) $(4x - 3)^3 - 9x + 15y + 12x^2 - 20xy$   |
| o) $81x^{15} - 72x^{13} + 16x^{11}$                  | p) $27x^3 - 18x^2 - 3x + 2$                 |

## 4 Fractions rationnelles

### 4.1 Définition

**Définition.** Une *fraction rationnelle* est un quotient de deux polynômes.

**Exemple.**  $\frac{x+y}{2x+3y}$  et  $\frac{x^2}{5x^2-11y^3}$  sont deux fractions rationnelles.

### 4.2 Opérations sur les fractions rationnelles

Les opérations sur les fractions rationnelles sont identiques à celles sur les fractions numériques :

1. Amplifier une fraction rationnelle consiste à multiplier son numérateur et son dénominateur par un même polynôme.
2. Simplifier une fraction rationnelle consiste à diviser son numérateur et son dénominateur par un même polynôme.
3. Le produit de deux fractions rationnelles est une fraction rationnelle dont le numérateur est le produit des numérateurs et le dénominateur le produit des dénominateurs.
4. Pour diviser une fraction rationnelle par une autre, il suffit de multiplier la première par l'inverse de la deuxième.
5. Pour additionner deux fractions rationnelles, il suffit de trouver un dénominateur commun, de les amplifier et d'additionner les numérateurs ainsi obtenus.

**Exemple.**

1. **Amplifions**  $\frac{2x}{x-y}$  par  $x+y$  :

$$\frac{2x}{x-y} = \frac{2x}{x-y} \cdot \frac{x+y}{x+y} = \frac{2x(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 - y^2}.$$

2. **Simplifions**  $\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}$  :

$$\frac{x^2-9}{x^2+4x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x-3}{x+1}.$$

## 3. Produit de deux fractions rationnelles

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2+8x+16} \cdot \frac{x^2+7x+12}{x+3} &= \frac{x+2}{(x+4)^2} \cdot \frac{(x+4)(x+3)}{x+3} \\ &= \frac{(x+2)\cancel{(x+4)}\cancel{(x+3)}}{(x+4)^2\cancel{(x+3)}} \\ &= \frac{x+2}{x+4} \end{aligned}$$

## 4. Quotient de deux fractions rationnelles

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 4}{2x + 6} \div \frac{x - 2}{x + 3} &= \frac{x^2 - 4}{2x + 6} \cdot \frac{x + 3}{x - 2} \\
 &= \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} \cdot \frac{x + 3}{x - 2} \\
 &= \frac{2(x + 3)}{(x + 2)(\cancel{x - 2})(x + 3)} \cdot \frac{x - 2}{x - 2} \\
 &= \frac{2(\cancel{x + 3})(\cancel{x - 2})}{x + 2} \\
 &= \frac{x + 2}{2}.
 \end{aligned}$$

## 5. Somme de deux fractions rationnelles

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{x + y} - \frac{2}{x - y} &= \frac{3(x - y)}{(x + y)(x - y)} - \frac{2(x + y)}{(x - y)(x + y)} \\
 &= \frac{3(x - y) - 2(x + y)}{(x + y)(x - y)} \\
 &= \frac{3x - 3y - 2x - 2y}{(x + y)(x - y)} \\
 &= \frac{x - 5y}{(x + y)(x - y)} \\
 &= \frac{1}{x + y}.
 \end{aligned}$$

**Remarque.** Il faut faire attention à un signe "-" placé avant la fraction. Celui-ci change tous les signes du numérateur. En effet, on a par exemple

$$\begin{aligned}
 \frac{2x}{x + y} - \frac{3x - 4y}{x + y} &= \frac{2x}{x + y} + (-1) \cdot \frac{3x - 4y}{x + y} \\
 &= \frac{2x}{x + y} + \frac{-3x + 4y}{x + y} \\
 &= \frac{2x - 3x + 4y}{x + y} \\
 &= \frac{-x + 4y}{x + y}.
 \end{aligned}$$

**Exercice 17.** Simplifier au maximum.

a)  $\frac{15a^3b^2}{20a^2b^4}$

b)  $\frac{-18a^3xy^2}{42ax^2y^3}$

c)  $\frac{(a + b)^2(a - b)}{(a - b)^2(a + b)}$

d)  $\frac{45(x + 1)}{63(x^2 - 1)}$

e)  $\frac{3x + 3y + 3z}{5x + 5y + 5z}$

f)  $\frac{a + b}{a^2 - b^2}$

g)  $\frac{4x^2 - 9y^2}{2x + 3y}$

h)  $\frac{x^3 - x^2}{x^3 + x^2}$

i)  $\frac{2a^2 - 18}{4a^2 + 24a + 36}$

j)  $\frac{(x + 5)(x^2 + 10 + 24)}{(x + 4)(x^2 + 10x + 25)}$

k)  $\frac{ax - ay + bx - by}{x^2 - 2xy + y^2}$

l)  $\frac{x^7 + 4x^6 + 3x^5}{x^4 - x^3y + x^3 - x^2y}$

**Exercice 18.** Effectuer, puis simplifier au maximum les expressions suivantes.

a)  $\frac{5a^2b}{3x^2y} \cdot \frac{10xy^2}{5ab^2}$

b)  $\frac{5a^2b}{x^2} : \frac{6ab^2}{xy}$

c)  $\frac{a+1}{b} \cdot \frac{3b^2}{a^2-1}$

d)  $\frac{4a}{a+3} : \frac{8a^2}{3a+9}$

e)  $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^3} : \frac{x+y}{xy}$

f)  $\frac{3x^2}{(x+y)^2} : \frac{x}{x^2-y^2}$

g)  $\frac{x^2-25}{x^4-4} : \frac{x+5}{3x^2-6}$

h)  $\frac{a^2-a}{a^2+4a+4} : \frac{2-a}{a^2+3a+2} : \frac{a^2-1}{a^2-4}$

**Exercice 19.** Effectuer, puis simplifier au maximum les expressions suivantes.

a)  $\frac{2x-1}{3} + \frac{x-2}{15} + \frac{3x+1}{5}$

b)  $\frac{x-4}{3} + \frac{x-3}{4} - \frac{x-12}{12}$

c)  $\frac{m-n}{m+n} - \frac{m+n}{m-n}$

d)  $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} + \frac{2a}{a^2-1}$

e)  $\frac{3}{1-3a} - \frac{2}{1+3a} - \frac{10}{1-9a^2}$

f)  $\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{a(a+b)} - \frac{a}{a+b}$

g)  $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{2-x}$

h)  $\frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{a^2}{ab+b^2} - \frac{b^2}{a^2+ab}$

i)  $\frac{(3x-2)^2}{4-9x^2} + \frac{27x^2-12}{27x^2-36x+12}$

j)  $\frac{m}{m-n} - \frac{n}{n-m} - \frac{2mn}{m^2-n^2}$

k)  $\frac{a+b}{a^2-ab} - \frac{a-b}{ab+b^2} + \frac{a^2-3ab}{a^2b-b^3}$

l)  $\frac{2ax-3by}{2x^2y-2xy^2} - \frac{2ax+3by}{2x^2y+2xy^2} - \frac{2ax-2ay}{x^3-x^2y-xy^2+y^3}$

## Solutions

### Exercice 1.

- |                |               |
|----------------|---------------|
| a) $2a + 2b$   | b) $5x + y$   |
| c) $3x - 30y$  | d) $7x^2 - 5$ |
| e) $b^2 - a^2$ | f) $-9ab$     |
| g) $0$         | h) $9b^3$     |

### Exercice 2.

- |                        |                          |
|------------------------|--------------------------|
| a) $-2x^2 + 5y$        | b) $-6x - 12$            |
| c) $6a + 2c$           | d) $19x - y$             |
| e) $9x - 3$            | f) $-32x - 1$            |
| g) $-x^3 + 9x^2 - 49x$ | h) $5y$                  |
| i) $0$                 | j) $9x^6 - 51x^5 - 6x^4$ |

### Exercice 3.

- |                            |   |
|----------------------------|---|
| a) $15a + 6$               | b) $-5a + 15$   |
| c) $-3x + 6y - 9z$         | d) $\frac{6}{5}x^6 - \frac{12}{5}x^2 - \frac{9}{35}x$             |
| e) $x^2 + 8x + 15$         | f) $6z^2 + 10z - 4$   |
| g) $4x^2 + 12x + 9$        | h) $4a^3 - a^2 - 4a + 1$  |
| i) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$ | j) $80acn + 64abn - 100cnx - 80bnx$                               |
| k) $5x^3 - 2x^2 - 20x + 8$ | l) $30acx - 60adx - 20bcx + 40bdx - 12acy + 24ady + 8bcy - 16bdy$ |

### Exercice 4.

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| a) $-3x - 12$                 | b) $x^3 - x^2 - x + 6$                                       |
| c) $24ay - 2by + 14ax - 36bx$ | d) $8ab - 4ad + 30abx - 18adx - 24bc + 12cd - 90bcx + 54cdx$ |
| e) $-x^2 - 15x - 27$          | f) $0$   |

### Exercice 5.

- |          |                   |
|----------|-------------------|
| a) $-54$ | b) $-\frac{1}{2}$ |
| c) $18$  | d) $3$            |

### Exercice 6.

- |                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| a) $x^2 + 2x + 1$                 | b) $x^2 + 20x + 25$                                   |
| c) $x^2 - 4$                      | d) $4x^2 - 16$  |
| e) $9x^2 - 36$                    | f) $25 - 40x + 16x^2$                                 |
| g) $\frac{16}{9}x^2 - 8xy + 9y^2$ | h) $\frac{4}{49}x^2 - \frac{6}{7}xy + \frac{9}{4}y^2$ |
| i) $9x^2 - 12xy + 4y^2$           | j) $a^4 - 10a^2 + 25$                                 |
| k) $x^2 - \frac{4}{9}$            | l) $x^4y^2 - z^2$                                     |

**Exercice 7.**

a)  $1 + 2a + a^2 - b^2$

b)  $4x^2 - 4xy + y^2 - 4$

c)  $16 + 8z + z^2 - w^4$

d)  $x^4 - 3x^2 + 1$

**Exercice 8.**

a)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b)  $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

c)  $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

d)  $27x^3 - 216x^2 + 576x - 512$

e)  $-27x^9 + 108x^8 - 144x^7 + 64x^6$

f)  $x^6 + \frac{3x^4}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{1}{8}$

**Exercice 9.** a)  $64x^2 + \frac{16}{3} \cdot x + \frac{1}{9} = \left(8x + \frac{1}{3}\right)^2$

b)  $9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$

c)  $\left(\frac{1}{3}x + 6\right)^2 = \frac{1}{9}x^2 + 4x + 36$

d)  $\left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{3}{10}x + \frac{9}{16}$

**Exercice 10.**

a)  $a(m + l)$

b)  $y^2x^2(y - x)$

c)  $5a^5b^2(3a^2 - 2b)$

d)  $(a + b)^2(a + b + 1)$

e)  $(b - a)(y - x)$

f)  $5x^3y^3(5x^2y - 7x + 6y^3)$

**Exercice 11.**

a)  $(-1)(b - a)$

b)  $(-1)(2m + 3n)$

c)  $(-1)(2a^2 - 3a + 7)$

d)  $(-1)a(c - b)$

e)  $(-1)(n - m + 1 - a)$

f)  $(-1)(2(1 - x) + 3(1 - y))$

**Exercice 12.**

a)  $(3p - 2q)(3a - 10b)$

b)  $(x - y)(n - 1)$

c)  $(5x + 2y)(8 - 2x(5x + 2y))$

d)  $(2x - 1)((2x - 1) - 3(x + 2) + (x + 4))$

e)  $(x + 3)((x + 3)^2 + 3)$

f)  $(a - b)(m - n)$

g)  $r(a - 2)(1 + r - r^2)$

h)  $(x - y)(2 - x)$

**Exercice 13.**

a)  $(c - d)(a + b)$

b)  $(b - c)(a - 1)$

c)  $(2x + y)(a - 3b)$

d)  $(ay + 3x)(2y - x)$

e)  $3(x + 3)(x - 3)(x + 1)$

f)  $5(x + 2)^2(x - 2)$

g)  $(x^3 + 8)(x - 3)$

h)  $(x^3 - 1)(x + 2)$

i)  $(a - b)(2x - 5y + 1)$

j)  $(2x + 5)(x + 5y - 6z)$

k)  $(2a - b)(5c - d + 2e)$

l)  $(1 - x)(1 + x^2 + x^4)$

m)  $5(3r - 2)(2r - 3s + 2t)$

n)  $(x + 2)(3x + 2y)$

**Exercice 14.**

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| a) $(x + 5)^2$                       | b) $(x + 8)^2$  |
| c) $(x - 7)^2$                       | d) $(2x + 1)^2$   |
| e) $(3x - 2)^2$                      | f) $(3x + 2)(3x - 2)$   |
| g) $\left(\frac{2}{3}x + 1\right)^2$ | h) $(5x - 7)^2$   |
| i) $(x - \sqrt{2})^2$                | j) $\left(\frac{9}{8}x - y\right)\left(\frac{9}{8}x + y\right)$ |
| k) $(x^2 + 5x)(x^2 - 5x)$            | l) $xy(x + y)(x - y)$   |
| m) $x(x + y)^2$                      | n) $(-2x + 3y)(4x - y)$   |

**Exercice 15.**

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| a) $(x + 2)(x + 3)$ | b) $(x + 1)(x + 2)$ |
| c) $(x + 3)(x + 4)$ | d) $(x + 6)(x - 5)$ |
| e) $(x + 3)(x - 1)$ | f) $(x + 4)(x - 3)$ |
| g) $(x + 3)(x - 4)$ | h) Non factorisable |
| i) $(x + 7)(x + 8)$ | j) Non factorisable |
| k) $(x - 6)(x - 9)$ | l) $(x + 8)(x - 7)$ |

**Exercice 16.**

- |  |  |
|--|--|
| a) $3a^2b(b - 2)$                            | b) $5x^3y^2(3y^2 - 5x + 2x^3y^2)$              |
| c) $11r^2s^3(11rs + 7s - 5r^2)$              | d) $(2x - 5)^2$                                |
| e) $x(x + 5)(x - 5)$                         | f) $(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ |
| g) $u(u - 5)(u + 5)$                         | h) $(b^2 + 7)(b^2 - 11)$                       |
| i) $(3m + 8)^2$                              | j) $a(b - 2)(3a + b + 1)$                      |
| k) $(a^2 - a - 3)(a^2 + a + 1)$              | l) $(8x - 1)(x + 1)(a + 2)(a - 3)$             |
| m) $(2x - 1)((2x - 1) - 3(x + 2) + (x + 4))$ | n) $(4x - 3)((4x - 3)^2 + 3x - 5y)$            |
| o) $x^{11}(3x - 2)^2(3x + 2)^2$              | p) $(3x - 2)(3x + 1)(3x - 1)$                  |

**Exercice 17.**

- |                             |                               |
|-----------------------------|-------------------------------|
| a) $\frac{3a}{4b^2}$        | b) $\frac{-3a^2}{7xy}$        |
| c) $\frac{a + b}{a - b}$    | d) $\frac{5}{7(x - 1)}$       |
| e) $\frac{3}{5}$            | f) $\frac{1}{a - b}$          |
| g) $2x - 3y$                | h) $\frac{x - 1}{x + 1}$      |
| i) $\frac{a - 3}{2(a + 3)}$ | j) $\frac{x + 6}{x + 5}$      |
| k) $\frac{a + b}{x - y}$    | l) $\frac{x^3(x - 3)}{x - y}$ |

**Exercice 18.**

a)  $\frac{10ay}{3bx}$

b)  $\frac{5ay}{6bx}$

c)  $\frac{3b}{a-1}$

d)  $\frac{3}{2a}$

e)  $\frac{y(x+y)}{x^2}$

f)  $\frac{3x(x-y)}{x+y}$

g)  $\frac{3(x-5)}{x^2+2}$

h)  $-a$

**Exercice 19.**

a)  $\frac{20x-4}{15}$

b)  $\frac{6x-13}{12}$

c)  $-\frac{4mn}{m^2-n^2}$

d)  $\frac{4a}{a^2-1}$

e)  $\frac{15a-9}{1-9a^2}$

f)  $\frac{a^2+b^2-a^2b}{ab(a+b)}$

g)  $\frac{1}{x-2}$

h) 1

i)  $\frac{24x}{9x^2-4}$

j)  $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$

k)  $\frac{b}{a(a-b)}$

l)  $\frac{3b}{y^2-x^2}$



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Polynômes</b>	<b>1</b>
2.1	Définition . . . . .	1
2.2	Opérations sur les polynômes . . . . .	2
2.3	Identités remarquables . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Factorisation</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Fractions rationnelles</b>	<b>9</b>
4.1	Définition . . . . .	9
4.2	Opérations sur les fractions rationnelles . . . . .	9