Géométrie dans l'espace

Karim Saïd

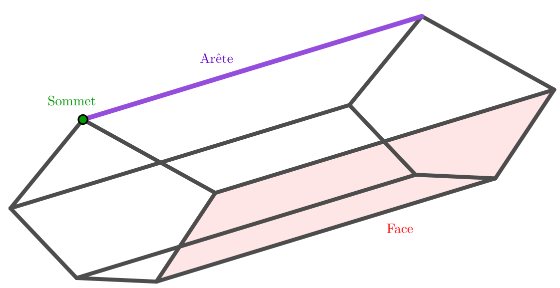
Ecole Technique, Année scolaire 2020-2021

1 Définitions

Définition. Un *solide* est une figure géométrique à trois dimensions délimitée par des surfaces planes ou courbes.

Définition. Un *polyèdre* est un solide dont les faces sont des polygones.

Remarque. Un polyèdre comporte donc des *faces*, des *arêtes* et des *sommets*.



Définition. Un polyèdre est dit *convexe* si on peut relier chaque point à l'intérieur de celui-ci sans en sortir. Dans le cas contraire, on dit qu'il est *concave*.

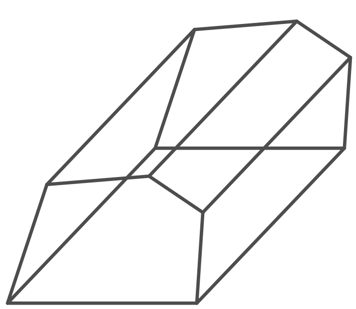


FIGURE 1 – Polyèdre convexe.

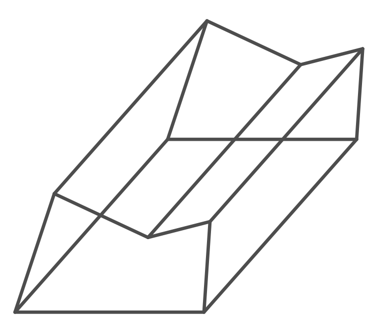


FIGURE 2 – Polyèdre concave.

Définition. On appelle *polyèdre régulier* tout polyèdre dont toutes les faces sont le même polygone régulier et dont touts les sommets sont points de contact du même nombre de faces.

Remarque. Il n'existe que 5 polyèdres réguliers convexes : le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, le cube et le dodécaèdre [1]. On les appelle les *solides de Platon*.

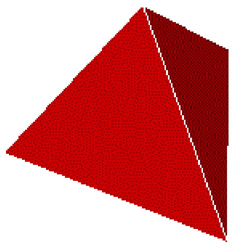


FIGURE 3 – Tétraèdre.

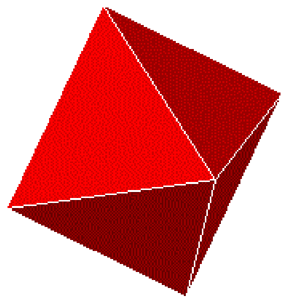


FIGURE 4 – Octaèdre.

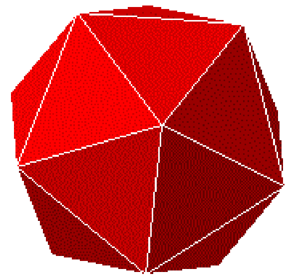


FIGURE 5 – Icosaèdre.

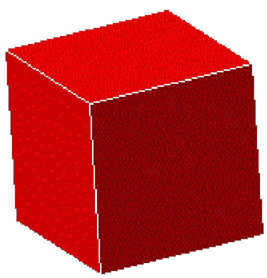


FIGURE 6 – Cube.

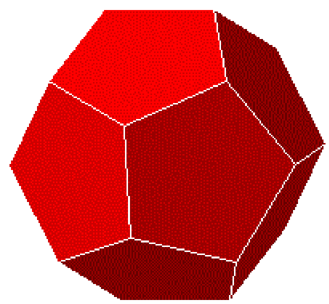


FIGURE 7 – Dodécaèdre.

Définition. Un *corps rond* est un solide compose d'au moins une surface courbe.

Exemple.

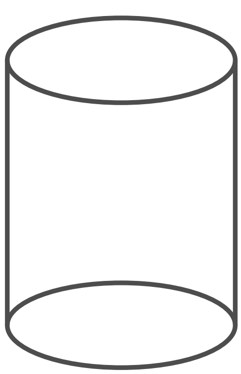


FIGURE 8 – Cylindre droit.

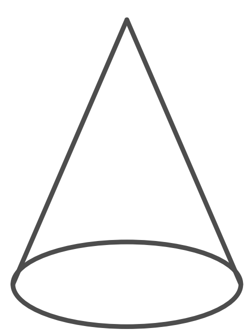
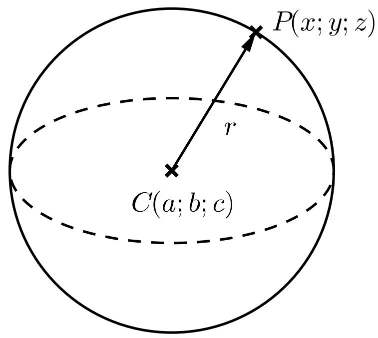


FIGURE 9 – Cône droit.

1. Ce résultat était déjà connu à l'Antiquité par Platon. Quant aux polyèdres réguliers non convexes, Augustin Cauchy (1789-1857), mathématicien français, réussit à démontrer qu'il n'en existe que neuf.

Définition.

1. On appelle *sphère* $\mathcal{S}$ de centre C et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble des points P de l'espace situés à distance r de C.
2. On appelle *boule* $\mathcal{B}$ de centre C et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble des points P de l'espace situés à distance inférieure ou égale à r de C.



2 Volumes

Théorème. *Les solides ci-dessous ont les volumes suivants.*

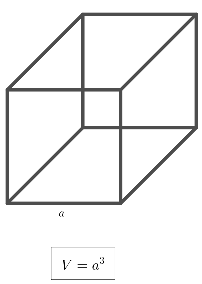


FIGURE 10 – Cube.

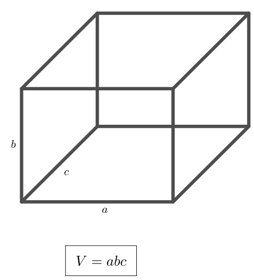


FIGURE 11 – Parallélépipède rectangle.

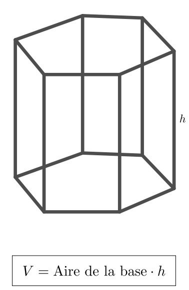


FIGURE 12 – Prisme.

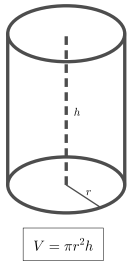


FIGURE 13 – Cylindre.

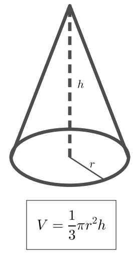


FIGURE 14 – Cône.

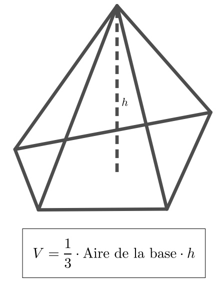


FIGURE 15 – Pyramide.

Théorème.

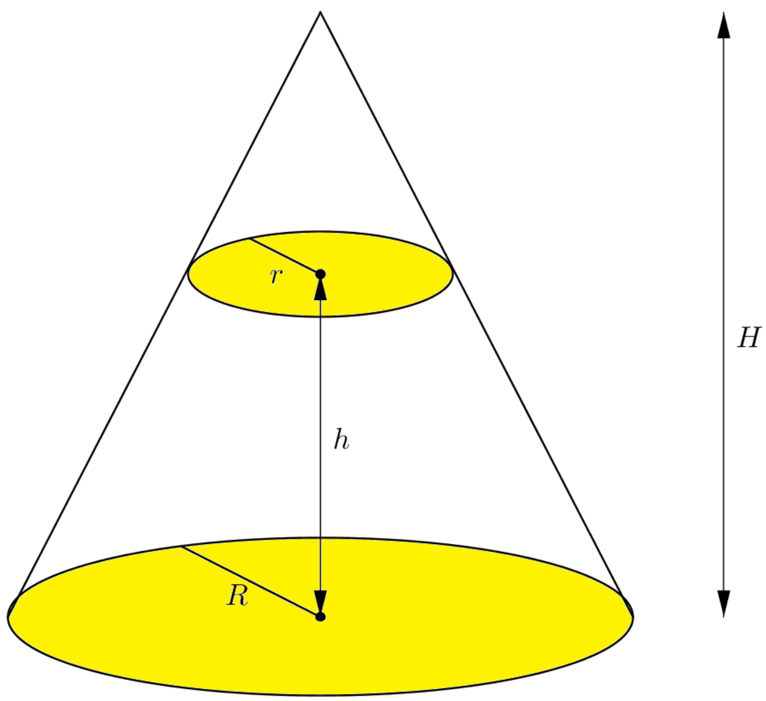
1. *Une sphère (ou une boule) de rayon r a pour aire*

$$\boxed{A = 4\pi r^2.}$$

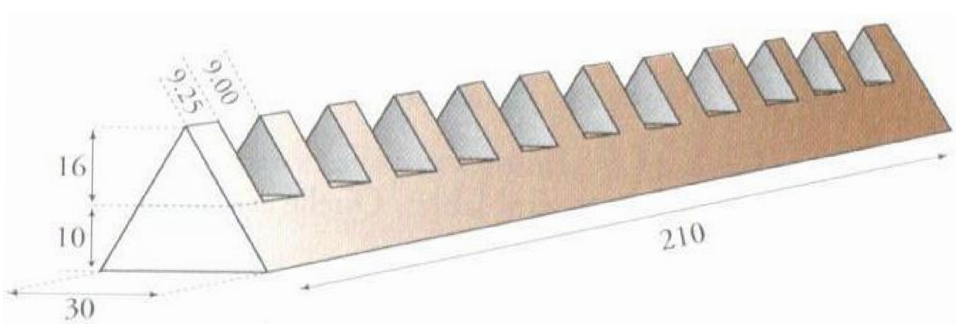
2. *Une boule de rayon r a pour volume*

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3.}$$

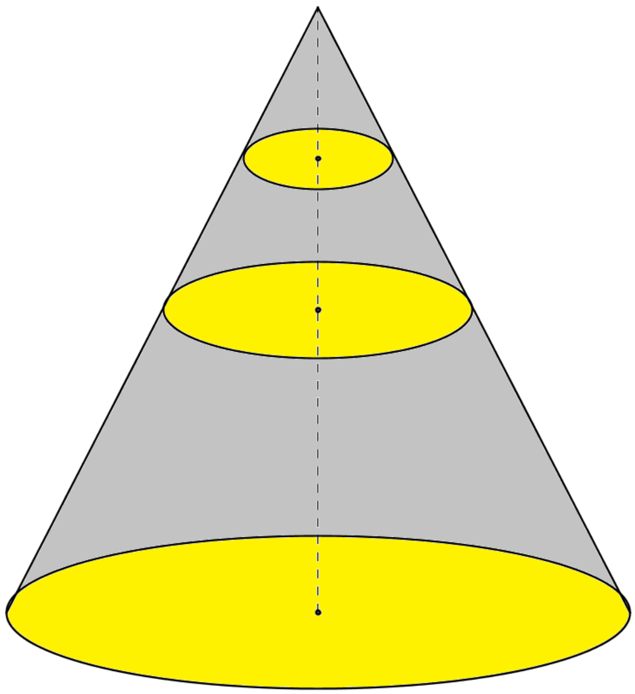
Exercice 1. Sur un cône de hauteur H et de rayon R, on dépose un cerceau de rayon r qui s'arrête à une heuteur h. Déterminer la valeur de h en fonction de H, r et R.



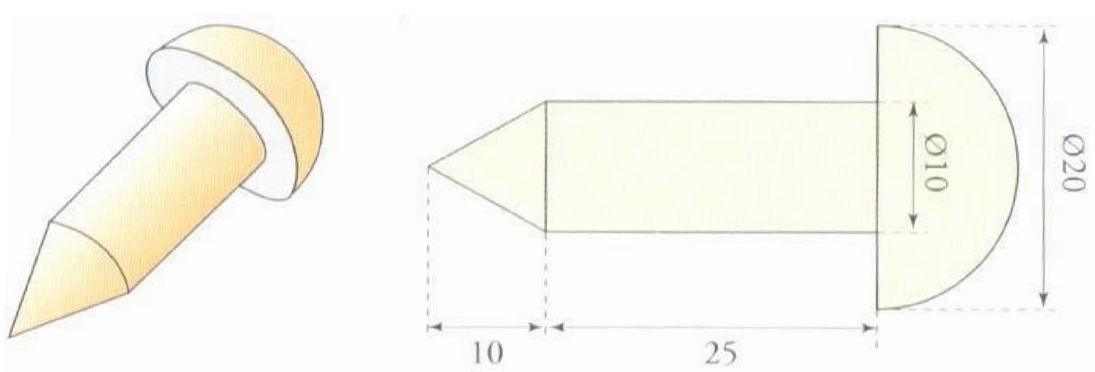
Exercice 2. Déterminer le volume du Toblerone ci-dessous. Les mesures sont exprimées en mm.



Exercice 3. Un cône droit a un volume de 128 dm^3. On le coupe parallèlement à sa base au milieu de la hauteur et ensuite on fait de même avec le cône restant. Quel est le volume des trois sections de cônes obtenues ?



Exercice 4. Déterminer le volume en mm^3 du rivet ci-dessous ?

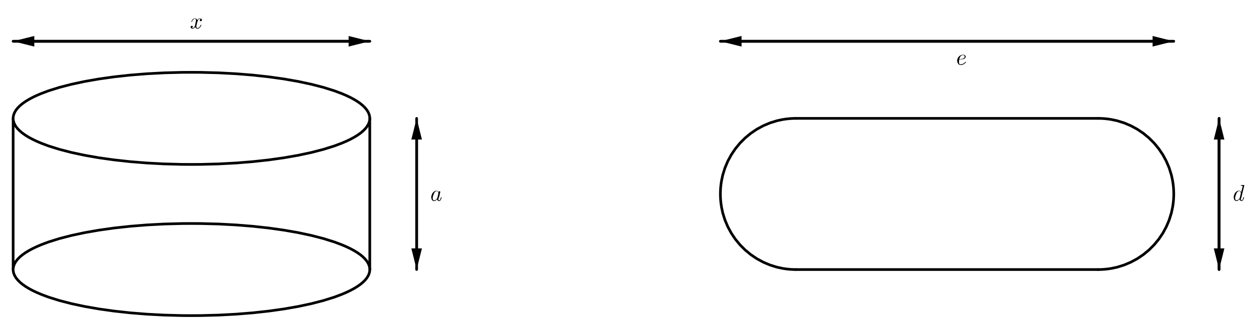


Exercice 5. Déterminer le volume et l'aire totale

a) d'un cylindre de rayon 8 et de hauteur 6 ;

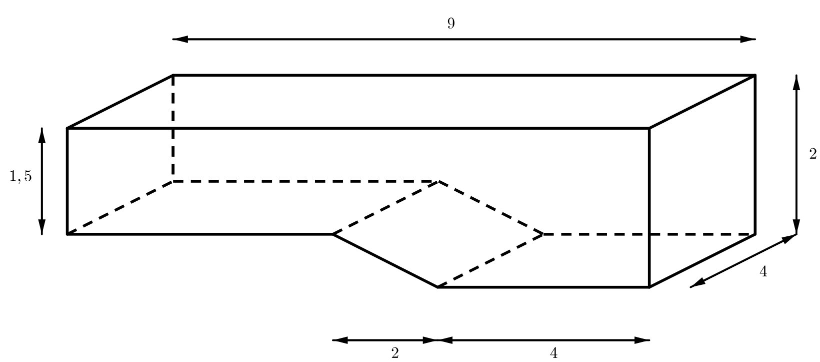
b) d'un cône de rayon 8 et de hauteur 6 ;

Exercice 6. Les deux médicaments ci-dessous ont le même volume. Exprimer x en fonction de a, e et d.

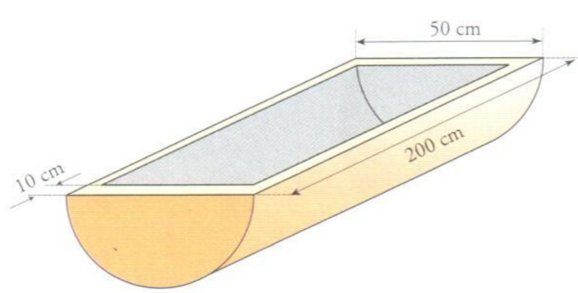


Exercice 7. On désire fabriquer un réservoir en forme de cylindre circulaire droit, ouvert au sommet et d'une capacité de 6000 litres. Le prix des matériaux pour le fond est de 250 francs le m^2 et pour la paroi de 200 francs de m^2. Quel est le prix total des matériaux en fonction du rayon r de la base du réservoir ?

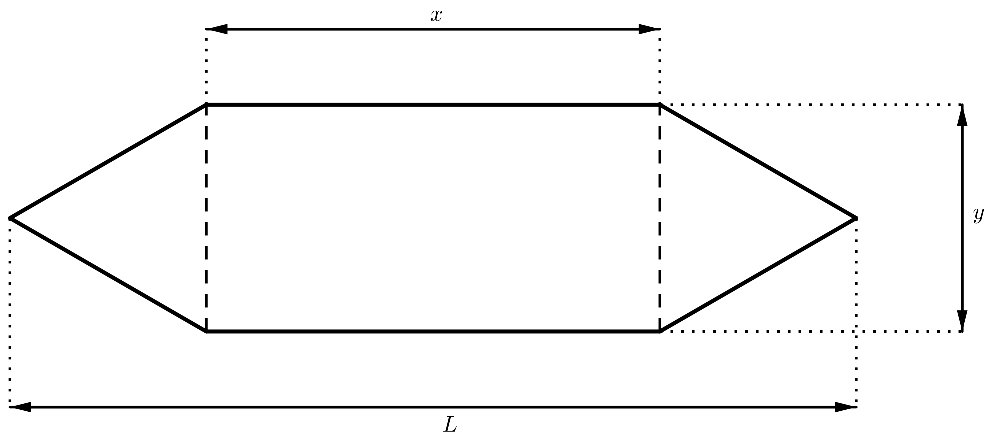
Exercice 8. Quel est le volume d'eau nécessaire au remplissage de cette piscine ?



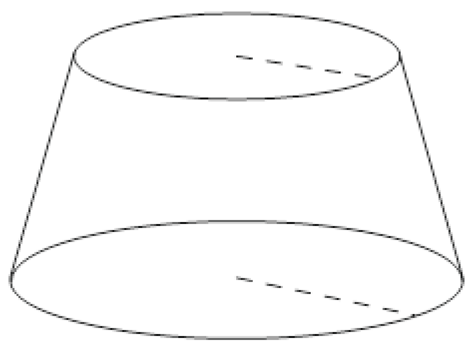
Exercice 9. Combien de litres peut contenir l'abreuvoir à vaches ci-dessous.



Exercice 10. Calculer la valeur de R pour que ce récipient cylindrique à fond hémisphérique contienne exactement 10 litres d'eau lorsqu'il est plein.



Exercice 11. Calculer le volume d'un tronc de cône droit (cône dont on a coupé la partie supérieure) de hauteur 5 cm, dont le diamètre de la grande base est 8 cm et le diamètre de la petite base est 6 cm.



3 Solutions

Exercice 1. $h = H - \frac{Hr}{R}$.

Exercice 2. $V \cong 67278,46$ mm^3.

Exercice 3. 16 dm^3 et 2 dm^3.

Exercice 4. $4319,69$ mm^3.

Exercice 5.

a) $V = 384\pi$ et $A = 224\pi$;

b) $V = 128\pi$ et $A = 144\pi$;

Exercice 6. $x = \sqrt{\dfrac{3ed^2 - d^3}{3a}}$.

Exercice 7. $250\pi r^2 + \dfrac{2400}{r}$.

Exercice 8. 64.

Exercice 9. Environ $63,617$ litres.

Exercice 10. $R = \sqrt[3]{\dfrac{30}{8\pi}} \cong 1,06$ dm.

Exercice 11. $V = \dfrac{185\pi}{3} \cong 193,73$ cm^3.

Table des matières