Inéquations

Karim Saïd

Ecole Technique, Année scolaire 2020-2021

1 Introduction

Définition. Une *inéquation* est une inégalité ($<$, $\leq$, $>$ ou $\geq$) entre deux expressions algébriques.

Exemple. Un étudiant a obtenu les notes de 2, $4,5$ et 3 à ses trois premiers travaux écrits. Quelle note devrait-il obtenir au minimum au quatrième (et dernier) travail écrit pour que sa moyenne soit suffisante ?

Résolution. Soit x la dernière note du travail écrit.
La moyenne finale est donnée par

$$\frac{2+4,5+3+x}{4} = \frac{9,5+x}{4}.$$

Pour que l'étudiant obtienne une moyenne finale suffisante, il faut qu'elle soit supérieure ou égale à $3,75$.
Cette condition se traduit par *l'inéquation du premier degré à une inconnue*

$$\frac{9,5+x}{4} \geq 3,75.$$

Une *solution* de cette inéquation est un nombre x pour lesquel l'inéquation est verifiée. Ainsi, $x = 6$ est solution de cette inéquation, car

$$\frac{9,5+6}{4} = \frac{15,5}{4} = 3,875 \geq 3,75.$$

En revanche, $x = 1$ n'est pas solution de cette inéquation, car

$$\frac{9,5+1}{4} = \frac{10,5}{4} = 2,625 < 3,75.$$

Résoudre une inéquation consiste à trouver tous les nombres qui vérifient l'inégalité :

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{9,5+x}{4} & \geq & 3,75 & \cdot 4 \\ 9,5+x & \geq & 15 & -10,25 \\ x & \geq & 5,5 & \end{array}$$

Ainsi, cet étudiant devra obtenir au moins $5,5$, afin de terminer son semestre avec une moyenne suffisante. L'ensemble S_i des solutions de l'inéquation s'écrit également

$$S_i = [5,5; +\infty[.$$

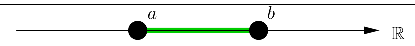
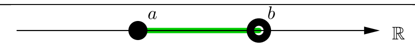
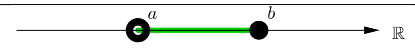
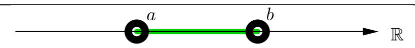
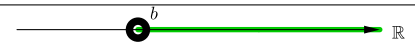
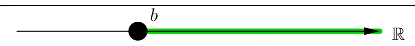
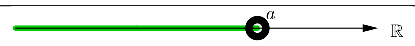
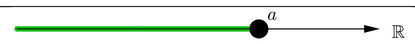
Remarque. $[5,5; +\infty[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation. Mais étant donné que la note maximale que l'on puisse obtenir est 6, il convient de rejetter toutes les solutions strictement supérieures à 6. Ainsi, l'ensemble S_p des solutions du problème (mais pas de l'inéquation !) est donné par

$$S_p = [5,5; 6].$$

2 Intervalles

Les intervalles sont des notations simples pour décrire certains sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On les utilise notamment pour donner les ensembles des solutions d'une inéquation.

Dans le tableau ci-dessous, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, chacune des lignes décrit le même sous ensemble de $\mathbb{R}$ de trois manières équivalentes.

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$	
$a \leq x < b$	$[a;b[$	
$a < x \leq b$	$]a;b]$	
$a < x < b$	$]a;b[$	
$x > b$	$]b;+\infty[$	
$x \geq b$	$[b;+\infty[$	
$x < a$	$]-\infty;a[$	
$x \leq a$	$]-\infty;a]$	

3 Inéquations simples du premier degré

Définition. *Résoudre* une inéquation consiste à trouver toutes les valeurs de l'inconnue (par exemple x) qui rendent l'inégalité vraie.

Exemple. Soit à résoudre *l'inéquation*

$$-7x - 6 \geq 3x + 2.$$

On a

$$\begin{array}{rcl|l} -7x-6 & \geq & 3x+2 & -3x \\ -10x-6 & \geq & 2 & +6 \\ -10x & \geq & 8 & :(-10) \\ x & \leq & -\frac{4}{5} & \end{array}$$

Ainsi $x \leq -\frac{4}{5}$, ce qui s'écrit encore $x \in \left]-\infty; -\frac{4}{5}\right]$.

Attention ! Lorsque l'on multiplie (ou divise) par un nombre négatif des deux côtés d'une inéquation, le sens de l'inégalité change !
En effet, soit à résoudre $-x < 2$.
Il est incorrect de multiplier les deux côtés de l'inéquation par (-1), pour arriver à $x < -2$.
En effet :

$$\begin{array}{rcl|l} -x & < & 2 & +x \\ 0 & < & 2+x & -2 \\ -2 & < & x. & \end{array}$$

Exercice 1. Vrai ou faux ? Justifier !

a) -4 est solution de l'inéquation $-3x > 7$.

b) 8 est solution de l'inéquation $5x - 3 \leq 37$.

c) 8 est solution de l'inéquation $5x - 3 < 7$.

d) 2 est solution de l'inéquation $3x - 2 < -4x + 12$.

e) 5 est solution de l'inéquation $5x - 3 \geq 5x + 2$.

Exercice 2. Résoudre les inéquations suivantes et donner la solution sous forme d'intervalle.

a) $3 - 2x > 3x - 5$

b) $5x - 3 < 5(x + 2)$

c) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{4} > \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$

d) $\frac{3x-2}{4} \leq 2x - 8$

e) $\frac{3-2x}{5} \geq \frac{2}{3}$

f) $\frac{3-4x}{2} < \frac{x-3}{4}$

g) $\frac{x-5}{3} - \frac{x-8}{4} \leq 0$

h) $\frac{x-4}{2} < \frac{7x}{2} - (3x + 2)$

i) $\frac{2x-3}{3} + \frac{x+4}{5} \leq \frac{x+2}{4}$

j) $\frac{x+9}{7} + \frac{1-2x}{3} < 4 + \frac{5-3x}{2}$

k) $\frac{3x-3}{8} - \frac{x-10}{10} < \frac{4x+1}{40} + 2$

l) $x + 3 - \frac{x+5}{4} < \frac{x-3}{5} - 2x$

4 Inéquations doubles du premier degré

Exemple. Soit à résoudre la *double inéquation*

$$-5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1.$$

Un nombre x est une solution de l'inéquation ci-dessus si et seulement si

$$-5 \leq \frac{4-3x}{2} \text{ et } \frac{4-3x}{2} < 1.$$

On peut résoudre chaque inéquation séparément, ou les deux simultanément, comme ci-dessous :

$$\begin{array}{rclcl|l}
-5 & \leq & \frac{4-3x}{2} & < & 1 & \cdot 2 \\
-10 & \leq & 4-3x & < & 2 & -4 \\
-14 & \leq & -3x & < & -2 & :(-3) \\
\frac{-14}{-3} & \geq & x & > & \frac{-2}{-3} & \\
\frac{14}{3} & \geq & x & > & \frac{2}{3} & \\
\frac{2}{3} & < & x & \leq & \frac{14}{3} &
\end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions S est donné par

$$S = \left]\frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right].$$

Exercice 3. Résoudre les inéquations suivantes et donner la solution sous forme d'intervalle.

a) $-3 < 2x - 5 < 7$

b) $1 < \frac{2}{3}x + 1 < 2$

c) $3 \leq \frac{2x-3}{5} \leq 7$

d) $3 \leq \frac{2-3x}{5} \leq 7$

e) $0 \leq 4 - \frac{1}{3}x \leq 2$

f) $4 > \frac{2-3x}{7} \geq -2$

5 Inéquations avec des valeurs absolues

Exemple. Soit à résoudre l'inéquation

$$|x-3| < \frac{1}{2}.$$

Un nombre x est une solution de l'inéquation ci-dessus si et seulement si

$$-\frac{1}{2} < x-3 \text{ et } x-3 < \frac{1}{2}.$$

On peut résoudre chaque inéquation séparément, ou les deux simultanément, comme ci-dessous :

$$\begin{array}{rclcl|l} -\frac{1}{2} & < & x-3 & < & \frac{1}{2} & \cdot 2 \\ -1 & < & 2x-6 & < & 1 & +6 \\ 5 & < & 2x & < & 7 & :2 \\ \frac{5}{2} & < & x & < & \frac{7}{2} & \end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions S est donné par

$$S = \left]\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right[.$$

Exemple. Soit à résoudre l'inéquation

$$|x+2| \geq 4.$$

Un nombre x est une solution de l'inéquation ci-dessus si et seulement si

$$x+2 \geq 4 \text{ et } x+2 \leq -4.$$

Dans ce cas, il convient de résoudre chaque inéquation séparément, comme ci-dessous :

1. $$\begin{array}{rcl|l} x+2 & \geq & 4 & -2 \\ x & \geq & 2 & \end{array}$$

   Ainsi, on en tire que $x \in [2; +\infty[$.

2. $$\begin{array}{rcl|l} x+2 & \leq & -4 & -2 \\ x & \geq & -6 & \end{array}$$

   Ainsi, on en tire que $x \in]-\infty; -6]$.

Ainsi, l'ensemble des solutions S est donné par

$$S =]-\infty; -6] \cup [2; +\infty[.$$

Exercice 4. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $|x| < 3$	b) $|2x+5| < 4$
c) $|3x-7| \geq 5$	d) $\left|\frac{2-3x}{5}\right| \geq 2$
e) $|5x+2| \leq 0$	f) $|6x-5| \leq -2$

6 Inéquations de degré supérieur à 1

Exemple. Soit à résoudre

$$(x-1)(x+5)(3-x) \geq 0.$$

— $x=-6$ est solution car $(-6-1)(-6+5)(3-(-6)) = (-7)(-1)\cdot 9 = 63$.
— $x=0$ est solution car $(0-1)(0+5)(3-0) = (-1)\cdot 5 \cdot 3 = -15$.
— $x=2$ est solution car $(2-1)(2+5)(3-2) = 1\cdot 7\cdot 1 = 7$.
— $x=4$ est solution car $(4-1)(4+5)(3-4) = 3\cdot 9\cdot(-1) = -27$.

On remarque que les solutions de ce type d'inéquation sont plus "dispersées" et que la règle des signes a une influence.

Etudions alors le signe de $(x-1)(x+5)(3-x)$ à l'aide du tableau ci-dessous :

	$-\infty$		-5		1		3		$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+5$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\vert$	$-$	$-$
$(2x-3)(x+5)(3-x)$	$+$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$-$

Ainsi,

$$x \in S =]-\infty; -5] \cup [1; 3].$$

Exercice 5. Résoudre les inéquations ci-dessous.

a) $x(x-1) < 0$
b) $(x+1)(x-2) > 0$
c) $(3x+1)(5-10x) > 0$
d) $(2-3x)(4x-7) \geq 0$
e) $(x+5)(x+1)(x-2) > 0$
f) $(x+4)^2(2x-3) \geq 0$
g) $(x+2)(x-1)(4-x) \leq 0$
h) $(x-5)(x+3)(-2-x) < 0$
i) $(x-3)(x+4)(x-5)(x+6) \geq 0$
j) $x(2x-5)(6-4x)(x+2) \leq 0$

Exercice 6. Résoudre les inéquations ci-dessous.

a) $x^2 - x - 6 < 0$
b) $x^2 + 4x + 3 \geq 0$
c) $x^2 - 10x + 25 \leq 0$
d) $x^2 - 2x - 5 > 3$
e) $x^2 - 4x - 17 \leq 4$
f) $-x^2 + 3x + 4 > 0$
g) $x^3 + x^2 - 20x \leq 0$
h) $x^4 + 5x^2 \geq 36$
i) $x^4 + 15x^2 < 16$
j) $x^5 - 5x^3 + 4x \leq 0$
k) $x^3 - 4x^2 + x + 6 > 0$
l) $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$

Exercice 7. Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation

$$(m+3)x^2 - (2m+1)x + m - 1 = 0$$

n'admet-elle pas de solution réelle ?

7 Inéquations rationnelles

Exemple. Soit à résoudre

$$\frac{x^2-9}{x-1} \leq 0.$$

On a

$$\frac{x^2-9}{x-1} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-1}$$

Etudions alors le signe de $\dfrac{x^2-9}{x-1} = \dfrac{(x+3)(x-3)}{x-1}$ à l'aide du tableau ci-dessous :

	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$x+3$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x+3)(x-3)}{x-1}$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$+$	$+$

Ainsi,

$$x \in S =]-\infty; -3] \cup]1; 3] \,.$$

Exercice 8. Résoudre les inéquations ci-dessous.

a) $\dfrac{x^2(x+2)}{(x+2)(x+1)} \leq 0$ b) $\dfrac{(x+3)^2(2-x)}{(x+4)(x^2-4)} \leq 0$

c) $\dfrac{(x^2+1)(x-3)}{x^2-9} \geq 0$ d) $\dfrac{x-2}{x^2-3x+10} \geq 0$

e) $\dfrac{-3x}{x^2-9} > 0$ f) $\dfrac{x+5}{x^2-7x+12} \leq 0$

g) $\dfrac{2x}{16-x^2} < 0$ h) $\dfrac{x^2-x}{x^2+2x} \leq 0$

Exercice 9. Résoudre les inéquations ci-dessous.

a) $\dfrac{x-3}{x^2-3x+2} > 0$ b) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3} \leq 0$

c) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} > 0$ d) $\dfrac{x+6}{3x^5-8x^4} \leq 0$

e) $\dfrac{x^3+3x^2-40x}{x^2+2x-35} \geq 0$ f) $\dfrac{x^8-2x^7}{3x+5} < 0$

g) $\dfrac{x^3-2x^2-24x}{x^2+x-2} > 0$ h) $\dfrac{x-3}{-x^2+3x-2} > 0$

Exercice 10. Résoudre les inéquations ci-dessous.

a) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x^2-1}>0$

b) $\dfrac{4x-3}{x-1}\leq 2$

c) $\dfrac{4x-3}{x-1}\geq 2$

d) $\dfrac{x+1}{x-1}\leq\dfrac{x-1}{x+1}$

e) $\dfrac{x+1}{x^2-25}<\dfrac{1}{x+5}$

f) $\dfrac{x+3}{x+1}-\dfrac{x}{x+4}\geq 3$

g) $\dfrac{6}{4-x}-\dfrac{1}{1-x}\leq 1$

h) $\dfrac{1}{x+1}\leq\dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$

i) $\dfrac{13}{2x+1}\geq 9-\dfrac{38}{4-x}$

j) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}<-\dfrac{1}{x+3}$

Solutions

Exercice 1.

a) Vrai.
b) Vrai.
c) Faux.
d) Faux.
e) Faux.

Exercice 2.

a) $x \in \left]-\infty; \frac{8}{5}\right[$

b) $x \in \mathbb{R}$

c) $x \in \left]\frac{75}{8}; +\infty\right[$

d) $x \in [6; +\infty[$

e) $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{6}\right]$

f) $x \in]1; +\infty[$

g) $x \in]-\infty; -4]$

h) Pas de solution

i) $x \in \left]-\infty; \frac{42}{37}\right]$

j) $x \in]-\infty; 5[$

k) $x \in]-\infty; 8[$

l) $x \in \left]-\infty; -\frac{47}{51}\right[$

Exercice 3.

a) $x \in]1; 6[$

b) $x \in \left]0; \frac{3}{2}\right[$

c) $x \in [9; 19]$

d) $x \in \left[-11; -\frac{13}{3}\right]$

e) $x \in [6; 12]$

f) $x \in \left[-\frac{26}{3}; \frac{16}{3}\right]$

Exercice 4.

a) $x \in]-3; 3[$

b) $x \in \left]-\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right[$

c) $x \in \left]-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup [4; +\infty[$

d) $x \in \left]-\infty; -\frac{8}{3}\right] \cup [4; +\infty[$

e) $x = -\frac{2}{5}$

f) Pas de solution

Exercice 5.

a) $x \in]0; 1[$

b) $x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

c) $x \in \left]-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right[$

d) $x \in \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{4}\right]$

e) $x \in]-5; -1[\cup]2; +\infty[$

f) $x \in \{-4\} \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

g) $x \in [-2; 1] \cup [4; +\infty[$

h) $x \in]-3; -2[\cup]5; +\infty[$

i) $x \in]-\infty; -6] \cup [-4; 3] \cup [5; +\infty[$

j) $x \in [-\infty; -2] \cup \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$

Exercice 6.

a) $x \in]-2;3[$
b) $x \in]-\infty;-3] \cup [-1;+\infty[$
c) $x = 5$
d) $x \in]-\infty;-2[\cup]4;+\infty[$
e) $x \in [-3;7]$
f) $x \in]-1;4[$
g) $x \in \,]-\infty;-5] \cup [0;4]$
h) $x \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$
i) $x \in]-1;1[$
j) $x \in]-\infty;-2] \cup [-1;0] \cup [1;2]$
k) $x \in]-1;2[\cup]3;+\infty[$
l) $x \in]-\infty;-1] \cup \{1\}$

Exercice 7. $m \in \left]\frac{13}{4};+\infty\right[$

Exercice 8.

a) $x \in]-\infty;-2[\cup]-2;-1[\cup\{0\}$
b) $x \in]-\infty;-4[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[\cup\{-3\}$
c) $x \in]-3;+\infty[$
d) $x \in [2;+\infty[$
e) $x \in]-\infty;-3[\cup]0;3[$
f) $x \in]-\infty;-5]\cup]3;4[$
g) $x \in]-4;0[\cup]4;+\infty[$
h) $x \in]-2;0]\cup]0;1[$

Exercice 9.

a) $x \in]1;2[\cup]3;+\infty[$
b) $x \in [-2;1[\cup]1;3[$
c) $x \in]-\infty;-2[\cup]0;1[\cup]2;+\infty[$
d) $x \in [-6;0[\cup \left]0;\dfrac{8}{3}\right[$
e) $x \in [-8;-7[\cup[0;5[\cup]5;+\infty[$
f) $x \in \left]-\infty;-\dfrac{5}{3}\right[\cup]0;2[$
g) $x \in]-4;-2[\cup]0;1[\cup]6;+\infty[$
h) $x \in]-\infty;-1[\cup]2;3[$

Exercice 10.

a) $x \in \left]-1;\dfrac{1}{2}\right]\cup]1;+\infty[$
b) $x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right[$
c) $x \in \left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup]1;+\infty[$
d) $x \in]-\infty;-1[\cup[0;1[$
e) $x \in]-5;5[$
f) $x \in]-4;-3]\cup]-1;0]$
g) $x \in]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$
h) $x \in]-3;-1[\cup[2;+\infty[$
i) $x \in \left]-\dfrac{1}{2};4\right[$
j) $x \in]-\infty;-3[\cup]-2;-1[$

Table des matières