Mathématiques

Maturité professionnelle Economie et Services, type économie

Dagris Musitelli et Karim Saïd

Ecole Professionnelle commerciale

Année scolaire 2019-2020

Table des matières

Chapitre 1

Ensembles de nombres

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux *ensembles de nombres*. En effet, les nombres ne vérifient pas tous les mêmes propriétés. Il en existe plusieurs sortes que l'on regroupe dans des *ensembles*. Le but de ce chapitre sera donc de présenter les quatre principaux ensembles et de définir les opérations à l'intérieur de ceux-ci.

1.2 Nombres entiers naturels

1.2.1 Définition

Les *nombres naturels* sont historiquement les premiers dont l'Homme a eu besoin. Il s'agit des nombres entiers positifs, qui forment l'ensemble noté $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}.}$$

Remarque. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres naturels privé du 0.

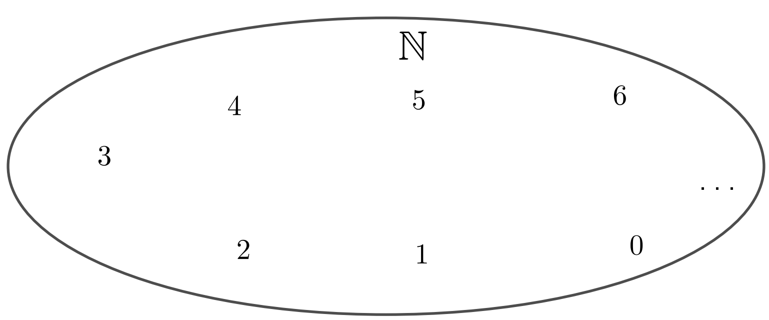


FIGURE 1.1 – Ensemble des nombres entiers naturels.

1.2.2 Priorité des opérations

Soit à calculer $3 + 5 \cdot 4$. Est-ce que cela donne 32 ou 23 ? En fait, cela donne 23. En effet, une expression arithmétique ne se lit pas de gauche à droite comme une phrase française. Les diverses opérations s'effectuent dans l'ordre suivant :

1. Contenu des parenthèses en commençant par celles de premier niveau (plus petite "poupée russe"), c'est-à-dire de l'intérieur vers l'extérieur.
2. Puissances et racines.
3. Multiplications et divisions.
4. Additions et soustractions.

Remarque. Les opérations de même priorité sont effectuées de gauche à droite.

Exemple. Pour calculer $2 + 3 \cdot [4 + 5 \cdot (6 - 2) - 7]$, on procède comme suit.

$$\begin{aligned}
& 2 + 3 \cdot [4 + 5 \cdot \underbrace{(6 - 2)} - 7] \\
= \ & 2 + 3 \cdot [4 + \underbrace{5 \cdot (4)} - 7] \\
= \ & 2 + 3 \cdot [\underbrace{4 + 20 - 7}] \\
= \ & 2 + \underbrace{3 \cdot [17]} \\
= \ & 2 + 51 \\
= \ & 53.
\end{aligned}$$

Division par 0

La division d'un nombre non nul par 0 est impossible.
Voyons en détail ce qui se passe lorsque l'on essaye de diviser de 5 par 0.
Supposons qu'il soit possible de diviser 5 par 0 et que la réponse soit égale à x.
Cette hypothèse s'écrit alors

$$\frac{5}{0} = x.$$

De manière équivalente, cette dernière égalité s'écrit également sous la forme

$$5 = 0 \cdot x = 0.$$

Ainsi, si la division d'un nombre non nul par 0 était possible, cela impliquerait que $5 = 0$, ce qui est *impossible*.

Quant à la division de 0 par 0, elle conduit à une *forme indéterminée*.
En effet, supposons que le quotient de 0 par 0 soit possible et donne x comme réponse.
Dans ce cas, on aurait

$$\frac{0}{0} = x.$$

Cette égalité s'écrit aussi sous la forme

$$0 \cdot x = 0.$$

Ainsi, il est impossible de répondre à la devinette suivante :
«Un nombre est multiplié par 0 ; le résultat donne 0. Quel est ce nombre ?».

En effet, n'importe quel nombre (réel) est solution de cette devinette. Ainsi, on dit que $\frac{0}{0}$ est *indéterminé*, car la division de 0 par 0 "pourrait donner n'importe quelle réponse".
En résumé

$$\boxed{5 \cdot 0 = 0, \qquad \frac{0}{5} = 0, \qquad \frac{5}{0} \text{ est impossible }, \qquad \frac{0}{0} \text{ est indéterminé.}}$$

Exercice 1.1. Calculer sans machine.

a) $60 + (7 - 6) - 4 \cdot 5$ b) $4 + 12 : 4 + 12$
c) $21 + 24 : 3 - 3 \cdot 3$ d) $1 + 19(7 - 8 : 4)$
e) $3 \cdot 4 + 5 \cdot 12 - 6 \cdot 2$ f) $150 - (100 + 50) : 5$
g) $\{100 - [50 - (40 - 9)]\} \cdot 2$ h) $(3 \cdot 4 + 5) \cdot 12 - 6 \cdot 2$

Exercice 1.2. Ajouter les parenthèses nécessaires.

a) $5 \cdot 18 + 4 = 110$ b) $5 + 3 \cdot 1 + 1 = 16$
c) $80 + 40 : 2 = 100$ d) $2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 24$
e) $9 - 9 \cdot 9 + 9 = 9$ f) $3 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 66$
g) $30 : 2 + 8 = 3$ h) $5 - 2 \cdot 9 - 7 = 20$
i) $100 - 1 \cdot 100 - 1 = 9899$ j) $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 - 3 = 36$

1.3 Nombres entiers relatifs

1.3.1 Définition

Pour des raisons évidentes, l'ensemble $\mathbb{N}$ ne suffit pas à représenter toutes les situations rencontrées dans la vie courante (par exemple des températures exprimées en degré Celsius, le numéro d'un étage situé au sous-sol d'un immeuble, ...). D'autre part, certaines opérations, comme la soustraction ne sont pas toujours définies dans $\mathbb{N}$. Par exemple, $2 - 5 = -3 \notin \mathbb{N}$. Il est donc nécessaire d'ajouter à $\mathbb{N}$ les *nombres entiers négatifs*. Pour préciser qu'une quantité donnée est inférieure à 0, on lui ajoute le signe "$-$". L'ensemble de tous les nombres entiers (positifs et négatifs) est noté $\mathbb{Z}$ et est appelé *ensemble des nombres entiers relatifs*.

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{...; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...\}.}$$

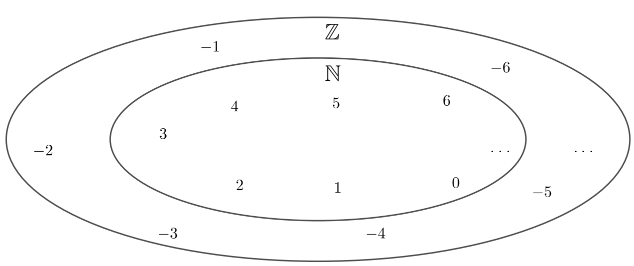


FIGURE 1.2 – Ensemble des nombres entiers relatifs.

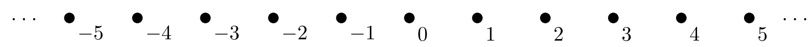


FIGURE 1.3 – Nombres entiers relatifs.

1.3.2 Règle des signes

Le produit de deux nombres entiers relatifs s'effectue en appliquant la *règle des signes* :

$$+ \cdot + = +$$
$$+ \cdot - = -$$
$$- \cdot + = -$$
$$- \cdot - = +$$

Remarque. La règle des signes peut se formuler à l'aide du moyen mnémotechnique ci-dessous.

1. Les amis (+) de mes amis (+) sont mes amis (+).
2. Les amis (+) de mes ennemis (−) sont mes ennemis (−).
3. Les ennemis (−) de mes amis (+) sont mes ennemis (−).
4. Les ennemis (−) de mes ennemis (−) sont mes amis (+).

Exemple.

1. $5 \cdot 3 = 15$.
2. $5 \cdot (-3) = -15$.
3. $(-5) \cdot 3 = -15$.
4. $(-5) \cdot (-3) = 15$.

Remarque. Le signe de la division de deux nombres entiers relatifs repose aussi sur la règle des signes.

Exemple.

1. $15 : 3 = 5$.
2. $15 : (-3) = -5$.
3. $(-15) : 3 = -5$.
4. $(-15) : (-3) = 5$.

Exercice 1.3. Calculer les expressions suivantes.

a) $(+5) \cdot (-7)$ b) $(+12) : (+4)$
c) $(-30) : (-10)$ d) $(+3) \cdot (-7) \cdot (+11)$
e) $(-8) - (-18) : (+3)$ f) $(+3) \cdot [(-7) + (+11)] : [(-2) - (-8)]$

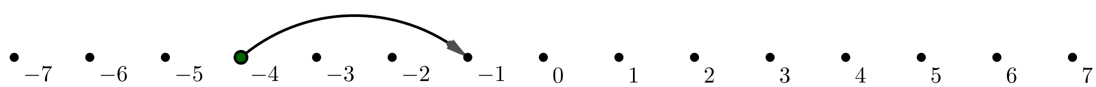
1.3.3 Somme et différence de deux nombres entiers relatifs

La somme de deux nombres entiers relatifs, s'effectue en raisonnant sur la droite numérique.

Exemple.

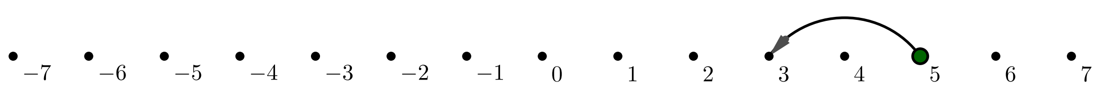
1. $-4+3=-1$

$(-4)+3$ consiste à se déplacer de 3 unités à droite depuis -4



2. $5+(-2)=5-2=3$

$5+(-2)$ consiste à se déplacer de 2 unités à gauche depuis 5



Exemple.

1. $5-2=3$.
2. $(-5)-2=-7$.
3. $5-(-2)=5+2=7$.
4. $(-5)-(-2)=-5+2=-3$.

Définition. On dit de deux nombres entiers relatifs qu'ils sont *opposés* si leur somme est nulle.

Exemple.

1. -9 est l'opposé de 9.
2. 11 est l'opposé de -11.

Exercice 1.4. Calculer les expressions suivantes.

a) $(-2)+(+15)$	b) $(+5)+(-4)$
c) $(+8)-(-8)$	d) $(-15)-(+25)-(-5)$
e) $(-7)-(+8)-(-4)$	f) $(-25)-(+36)-(+85)-(-100)$

Exercice 1.5. Calculer sans machine.

a) $((-3-3)-3)(-3-3-3)$	b) $-5(-3\cdot 7+3)$
c) $25-10:5+5-1\cdot 5\cdot 12-6\cdot 2$	d) $(-6+3\cdot 2):[4+2\cdot(-2)]$
e) $[-3-(-2)]:(-13-(-13))$	f) $\{[-1-(-2)]:(-1)\}\cdot(-2)$

Exercice 1.6. Calculer les expressions suivantes.

a) $(-3) - 5 \cdot (-2)$	b) $-5 \cdot (-2) - (-3) : (-1) - (-2)$
c) $-1 - [(-2) : (-1) + 2]$	d) $0 : [-5 - (-5)]$
e) $[-5 - (-5)] : 0$	f) $[-6 - (-3) \cdot (-4)] : \{[-7 - 8 : (-2)] \cdot (-6)\}$

Exercice 1.7. Réecrire les expressions ci-dessous pour $a = -1$, puis calculer.

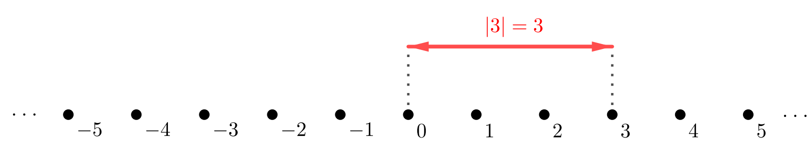
a) $2a + 3$	b) $(2a - 1) + 3$
c) $2a - 1 + 3$	d) $2(a - 1) + 3$
e) $2a - (1 + 3)$	f) $2[a - (a + 3)]$

1.3.4 Valeur absolue

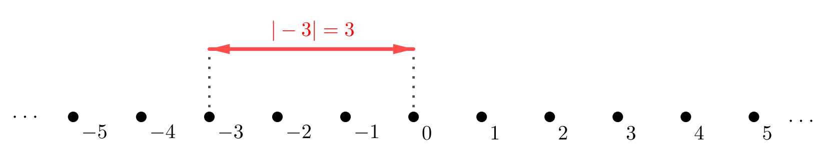
Définition. On appelle *valeur absolue* d'un nombre $a \in \mathbb{Z}$ la distance de a à 0 et on la note $|a|$.

Exemple.

1. $|3| = 3$.



2. $|-3| = 3$.



Des exemples ci-dessus, il en découle le théorème suivant.

Théorème. *Si $a \in \mathbb{Z}$, alors*

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & si \quad a > 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases} .}$$

Autrement dit, la valeur absolue d'un nombre entier relatif n'est rien d'autre que le nombre auquel on enlève le signe $-$.

Exercice 1.8. Réecrire le nombre en supprimant la valeur absolue et simplifier le résultat.

a) $\|-3-2\|$	b) $\|-5\|-\|2\|$
c) $\|7\|+\|-4\|$	d) $\|-11+1\|$
e) $\|6\|-\|-3\|$	f) $\|8\|+\|-9\|$
g) $(-5)\cdot\|3-6\|$	h) $\dfrac{\|-6\|}{-2}$
i) $\|-7\|+\|4\|$	j) $4\cdot\|6-7\|$
k) $\dfrac{6}{\|-2\|}$	l) $\|-1\|+\|-9\|$

1.4 Nombres rationnels

1.4.1 Définition

Définition. La division fait apparaitre trois nombres :

— Le nombre qui est divisé s'appelle le *dividende*.

— Le nombre qui divise s'appelle le *diviseur*.

— Le résultat de l'opération s'appelle le *quotient*.

Exemple. Losque l'on divise 18 par 6, on obtient 3.

— Le dividende est 18.

— Le diviseur est 6.

— Le quotient est 3.

Dès le moment où l'on désire comparer deux quantités, on a besoin d'établir des *rapports*, donc des *divisions*. Or, il apparaît bien vite qu'une division de deux nombres entiers n'en donne pas toujours un. $\mathbb{Z}$ ne contient donc pas tous les nombres. Par exemple, le quotient de 3 par 2 donne $1,5$. Quant au quotient de 1 par 3, il donne $0,\overline{3} = 0,3333....$ On admettra que tout nombre décimal (admettant un nombre fini de décimales ou dont le développement décimal est périodique) peut s'écrire sous forme de quotient de deux nombres entiers. Un nouvel ensemble qui regroupe tous les résultats de ces divisions est donc nécessaire. Il s'agit de l'ensemble des *nombres rationnels*, noté $\mathbb{Q}$.

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\} = \{\text{Nombres qui peuvent s'écrire comme rapport de deux nombres entiers}\}.}$$

Exemple.

1. $1,3$ est égal au quotient de 13 par 10.
2. $-0,\overline{45}$ est égal au quotient de 5 par 11.
3. -9 est égal au quotient de -9 par 1.

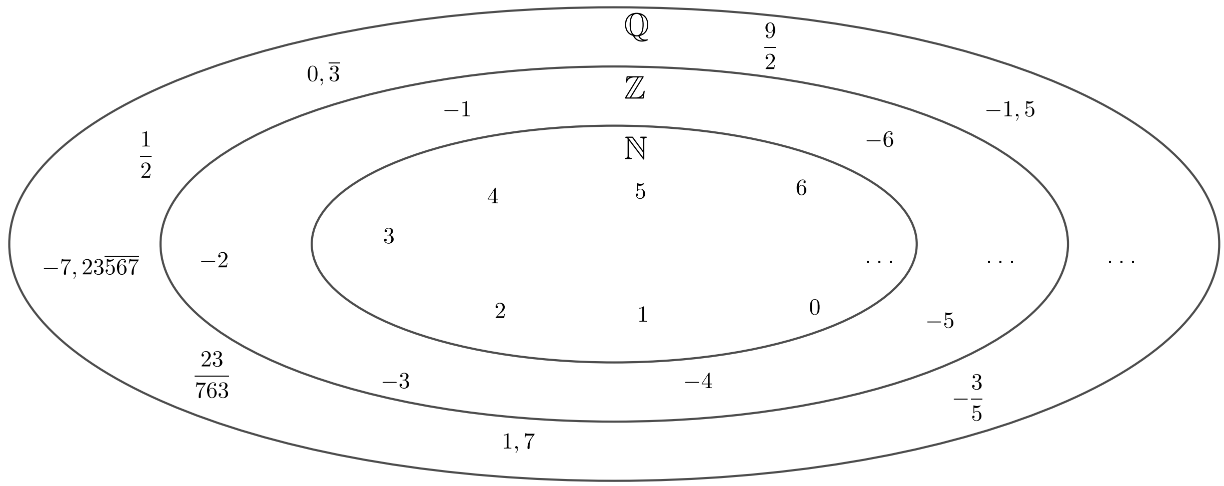


FIGURE 1.4 – Ensemble des nombres rationnels.

1.4.2 Notion de fraction

Définition. On appelle *fraction* tout rapport de deux nombres entiers a et b et on la note $\frac{a}{b}$. Le nombre a (situé en haut) est appelé *numérateur*, tandis que b (situé en bas) est le *dénominateur*.

Exemple.

1. Le nombre $\frac{3}{4}$ représente le quotient de 3 par 4 et peut également s'écrire $0,75$.
2. Le nombre 7 peut également d'écrire sous la forme $\frac{7}{1}$.
3. La fraction $\frac{1}{3}$ est égale au nombre $0,\overline{3}$.
4. La fraction $\frac{1}{7}$ est égale à $0,\overline{142857}$.

Remarque. Lorsque l'on effectue la division de 1 par 7 à l'aide d'une calculatrice, celle-ci affiche comme résultat "$0,142857142$". Il n'est dès lors pas aisé de deviner qu'il s'agit en réalité du nombre décimal périodique $0,\overline{142857}$. Il est donc faux d'écrire

$$\frac{1}{7} = 0,142857143,$$

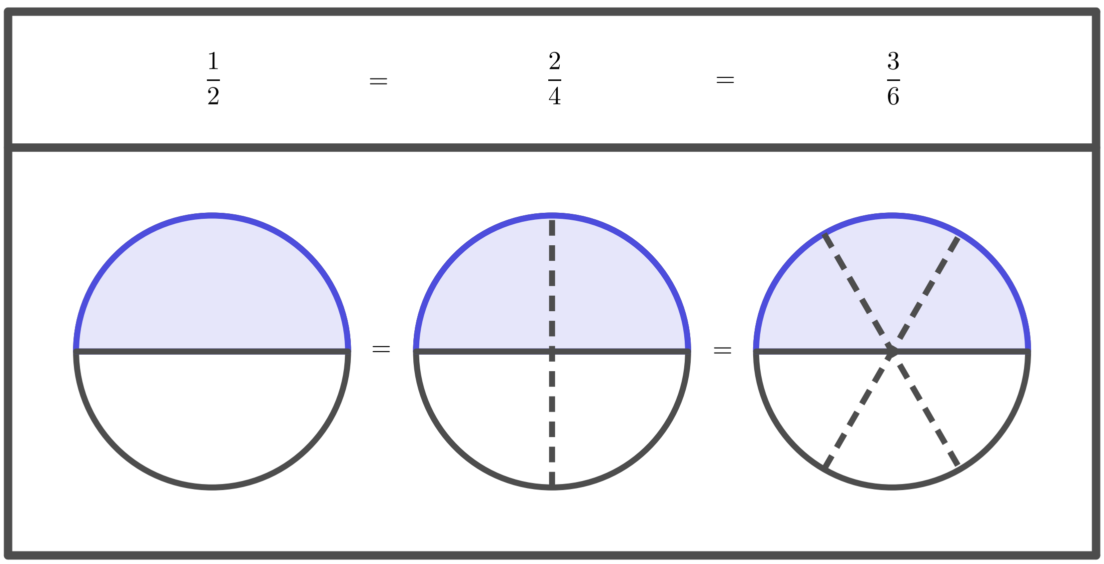
mais correct d'écrire

$$\frac{1}{7} \cong 0,142857143.$$

On préfèrera donc écrire un nombre rationnel en fraction que sous forme de nombre décimal, puisque ceux-ci conduisent fréquemment à des approximations, comme le montre l'exemple ci-dessus.

1.4.3 Amplification et simplification

La fraction $\frac{1}{2}$ représente le nombre décimal $0,5$. Une situation de la vie courante qui pourrait être représentée par cette même fraction est celle qui consiste à se servir d'une tranche parmi 2 d'un gâteau. Si ce gâteau avait été coupé en 4 tranches identiques, il eût fallu en prendre 2 pour que la quantité de gâteau consommée demeure identique. De même, cela revient à prendre 3 tranches parmi 6 identiques.



Autrement dit, si le nombre de tranches à disposition double, il en est alors de même pour le nombre de tranches qui seront dégustées. Plus généralement, si l'on multiplie par x (par exemple, on triple, quadruple, multiplie par 37, etc.) le nombre total de tranches à disposition, alors l'on se servira de x fois plus de tranches que dans le cas initial.

Mathématiquement, cette observation se traduit par le fait que les fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, ou encore $\frac{300}{400}$, sont égales. En effet, chacun de ces quotients donnent le nombre décimal $0,75$.

Définition.

1. *Amplifier* une fraction consiste à multiplier son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier.
2. *Simplifier* une fraction consiste à diviser son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier.
3. Une fraction est dite *irréductible* lorsqu'il n'est plus possible de la simplifier.

Remarque. Lorsque l'on amplifie ou simplifie une fraction on obtient une nouvelle fraction égale à celle de départ.

Exemple.

1. Amplifions $\frac{2}{7}$ par 3 :
$$\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}.$$
2. Simplifions $\frac{25}{35}$ par 5 :
$$\frac{25}{35} = \frac{25 : 5}{35 : 5} = \frac{5}{7}.$$
3. Simplifions $\frac{11}{22}$ au maximum :
$$\frac{11}{22} \overset{\text{par } 11}{=} \frac{1}{2}.$$
4. Simplifions $\frac{560}{700}$ au maximum :
$$\frac{560}{700} \overset{\text{par } 10}{=} \frac{56}{70} \overset{\text{par } 7}{=} \frac{8}{10} \overset{\text{par } 2}{=} \frac{4}{5}.$$

Exercice 1.9. Amplifier les fractions ci-dessous de la manière indiquée.

a) $\frac{7}{5} = \frac{}{25}$	b) $\frac{16}{18} = \frac{64}{}$
c) $\frac{8}{20} = \frac{}{100}$	d) $\frac{3}{14} = \frac{}{42}$
e) $\frac{24}{11} = \frac{}{121}$	f) $\frac{4}{8} = \frac{}{10}$
g) $\frac{30}{24} = \frac{}{32}$	h) $\frac{27}{63} = \frac{}{77}$
i) $\frac{27}{36} = \frac{}{28}$	j) $\frac{21}{15} = \frac{}{25}$

Exercice 1.10. Simplifier les fractions ci-dessous au maximum.

a) $\frac{42}{39}$	b) $\frac{15}{20}$
c) $\frac{12}{16}$	d) $\frac{22}{28}$
e) $\frac{25}{15}$	f) $\frac{27}{21}$
g) $\frac{40}{45}$	h) $\frac{14}{6}$
i) $\frac{18}{24}$	j) $\frac{1210}{330}$
k) $\frac{35}{56}$	l) $\frac{13}{169}$
m) $\frac{15}{25}$	n) $\frac{640}{48}$
o) $\frac{96}{900}$	p) $\frac{36}{90}$
q) $\frac{96}{360}$	r) $\frac{608}{432}$
s) $\frac{40}{384}$	t) $\frac{768}{64}$

Exercice 1.11. Dans chacun des cas suivants, déterminer laquelle des deux fractions est la plus grande, après les avoir mises au même dénominateur.

a) $\dfrac{5}{8}$ et $\dfrac{6}{19}$ b) $\dfrac{7}{15}$ et $\dfrac{5}{12}$

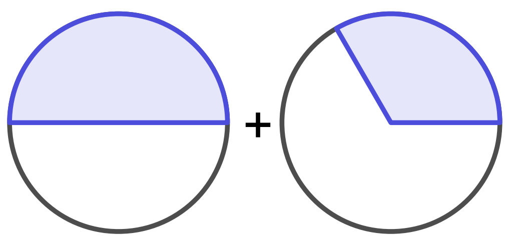
c) $\dfrac{9}{20}$ et $\dfrac{11}{18}$ d) $\dfrac{11}{36}$ et $\dfrac{9}{32}$

1.4.4 Addition et soustraction

La somme et la différence de deux fractions peut être illustrée par l'exemple ci-dessous.

Exemple.

Soit à calculer $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$.



Ces deux "tranches" n'étant pas de tailles identiques, il n'est pas commode de les additionner. Par analogie, on pourrait se demander ce que vaut 1 franc + 2 euros. Pour palier à ce problème, il convient d'amplifier les fractions pour les mettre au *même dénominateur*, comme le montre la figure ci-dessous.

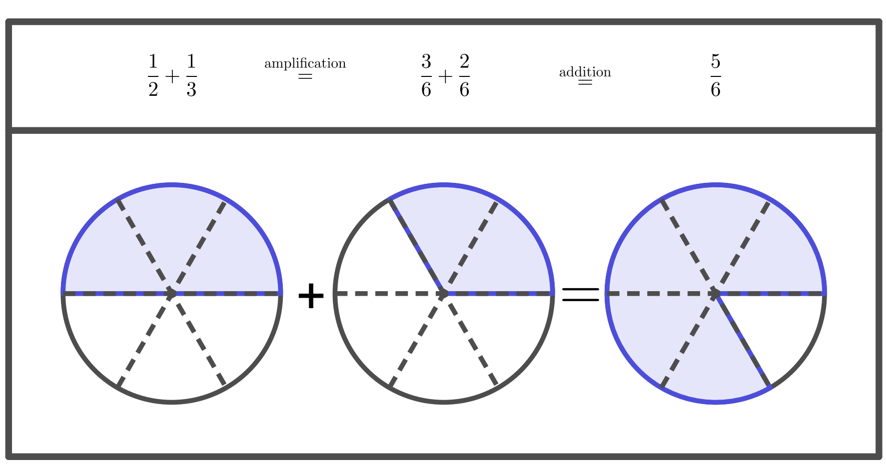


FIGURE 1.5 – Somme de deux fractions.

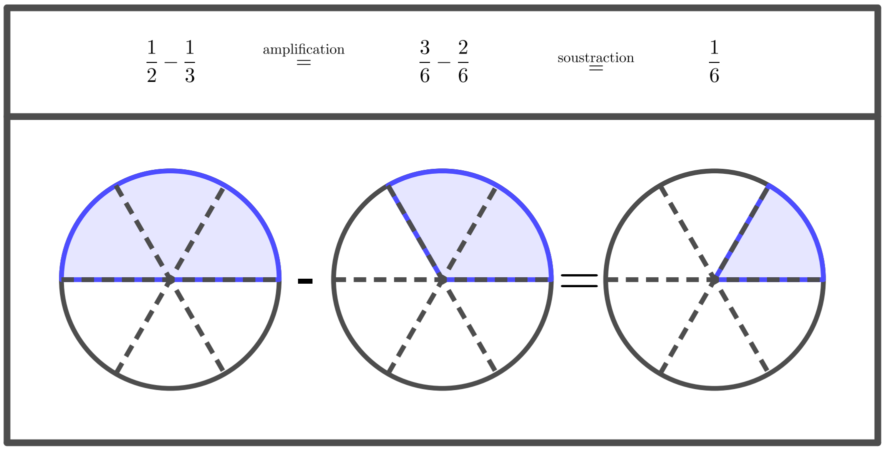


FIGURE 1.6 – Différence de deux fractions.

Cas général : Comme le montrent les exemples ci-dessus, pour additionner deux fractions, il convient dans un premier temps de les mettre au **même dénominateur** (qui sera un multiple de chacun des dénominateurs des fractions de départ), puis d'additionner uniquement les numérateurs et de simplifier au maximum la fraction obtenue le cas échéant.

Par convention, on écrira toujours le résultat sous forme de fraction irréductible ou de nombre entier.

Exemple.

1. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{9+8}{12}=\frac{17}{12}$.
2. $\frac{1}{15}+\frac{1}{10}-\frac{5}{6}=\frac{2}{30}+\frac{3}{30}-\frac{25}{30}=\frac{2+3-25}{30}=\frac{-20}{30}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$.

Remarque. La fraction $\frac{-1}{2}$ représente le nombre décimal $-0,5$. Il en est de même pour la fraction $\frac{1}{-2}$. Ces deux fractions étant identiques, il est d'usage de l'écrire sous la forme $-\frac{1}{2}$. Autrement dit, on a

$$-0,5=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

Remarque. Soit à calculer

$$\frac{5}{36}+\frac{7}{54}.$$

Pour mettre les deux fractions au même dénominateur, deux alternatives sont envisageables :

1. **Multiplier 36 par 54 pour obtenir un dénominateur commun**
   On a
   $$\frac{5}{36}+\frac{7}{54}=\frac{270}{1944}+\frac{252}{1944}=\frac{522}{1944}\overset{\text{par } 18}{=}\frac{29}{108}.$$
2. **Déterminer le plus petit multiple commun de 36 et 54**
   On a
   $$\frac{5}{36}+\frac{7}{54}=\frac{15}{108}+\frac{14}{108}=\frac{29}{108}.$$

Exercice 1.12. Calculer les expressions ci-dessous et simplifier si il y a lieu.

a) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{6}-\dfrac{7}{6}$

c) $\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$

e) $\dfrac{4}{20}+\dfrac{27}{15}$

f) $\dfrac{3}{25}+\dfrac{25}{3}$

g) $\dfrac{2}{21}+\dfrac{7}{4}$

h) $\dfrac{9}{10}-\dfrac{8}{45}$

i) $\dfrac{11}{4}+\dfrac{-2}{3}$

j) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{12}{-15}$

k) $\dfrac{12}{42}+\dfrac{15}{6}$

l) $\dfrac{5}{6}+\left(-\dfrac{4}{5}\right)-\left(-\dfrac{2}{15}\right)$

m) $\dfrac{7}{5}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{13}{20}+1$

n) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{16}+\dfrac{5}{32}$

o) $\dfrac{9}{20}+\dfrac{37}{50}+\dfrac{63}{10}+\dfrac{3}{25}$

p) $\dfrac{5}{12}+\dfrac{7}{18}+\dfrac{8}{3}+\dfrac{13}{36}$

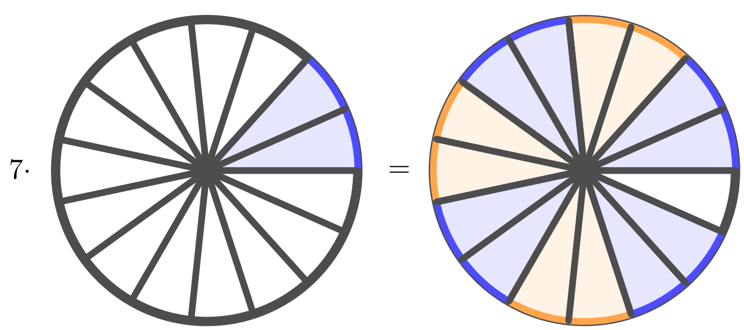
1.4.5 Multiplication et division

Produit de deux fractions

Le produit de deux fractions peut être illustré par les deux exemples ci-dessous.

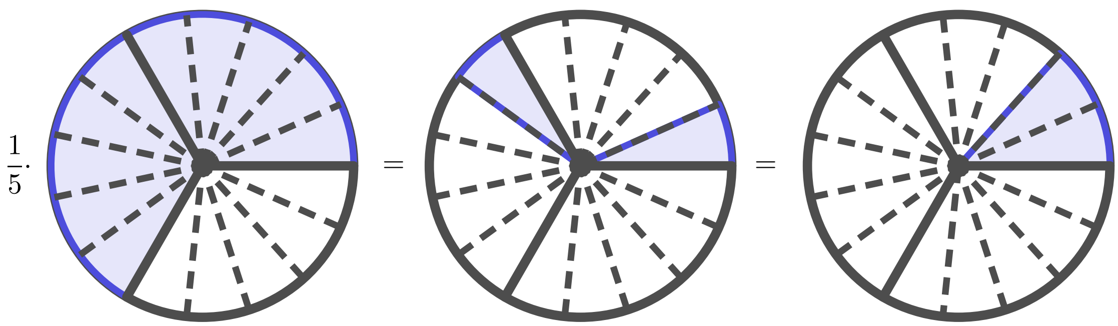
Exemple.

$$7\cdot\frac{2}{15}=\frac{7\cdot 2}{15}=\frac{14}{15}$$



Exemple.

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5\cdot 3}=\frac{2}{15}$$



Les exemples ci-dessus montrent que le produit de deux fractions s'effectue en multipliant les numérateurs entre eux et en faisant de même avec les dénominateurs.

Autrement dit, on a

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.}$$

Remarque. Il est préférable de simplifier au maximum avant d'effectuer le produit.

Exemple.

1. $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 4}=\frac{15}{28}$.
2. $\frac{{}^{1}\cancel{10}}{{}^{3}\cancel{21}}\cdot\frac{{}^{1}\cancel{7}}{{}^{5}\cancel{50}}=\frac{1\cdot 1}{3\cdot 5}=\frac{1}{15}$.

Exercice 1.13. Calculer et simplifier si nécessaire.

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{3}$

b) $\frac{1}{8}\cdot\frac{6}{16}$

c) $\frac{9}{3}\cdot 25$

d) $\frac{40}{42}\cdot\frac{21}{56}$

e) $\frac{21}{54}\cdot\frac{27}{28}$

f) $\frac{35}{21}\cdot\frac{7}{20}$

g) $18\cdot\frac{4}{72}$

h) $\frac{1}{7}\cdot\frac{14}{9}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{4}$

i) $\frac{14}{19}\cdot\frac{19}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot 0$

j) $\frac{3}{4}\cdot 13\cdot\frac{12}{9}\cdot\frac{41}{41}\cdot\frac{1}{39}$

k) $\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot 2$

l) $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot(-2)$

m) $-5\cdot\frac{4}{7}$

n) $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{7}{12}\right)$

Quotient de deux fractions

Théorème. *Diviser une fraction par* $\frac{b}{a}$ *revient à la multiplier par son inverse* $\frac{a}{b}$.

Exemple.

1. $2 : \frac{5}{11} = 2 \cdot \frac{11}{5} = \frac{22}{5}$.
2. $\frac{4}{3} : 2 = \frac{{}^{2}\cancel{4}}{3} \cdot \frac{1}{{}^{1}\cancel{2}} = \frac{2}{3}$.
3. $5 : \frac{3}{2} = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.
4. $\frac{1}{5} : \frac{2}{7} : \frac{8}{5} = \frac{1}{{}^{1}\cancel{5}} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{5}}{8} = \frac{7}{16}$.
5. $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} : \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3} - \left(\frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}^{1}\cancel{3}} \cdot \frac{{}^{5}\cancel{15}}{{}^{2}\cancel{4}}\right) + \frac{1}{15} = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + \frac{1}{15} = \frac{10}{30} - \frac{75}{30} + \frac{2}{30} = \frac{-63}{30} = -\frac{21}{10}$.

Exercice 1.14. Effectuer les opérations ci-dessous.

a) $\frac{1}{2} : 2$

b) $\frac{4}{5} : \frac{2}{10}$

c) $18 : \frac{6}{17}$

d) $\frac{4}{7} : \frac{3}{11}$

e) $\frac{2}{5} : \frac{8}{25}$

f) $\frac{20}{3} : \left(\frac{7}{4} : \frac{14}{3}\right)$

g) $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{9}}$

h) $\frac{\frac{24}{5}}{64}$

i) $\frac{24}{\frac{5}{4}}$

j) $\frac{25}{60} : \frac{24}{800} : \frac{75}{54}$

k) $-\frac{65}{-121} : \frac{-150}{48} : \frac{-13}{50} \cdot \frac{3}{2}$

l) $\frac{4}{-9} : \left(\frac{2}{-3} : \frac{-40}{-36}\right)$

Exercice 1.15. Calculer et simplifier s'il y a lieu.

a) $\frac{22}{13} \cdot \frac{32}{11} : \frac{17}{26}$

b) $\left(\frac{11}{5} - \frac{3}{20}\right) - \left(\frac{9}{10} - \frac{11}{15}\right)$

c) $\dfrac{\frac{6}{2} + \frac{4}{3}}{3 - \frac{8}{3}}$

d) $\left(\frac{12}{13} : 5\right)\left(\frac{2}{3} - 4\right)$

e) $12 - 2\left(-\frac{3}{8} + \frac{4}{5}\right) \cdot 4$

f) $\frac{7}{12} \cdot \frac{5}{14} + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7}$

g) $\frac{7}{4} \cdot 2 + \frac{8}{15} : 4$

h) $\frac{1}{2} - \left\{\frac{1}{3} - \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)\right]\right\}$

Exercice 1.16.

a) Un test porte sur 30 points. André a obtenu 3/5 des points. Combien de points a-t-il obtienu ?

b) Une classe comporte 32 élèves. Parmi eux, 3/8 viennent à l'école en bus. Combien d'élèves est-ce que cela représente ?

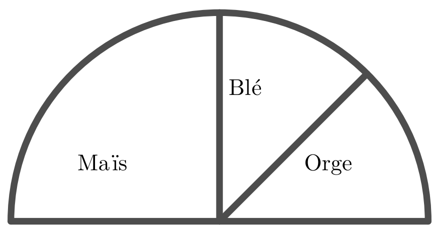
c) Dans une rue, se trouvent 20 maisons et le 3/4 d'entre elles ont la television par satellite. Combien de maisons est-ce que cela représente ?

d) Dans ce diagramme semi-circulaire, nous voyons la repartition des plantes cultivées par M. Eugene sur 140 hectares. Combien d'hectares sont occupés par :

   a) Du maïs ?

   b) Du blé ?

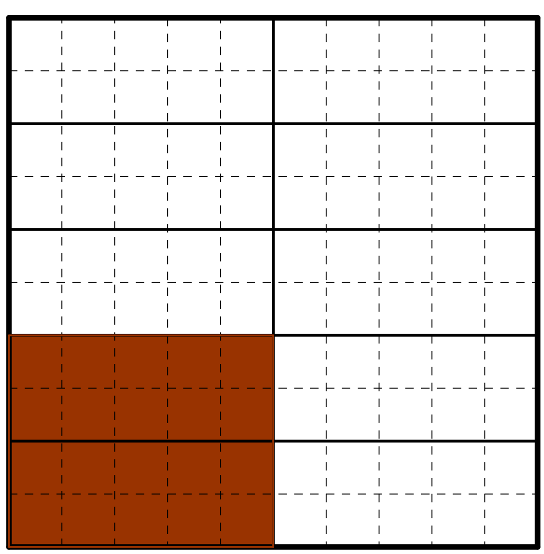
   c) De l'orge ?



1.4.6 Pourcentages

Définition. Un *pourcentage* est une manière d'exprimer un rapport à l'aide d'une fraction de dénominateur 100. Généralement, ce nombre est suivi du symbole %.

Exemple. La fraction $\frac{2}{10}$ est égale à $\frac{20}{100} = 20\% = 0,2$.



Calculer un pourcentage

Exemple. 56 personnes parmi 400 ont les yeux bleus.

Cette proportion s'exprime à l'aide de la fraction $\frac{56}{400}$.

Comme

$$\frac{56}{400} = \frac{14}{100},$$

cela signifie que 14% des 400 personnes ont les yeux bleus.

Appliquer un pourcentage

Exemple.

1. Si une assemblée de 120 personnes compte 15% de femmes, alors il y a 18 femmes dans cette assemblée. En effet, par la règle de trois, on a

$$\begin{array}{ccc} 120 & \to & 100\% \\ x & \to & 15\% \end{array}$$

et donc

$$120 \cdot 15\% = 120 \cdot \frac{15}{100} = 18.$$

2. Dans une assemblée il y a 36 femmes, elles représentent 30% de l'assemblée. Par conséquent, l'assemblée est formée de 120 individus En effet, par la règle de trois, on a

$$\begin{array}{ccc} 36 & \to & 30\% \\ x & \to & 100\% \end{array}$$

et donc

$$\frac{36}{30\%} = 36 \cdot \frac{100}{30} = 120.$$

Exercice 1.17. Calculer

a) 18% de 350.

b) 32% de 500.

c) $20,6\%$ de 1200.

Exercice 1.18.

a) Le prix initial d'un téléphone portable est de 205 francs. Après une réduction, il est vendu à 161,95 francs. Quel était le pourcentage de la remise accordée par le commerçant ?

b) Steve a payé son garagiste 202,50 francs après une réduction de 17%. Quel était le prix avant la reduction ?

c) Un commerçant offre un rabais de 15% sur tous les articles de son magasin. Combien paieriez-vous pour un téléviseur affiché à 1'564 francs ?

d) Après une augmentation de 12%, un article est vendu 1 377,50 francs. Quel était le prix de l'article avant l'augmentation ?

e) Le prix d'une voiture (qui est de 34'500 francs) est diminué de 7%, puis ensuite encore de 4%. Quel est le nouveau prix de la voiture ?

f) Un libraire vend un livre de mathématiques au prix de 41 francs, taxes incluses. Si le libraire bénéficie d'une réduction de 35% sur le livre de mathématiques de l'éditeur, à quel prix (taxes non incluses) l'éditeur vend-il le livre de mathématiques au libraire, si le taux de TVA actuel est de $2,5\%$?

Exercice 1.19. Un ordinateur est soldé pour 1615 francs. Quel était son prix initial sachant que le rabais accordé représente le 15% du prix initial ?

Exercice 1.20. Lors d'une liquidation, un grand magasin fait sur certains articles un premier rabais de 50%, puis un rabais supplémentaire de 20% sur le prix baissé. Quel est le prix payé pour un article affiché initialement à 50 francs ? Quel est en % le rabais total accordé ?

Exercice 1.21. Sur une voiture de 20'000 francs, est-il préférable de choisir

— une réduction de 10% ?

— une réduction de 6% suivie d'une réduction de 10% ?

— une réduction de 8% suivie d'une réduction de 8% ?

— une réduction de 16% ?

1.5 Nombres réels

1.5.1 Définition

Enfin, il y a des nombres qui ne peuvent pas être écrits sous forme de fraction. Ce sont les *nombres irrationnels*. Découverts par les Grecs (qui ont eu de la peine à en accepter l'existence), ils apparaissent par exemple lorsqu'on étudie la longueur des côtés d'un triangle ou le périmètre d'un cercle. Réunis avec les nombres rationnels, ils forment l'ensemble des *nombres réels*.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \left\{ \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt[3]{4}; \pi; e; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; ... \right\}.$$

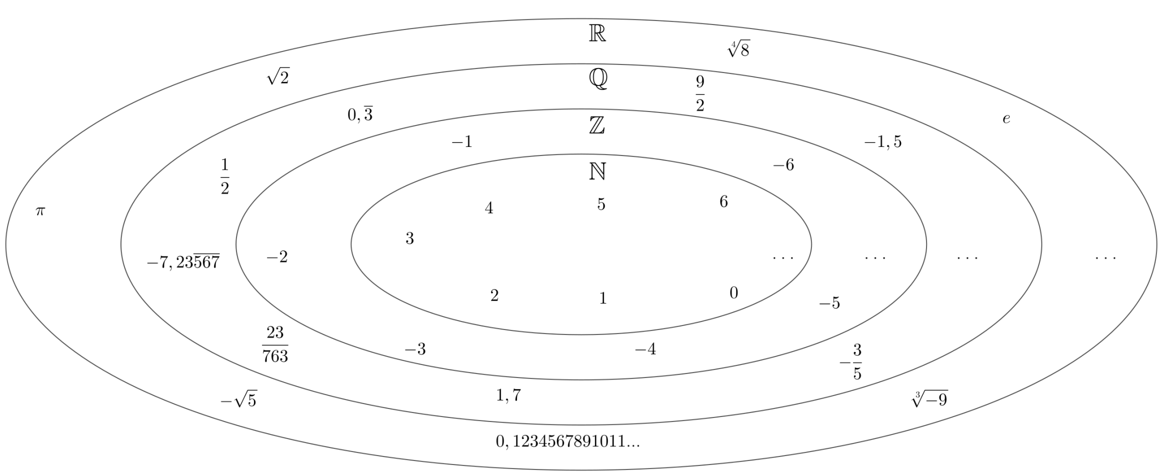


FIGURE 1.7 – Ensemble des nombres réels.

On a les inclusions d'ensembles suivantes :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.}$$

Exercice 1.22. Cocher les ensembles dont appartiennent les nombres ci-dessous.

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-5,63$				
$9,\overline{2}$				
2π				
$-\dfrac{15}{3}$				
$\sqrt{2}$				
$\sqrt{9}$				

Exercice 1.23. Déterminer si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses.

a) $-300 \in \mathbb{R}$

b) $\dfrac{20}{4} \notin \mathbb{N}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{Q}$

d) $-\dfrac{13}{7} \notin \mathbb{Z}$

e) $-3,57 \in \mathbb{Z}$

f) $5 \notin \mathbb{R}$

Exercice 1.24. Représenter les quatre ensembles de nombres principaux dans un diagramme de Venn, puis placer les nombres suivants dans la zone correcte de ce diagramme.

a) $\sqrt{36}$

b) $-12,47$

c) $\dfrac{3}{4}$

d) π

e) $2,3 \cdot 10^{10}$

f) $-1'000'000$

g) $\sqrt{2}$

h) $5,12\overline{34}$

i) $-\dfrac{15}{3}$

j) $0,00000345$

1.6 Puissances et racines

1.6.1 Définition

Définition. *La puissance entière positive* d'un nombre a est définie par $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$. On lit *$a$ puissance n* où $n \in \mathbb{N}$. De plus, on appelle *a la base* et *n l'exposant*.

Exemple.

$$\begin{array}{lrcl} a^1 = a, & 3^1 & = & 3. \\ a^2 = a \cdot a, & (-2)^2 & = & (-2) \cdot (-2) = 4. \\ a^3 = a \cdot a \cdot a, & \left(\frac{2}{5}\right)^3 & = & \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}. \end{array}$$

Exercice 1.25. Effectuer sans calculatrice.

a)	$(-2)^3 =$	$-2^3 =$	$-(-2)^3 =$
b)	$(-2)^4 =$	$-2^4 =$	$-(-2)^4 =$
c)	$3^3 =$	$-3^3 =$	$-(3)^3 =$
d)	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$
e)	$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 =$	$-\left(\frac{3}{2}\right)^2 =$	$\left(-\frac{3}{2}\right)^3 =$

1.6.2 Propriétés des puissances

Théorème. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$, alors*

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
3. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Preuve. Nous nous contenterons de donner l'idée de la preuve dans le cas particulier où $a = 4$, $b = 7$, $m = 5$ et $n = 3$.

1. $4^5 \cdot 4^3 = (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) = 4^8 = 4^{5+3}$.
2. $\dfrac{4^5}{4^3} = \dfrac{{}^1\cancel{4} \cdot {}^1\cancel{4} \cdot {}^1\cancel{4} \cdot 4 \cdot 4}{{}^1\cancel{4} \cdot {}^1\cancel{4} \cdot {}^1\cancel{4}} = 4^2 = 4^{5-3}$.
3. $\left(\dfrac{4}{7}\right)^3 = \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{4 \cdot 4 \cdot 4}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \dfrac{4^3}{7^3}$.
4. $(4 \cdot 7)^3 = (4 \cdot 7) \cdot (4 \cdot 7) \cdot (4 \cdot 7) = (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 4^3 \cdot 7^3$.
5. $(4^3)^5 = 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 = 4^{3+3+3+3+3} = 4^{5 \cdot 3}$.

$\square$

Exercice 1.26. Sans calculatrice, réduire les expressions ci-dessous au maximum. On demande un résultat sous forme de puissance.

a) $5 \cdot 5^4 \cdot 5^2$ b) $(-2)^3 \cdot (-3)^3 \cdot (-1)^{1234567}$

c) $\dfrac{(-8)^{10}}{(-8)^8}$ d) $(-2^4)^3$

e) $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)^3$ f) $-2,5 \cdot (-2,5) \cdot (-2,5) \cdot (-2,5)$

g) $2^3 \cdot 2^6 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)^5$ h) $(2^4)^2 \cdot 2^3$

i) $6^9 : (6^2 \cdot 6^3)$ j) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 : \left(\dfrac{2}{3}\right)^5$

Exercice 1.27. Trouver, si elle existe, la (ou les) valeur(s) de x qui vérifie(nt) les égalités suivantes.

a) $2^3 \cdot 2^x = 2^5$ b) $-x^2 = -25$

c) $(-2)^x = 8$ d) $6^3 \cdot 6^x = 6^3$

e) $7^5 : 7^x = 7^2$ f) $x^3 : x^1 = 16$

1.6.3 Puissances nulles et entières négatives

Théorème. *Si $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, alors*

1. $a^0 = 1$.
2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Preuve. L'idée consiste à calculer $\dfrac{a^n}{a^n}$, respectivement $\dfrac{a^0}{a^n}$ de deux manières différentes :

1. $$\frac{a^n}{a^n} = \begin{cases} a^{n-n} & = \quad a^0 \\ 1 & \end{cases}.$$
2. $$\frac{a^0}{a^n} = \begin{cases} a^{0-n} & = \quad a^{-n} \\ \dfrac{1}{a^n} & \end{cases}.$$

□

Remarque. Ces propriétés s'illustrent bien dans le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{rcl} a^3 & = & a \cdot a \cdot a \\ a^2 & = & a \cdot a \\ a^1 & = & a \\ a^0 & = & 1 \\ a^{-1} & = & \frac{1}{a} \\ a^{-2} & = & \frac{1}{a^2} \\ a^{-3} & = & \frac{1}{a^3} \end{array}$$

On remarque que pour aller à la ligne inférieure, on diminue l'exposant de 1 (à gauche de l'égalité) et que l'on divise par a (à droite de l'égalité).

Exemple.

1. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.
2. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.
3. $5^{-1} = \frac{1}{5}$.
4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 : \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Exercice 1.28. Effectuer sans calculatrice. On demande une solution sous forme d'entier ou de fraction irréductible.

a)	2^{-2}	$(-2)^{-2}$	-2^{-2}
b)	3^0	3^{-1}	-3^{-2}
c)	-5^0	-5^{-1}	$(-5)^{-1}$

Exercice 1.29. Effectuer sans calculatrice. On demande une solution sous forme d'entier ou de fraction irréductible.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$

1.6.4 Racines

Définition

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *racine n-ième* de a, noté $\sqrt[n]{a}$, l'unique nombre r positif tel que $r^n = a$. En d'autres termes :

$$\boxed{r = \sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow r^n = a \text{ et } r \geq 0.}$$

Le nombre a s'appelle le *radicande*, le nombre n s'appelle l'indice et $\sqrt[n]{}$ s'appelle le *radical*.

Autrement dit, chercher la racine n-ième de a revient à se demander quel nombre puissance n donne a.

Exemple.

1. $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$.
2. $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}_-^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si $a < 0$ et n impair, on définit la racine n-ième par

$$\boxed{r = \sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow r^n = a.}$$

— Si $a < 0$ et n pair, la racine n-ième de a n'est pas définie.

Exemple.

1. $\sqrt{-9}$ n'existe pas. En effet, tout nombre au carré est positif.
2. $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$.

Théorème. *Soient a et b deux nombres réels strictement positifs, m, n et q des entiers strictement positifs et p un entier quelconque. On a*

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$.
3. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
5. $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$.
6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.
7. $\sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p}} = \sqrt[q]{a^p}$.
8. $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.
9. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Exemple.

1. $(\sqrt{5})^2 = 5$.
2. $\sqrt[3]{5^3} = 5$.
3. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27}$.
4. $\sqrt{\dfrac{7}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}$.
5. $(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$.
6. $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$.
7. $\sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$.
8. $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.
9. $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$.

Exercice 1.30. Calculer.

a) $\sqrt{0}$	b) $\sqrt{625}$
c) $\sqrt[3]{1000}$	d) $\sqrt[4]{-625}$
e) $\sqrt[3]{343}$	f) $\sqrt[5]{-32}$
g) $\sqrt[3]{216}$	h) $\sqrt[4]{2401}$
i) $\sqrt[3]{-64}$	j) $\sqrt[3]{729}$

1.7 Solutions

Exercice 1.1.

a) 41 b) 19
c) 20 d) 96
e) 60 f) 120
g) 162 h) 192

Exercice 1.2.

a) $5 \cdot (18+4) = 110$ b) $(5+3) \cdot (1+1) = 16$
c) $80 + 40 : 2 = 100$ d) $(2+2) \cdot (2+2 \cdot 2) = 24$
e) $(9-9) \cdot 9 + 9 = 9$ f) $(3 \cdot 2 + 5) \cdot 6 = 66$
g) $30 : (2+8) = 3$ h) $(5-2) \cdot 9 - 7 = 20$
i) $(100-1) \cdot 100 - 1 = 9899$ j) $3 \cdot (3 + 3 \cdot 3) + 3 - 3 = 36$ ou $(3 \cdot 3 + 3) \cdot 3 + 3 - 3$

Exercice 1.3.

a) -35 b) 3
c) 3 d) -231
e) -2 f) 2

Exercice 1.4.

a) 13 b) 1
c) 16 d) -35
e) -11 f) -46

Exercice 1.5.

a) 81 b) 90
c) -44 d) Indéterminé
e) Impossible f) 2

Exercice 1.6.

a) 7 b) 9
c) -5 d) Indéterminé
e) Indéterminé f) -1

Exercice 1.7.

a) 1 b) 0
c) 0 d) -1
e) -6 f) -6

Exercice 1.8.

a) 5 b) 3
c) 11 d) 10
e) 3 f) 17
g) -15 h) -3
i) 11 j) 4
k) 3 l) 10

Exercice 1.9.

a) $\frac{7}{5} = \frac{35}{25}$ b) $\frac{16}{18} = \frac{64}{72}$
c) $\frac{8}{20} = \frac{40}{100}$ d) $\frac{3}{14} = \frac{9}{42}$
e) $\frac{24}{11} = \frac{264}{121}$ f) $\frac{4}{8} = \frac{5}{10}$
g) $\frac{30}{24} = \frac{40}{32}$ h) $\frac{27}{63} = \frac{33}{77}$
i) $\frac{27}{36} = \frac{21}{28}$ j) $\frac{21}{15} = \frac{35}{25}$

Exercice 1.10.

a) $\frac{14}{13}$ b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{11}{14}$
e) $\frac{5}{3}$ f) $\frac{9}{7}$
g) $\frac{8}{9}$ h) $\frac{7}{3}$
i) $\frac{3}{4}$ j) $\frac{11}{3}$
k) $\frac{5}{8}$ l) $\frac{1}{13}$
m) $\frac{3}{5}$ n) $\frac{40}{3}$
o) $\frac{8}{75}$ p) $\frac{2}{5}$
q) $\frac{4}{15}$ r) $\frac{38}{27}$
s) $\frac{5}{48}$ t) 12

Exercice 1.11.

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{7}{15}$
c) $\frac{11}{18}$ d) $\frac{11}{36}$

Exercice 1.12.

a) 1
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{17}{6}$
d) $\frac{13}{12}$
e) 2
f) $\frac{634}{75}$
g) $\frac{155}{84}$
h) $\frac{13}{18}$
i) $\frac{25}{12}$
j) $\frac{1}{30}$
k) $\frac{39}{14}$
l) $\frac{1}{6}$
m) $\frac{19}{5}$
n) $\frac{19}{32}$
o) $\frac{761}{100}$
p) $\frac{23}{6}$

Exercice 1.13.

a) $\frac{7}{4}$
b) $\frac{3}{64}$
c) 75
d) $\frac{5}{14}$
e) $\frac{3}{8}$
f) $\frac{7}{12}$
g) 1
h) $\frac{7}{4}$
i) 0
j) $\frac{1}{3}$
k) $-\frac{14}{9}$
l) $-\frac{4}{27}$
m) $-\frac{20}{7}$
n) $\frac{7}{20}$

Exercice 1.14.

a) $\frac{1}{4}$
b) 4
c) 51
d) $\frac{44}{21}$
e) $\frac{5}{4}$
f) $\frac{160}{9}$
g) $\frac{21}{5}$
h) $\frac{3}{40}$
i) $\frac{96}{5}$
j) 10
k) $\frac{120}{121}$
l) $\frac{20}{27}$

Exercice 1.15.

a) $\frac{128}{17}$ b) $\frac{113}{60}$

c) 13 d) $-\frac{8}{13}$

e) $\frac{43}{5}$ f) $\frac{33}{56}$

g) $\frac{109}{30}$ h) $\frac{7}{6}$

Exercice 1.16.

a) 18 points.
b) 12 élèves.
c) 15 maisons.
d) a) 70 ha.
 b) 35 ha.
 c) 35 ha.

Exercice 1.17.

a) 63.
b) 160.
c) $247,2$.

Exercice 1.18.

a) 21%.
b) 244 francs.
c) $1329,4$ francs.
d) $1229,90$ francs.
e) $30801,6$ francs.
f) 26 francs.

Exercice 1.19. Prix initial : 1 900 francs.

Exercice 1.20. Prix payé : 20 francs, rabais total : 60%.

Exercice 1.21. Une réduction de 16%.

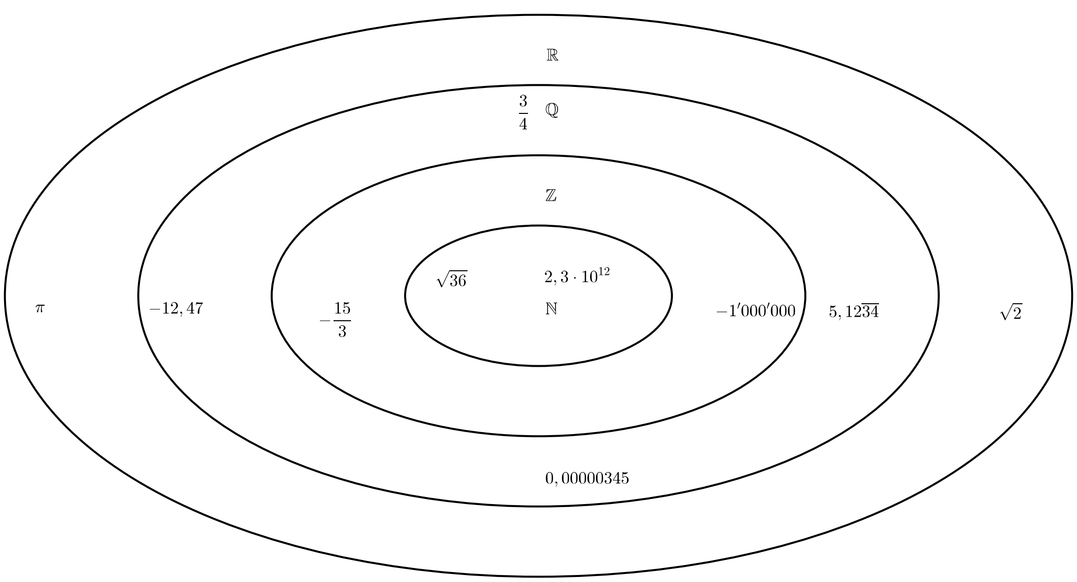
Exercice 1.22.

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-5,63$			x	x
$9,\overline{2}$			x	x
2π				x
$-\dfrac{15}{3}$		x	x	x
$\sqrt{2}$				x
$\sqrt{9}$	x	x	x	x

Exercice 1.23.

a) Vrai	b) Faux
c) Faux	d) Vrai
e) Faux	f) Faux

Exercice 1.24.



Exercice 1.25.

a)	-8	-8	8
b)	16	-16	-16
c)	27	-27	-27
d)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{9}$
e)	$\frac{9}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$

Exercice 1.26.

a) 5^7
b) -6^3
c) 8^2
d) -2^{12}
e) $\frac{1}{2^6}$
f) $(-2,5)^4 = 2,5^4$
g) $2^9 \cdot (-2)^9 = -2^{18}$
h) 2^{11}
i) 6^4
j) $\frac{3^9}{5^4 \cdot 2^5}$

Exercice 1.27.

a) $x = 2$
b) $x = 5$, $x = -5$
c) Impossible
d) $x = 0$
e) $x = 3$
f) $x = 4$, $x = -4$

Exercice 1.28.

a)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
b)	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$
c)	-1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Exercice 1.29.

$\frac{2}{3}$ $\quad \frac{4}{9}$ $\quad 1$

Exercice 1.30.

a) 0
b) 25
c) 10
d) Pas défini
e) 7
f) -2
g) 6
h) 7
i) -4
j) 9

1.8 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

1.1 ☐ Calculer une expression arithmétique en respectant la priorité des opérations.
1.2 ☐ Distinguer les différents types de division impliquant 0.
1.3 ☐ Multiplier ou diviser des nombres entiers relatifs en respectant la règle des signes.
1.4 ☐ Additionner ou soustraire des nombres entiers relatifs.
1.5 ☐ Calculer des expressions impliquant des valeurs absolues.
1.6 ☐ Amplifier une fraction.
1.7 ☐ Simplifier une fraction au maximum.
1.8 ☐ Additionner et soustraire des fractions.
1.9 ☐ Multiplier et diviser des fractions.
1.10 ☐ Résoudre un problème impliquant des fractions.
1.11 ☐ Résoudre un problème impliquant des pourcentages.
1.12 ☐ Classer des nombres dans le bon ensemble.
1.13 ☐ Elever un nombre à une puissance entière (positive ou négative).
1.14 ☐ Simplifier une expression contenant des puissances à l'aide des propriétés.
1.15 ☐ Calculer la racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre.

Chapitre 2

Calcul littéral

2.1 Introduction

En mathématiques, il arrive fréquemment de travailler avec des *lettres*, qui représentent des *nombres*. Par exemple, l'aire d'un carré de côté 2 est de $2^2 = 4$, tandis que celle d'un carré de côté 12 vaut $12^2 = 144$. Plus généralement, l'aire A d'un carré est donnée par son côté au carré. Pour simplifier, on note $A = c^2$ où c désigne le coté du carré.

2.2 Polynômes

2.2.1 Définition

Définition. Une *expression littérale* est une écriture contenant une ou plusieurs variables.

Exemple.

1. $3x^8$ est un *monôme* car il contient un seul terme. x est la *variable*, car elle peut prendre n'importe quelle valeur. 3 est appelé *coefficient* de x^8.
2. $3x^8 - 5y$ est un *binôme*, car il contient deux termes.
3. $5x^2 - 2x + 3$ est un *trinôme*, car il contient trois termes.

Définition. Lorsque le nombre de termes n'est pas précisé, on parle de *polynôme*. Le *degré* d'un polynôme par rapport à une variable est la plus grande puissance observée par rapport à celui-ci.

Exemple.

1. $5x^3 - 3x^2 + 2x - 9$ est un polynôme de degré 3.
2. $3x^4y - 2xy^5$ est un polynôme de degré 4 par rapport à x et de degré 5 par rapport à y.

Définition. On appelle *termes semblables* des termes qui ne diffèrent que par leurs coefficients.

Exemple.

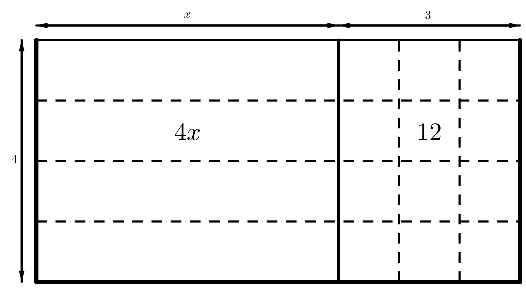
1. $3x^2y^5$ et $-6x^2y^5$ sont des termes semblables.
2. $3x^2y^5$ et $-6x^5y^2$ ne sont pas des termes semblables.

2.2.2 Opérations sur les polynômes

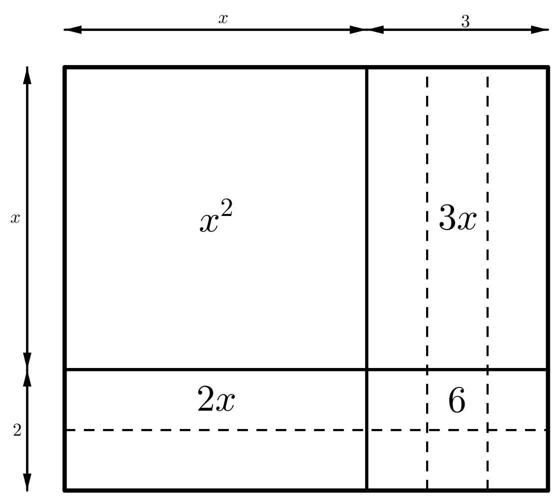
Il est possible de regrouper deux monômes uniquement si ceux-ci sont semblables. Par ailleurs, pour multiplier deux polynômes, on distribue.

Exemple.

1. $(3x^2 - 2x + 7) + (x^2 + 3x) = 3x^2 - 2x + 7 + x^2 + 3x = 4x^2 + x + 7$.
2. $(3x^2 - 2x + 7) - (x^2 + 3x) = 3x^2 - 2x + 7 - x^2 - 3x = 2x^2 - 5x + 7$.
3. $4 \cdot (x + 3) = 4 \cdot x + 4 \cdot 3 = 4x + 12$.



4. $(x + 2) \cdot (x + 3) = x \cdot x + x \cdot 3 + 2 \cdot x + 2 \cdot 3 = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$.



5. $(3x-2) \cdot (x^2+3) = 3x \cdot x^2 + 3x \cdot 3 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot 3 = 3x^3 + 9x - 2x^2 - 6 = 3x^3 - 2x^2 + 9x - 6$.

Exercice 2.1. Réduire les expressions suivantes au maximum.

a) $3x - 2x + 5x - 2x + 4x - 3x$	b) $2ab - 3ab + 5ba - 14ab + ba$
c) $5b^2 - b^2 - 4b^2$	d) $(2b)^3 - b^3 + 2b^3$
e) $3(5a + 2)$	f) $-5(a - 3)$
g) $\dfrac{1}{2}z(4 + 2z)$	h) $3x\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{6}\right)$
i) $-3(x - 2y + 3z)$	j) $(x + 3)(x + 5)$
k) $(x - 2)(x + 1)$	l) $(3z - 1)(4 + 2z)$

Exercice 2.2. Réduire les expressions suivantes au maximum.

a) $18x - [7x - (8x - y)]$

b) $4x^2 + 3y - (6x^2 - 2y)$

c) $5x - [x - (5x - 3)]$

d) $25x - \{13x - [24x - (5x + 3y) - (7x - y)] + (24x - 2y)\}$

e) $(2y)^5 \cdot (2z)^6$

f) $(3x - 1)(x + 2) - (2x + 5)(x - 1)$

g) $(x^4 - x^3 + 2) + (x^2 - 2x + 5)$

h) $(x^2 - 2x - 3) - (x^2 + 4x + 9)$

i) $2(x + 3) - 3(x - 1)$

j) $4x(x - 3) - (x - 7)$

Exercice 2.3. Réduire les expressions suivantes au maximum.

a) $(4a - 5x)(5c + 4b)4n$

b) $(3a - 2b)(2c - 4d)(5x - 2y)$

c) $5x^3 - \{4x + 3x[2x^2 - 3(x - 5)]\}$

d) $-3x^3\{9x^2 - [3x^3 - 2x(4x + 1)]\}$

e) $x \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x - 1)$

f) $-2x(x - 3)(4 - 2x^2)$

g) $-2(a + c) + 3[(b - c) + 3(c - a)]$

h) $4x - \{2x - [3y - (5x - 4y) + 3x]\} - 2y$

Exercice 2.4. Evaluer les polynômes suivant pour $p = -2$, $q = 4$ et $r = -5$.

a) $-3(p + 5q)$ b) $\dfrac{q + r}{q + p}$

2.2.3 Identités remarquables

Théorème. *Si a et b sont deux monômes, alors*

1. $\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

2. $\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

3. $\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$

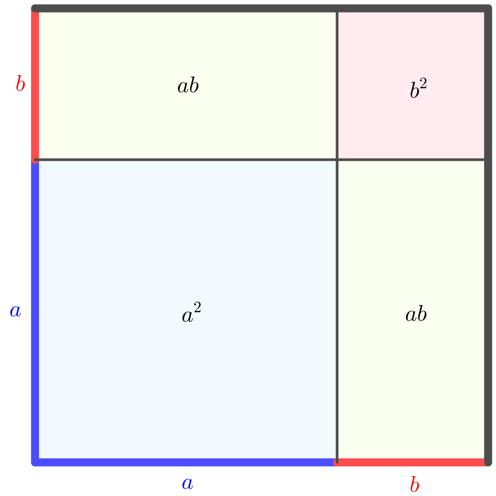
4. $\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

5. $\boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

Preuve. Soient a et b deux monômes.

On a

1.
$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$



2.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a^2-ab-ba+b^2\\ &= a^2-2ab+b^2.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2-ab+ba-b^2\\ &= a^2-b^2.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)^2(a-b)\\ &= (a^2-2ab+b^2)(a-b)\\ &= a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+b^2a-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.\end{aligned}$$

□

Exemple.

1.

$$\begin{aligned}(5x+3y)^2 &= (5x)^2+2\cdot 5x\cdot 3y+(3y)^2\\ &= 25x^2+30xy+9y^2.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(4x^3-y^2)^2 &= (4x^3)^2-2\cdot 4x^3\cdot y^2+(y^2)^2\\ &= 16x^6-8x^3y^2+y^4.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(9x^4+2x^3)(9x^4-2x^3) &= (9x^4)^2-(2x^3)^2\\ &= 81x^8-4x^6.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(4x+5y)^3 &= (4x)^3+3\cdot(4x)^2\cdot 5y+3\cdot 4x\cdot(5y)^2+(5y)^3\\ &= 64x^3+3\cdot 16x^2\cdot 5y+3\cdot 4x\cdot 25y^2+125y^3\\ &= 64x^3+240x^2y+300xy^2+125y^3.\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}(5x^3-2y)^3 &= (5x^3)^3 - 3\cdot(5x^3)^2\cdot 2y + 3\cdot 5x^3\cdot(2y)^2 - (2y)^3\\ &= 125x^9 - 3\cdot 25x^6\cdot 2y + 3\cdot 5x^3\cdot 4y^2 - 8y^3\\ &= 125x^9 - 150x^6y + 60x^3y^2 - 8y^3.\end{aligned}$$

Exercice 2.5. Effectuer à l'aide des identités remarquables.

a) $(x+1)^2$ b) $(x+5)^2$
c) $(x-2)(x+2)$ d) $(x-3)^2$
e) $(x-7)^2$ f) $(x-6)(x+6)$
g) $(x-7)(x+7)$ h) $(2x-4)(2x+4)$
i) $(3x+6)(3x-6)$ j) $(-x+2)^2$
k) $\left(\frac{2}{7}x - \frac{3}{2}y\right)^2$ l) $(4m^2-9n^2)^2$
m) $(xy^2z-5)(xy^2z+5)$ n) $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

Exercice 2.6. Compléter.

a) $64x^2 + \ \ldots\ \cdot x + \frac{1}{9} = (\ \ldots\ +\ \ldots\ )^2$ b) $9x^2 - 24x + \ \ldots\ = (\ \ldots\ -\ \ldots\ )^2$

c) $\left(\frac{1}{3}x + \ \ldots\ \right)^2 = \ \ldots\ + 4x + \ \ldots$ d) $\left(\frac{1}{5}x + \ \ldots\ \right)^2 = \ \ldots\ + \frac{3}{10}x + \ \ldots$

2.3 Factorisation

En développant $2x(x-y)$, on obtient $2x^2-2xy$. *Factoriser* $2x^2-2xy$ consiste à retrouver le produit $2x(x-y)$.

Autrement dit :

$$\boxed{2x(x-y) \underset{\text{Factoriser}}{\overset{\text{Développer}}{\rightleftarrows}} 2x^2-2xy}$$

Suivant les cas, différentes techniques de factorisation seront utilisées.

Exemple.

1. **Mise en évidence**

   Soit à factoriser $8x^3y^2 - 12x^2y^3$.
   Les deux monômes étant des multiples de $4x^2y^2$, il est possible de mettre ce terme *en évidence* :
   $$8x^3y^2 - 12x^2y^3 = 4x^2y^2(2x-3y).$$
   Pour le vérifier, il suffit de développer le terme de droite.

2. **Mise en évidence d'une parenthèse**

   Soit à factoriser $2(x-y)^2 + 4(x-y)$.
   On peut voir cette expression comme une somme de deux termes dont chacun est multiple de $2(x-y)$. Il est donc possible de mettre $2(x-y)$ en évidence :
   $$2(x-y)^2 + 4(x-y) = 2(x-y)[(x-y)+2] = 2(x-y)(x-y+2).$$

3. **Mise en évidence par groupements**

   Soit à factoriser $2x + 2y + xz + yz$.
   Il n'est pas possible de procéder à une mise en évidence, car les monômes composant le polynôme ci-dessous n'ont aucun diviseur commun. Il est cependant possible de mettre 2 en évidence pour les deux premiers termes et z pour les deux derniers, afin de se ramener au cas précédent :

   $$2x + 2y + xz + yz = 2(x + y) + z(x + y) = (x + y)(2 + z).$$

4. **Identités remarquables**

   Soit à factoriser $9x^2 + 24xy + 16y^2$. Ce trinôme étant de la forme $a^2 + 2ab + b^2$, il s'agit de l'écrire sous la forme $(a + b)^2$:

   $$\underbrace{9x^2}_{=a^2} + \underbrace{24xy}_{=2ab} + \underbrace{16y^2}_{=b^2} = (\underbrace{3x}_{=a} + \underbrace{2y}_{=b})^2.$$

5. **Identités remarquables**

   Quant au binôme $25x^2 - 9y^2$, il est de la forme $a^2 - b^2$. On a donc

   $$\underbrace{25x^2}_{=a^2} - \underbrace{9y^2}_{=b^2} = (\underbrace{5x}_{=a} + \underbrace{3y}_{=b})(\underbrace{5x}_{=a} - \underbrace{3y}_{=b}).$$

6. **Factorisation du trinôme du deuxième degré**

   En développant $(x + 2)(x + 3)$, on obtient

   $$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6.$$

   Factoriser $x^2 + 5x + 6$ consiste à l'écrire comme produit des deux parenthèses ci-dessus. On observe que :

   — puisque le trinôme contient le terme x^2, chaque parenthèse doit contenir x ;
   — chaque parenthèse contient un binôme de la forme $x + \text{Nombre}$;
   — le terme $5x$ a été obtenu en calculant $3x + 2x$;
   — le nombre 6 a été obtenu en calculant $2 \cdot 3$.

   Autrement dit, la factorisation sera de la forme $(x + \text{Nombre}_1)(x + \text{Nombre}_2)$. Le produit de ces deux nombres doit donner 6 et leur somme 5.

7. **Factorisation du trinôme du deuxième degré**

   Soit à factoriser $x^2 + 7x + 12$.
   Comme $4 \cdot 3 = 12$ et $4 + 3 = 7$, on a

   $$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3).$$

8. **Factorisation du trinôme du deuxième degré**

   Soit à factoriser $x^2 - 8x + 15$.
   Comme $(-5) \cdot (-3) = 15$ et $-5 - 3 = -8$, on a
   $$x^2 - 8x + 15 = (x-5)(x-3).$$

9. **Factorisation du trinôme du deuxième degré**

   Soit à factoriser $x^2 - 2x - 24$.
   Comme $(-6) \cdot 4 = 24$ et $-6 + 4 = -2$, on a
   $$x^2 - 2x - 24 = (x-6)(x+4).$$

10. **Un mélange**

    Soit à factoriser $2x^3 - 4x^2 - 16x$.
    On a
    $$2x^3 - 4x^2 - 16x = 2x(x^2 - 2x - 8) = 2x(x-4)(x+2).$$

11. **Un mélange**

    Soit à factoriser $2x^4 - 2y^4$.
    On a
    $$2x^4 - 2y^4 = 2(x^4 - y^4) = 2(x^2+y^2)(x^2-y^2) = 2(x^2+y^2)(x+y)(x-y).$$

Exercice 2.7. Factoriser à l'aide des identités remarquables.

a) $x^2 + 10x + 25$ b) $x^2 + 16x + 64$
c) $x^2 - 14x + 49$ d) $4x^2 + 4x + 1$
e) $9x^2 - 4$ f) $x^4 - 25x^2$

Exercice 2.8. Factoriser au maximum.

a) $rs + 4st$ b) $4u^2 - 2uv$
c) $3a^2b^2 - 6a^2b$ d) $10xy + 15xy^2$
e) $3x^2y^3 - 9x^3y^2$ f) $16x^5y^2 + 8x^3y^3$
g) $(2x-1)^2 - 3(2x-1)(x+2) + (x+4)(2x-1)$ h) $17(x-2) - 34(-2+x) + 85(x-2)^2$
i) $n(x-y) - (x-y)$ j) $(4a-5b)(3p-2q) - (a+5b)(3p-2q)$
k) $r(a-2) - r^2(2-a) + r^3(2-a)$ l) $(x+1)(x-y) - (x-3)(x-y) + (x+2)(y-x)$
m) $2ax - 6bx + ay - 3by$ n) $2ay^2 - axy + 6xy - 3x^2$
o) $3x^3 + 3x^2 - 27x - 27$ p) $5x^3 + 10x^2 - 20x - 40$

Exercice 2.9. Factoriser au maximum.

a) $x^2 + 5x + 6$ b) $x^2 + 3x + 2$
c) $x^2 + 7x + 12$ d) $x^2 + x - 30$
e) $x^2 + 15x + 56$ f) $x^2 + 2x - 3$
g) $x^2 + x - 12$ h) $x^2 + x - 56$

2.4 Fractions rationnelles

2.4.1 Définition

Définition. Une *fraction rationnelle* est un quotient de deux polynômes.

Exemple. $\dfrac{x+y}{2x+3y}$ et $\dfrac{x^2}{5x^2-11y^3}$ sont deux fractions rationnelles.

2.4.2 Opérations sur les fractions rationnelles

Les opérations sur les fractions rationnelles sont identiques à celles sur les fractions numériques :

1. Amplifier une fraction rationnelle consiste à multiplier son numérateur et son dénominateur par un même polynôme.
2. Simplifier une fraction rationnelle consiste à diviser son numérateur et son dénominateur par un même polynôme.
3. Le produit de deux fractions rationnelles est une fraction rationnelle dont le numérateur est le produit des numérateurs et le dénominateur le produit des dénominateurs.
4. Pour diviser une fraction rationnelle par une autre, il suffit de multiplier la première par l'inverse de la deuxième.
5. Pour additionner deux fractions rationnelles, il suffit de trouver un dénominateur commun, de les amplifier et d'additionner les numérateurs ainsi obtenus.

Exemple.

1. **Amplifions** $\dfrac{2x}{x-y}$ par $x+y$:

$$\frac{2x}{x-y} = \frac{2x}{x-y} \cdot \frac{x+y}{x+y} = \frac{2x(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x^2+2xy}{x^2-y^2}.$$

2. **Simplifions** $\dfrac{x^2-9}{x^2+4x+3}$:

$$\frac{x^2-9}{x^2+4x+3} = \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{(x+1)\cancel{(x+3)}} = \frac{x-3}{x+1}.$$

3. **Produit de deux fractions rationnelles**

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2+8x+16} \cdot \frac{x^2+7x+12}{x+3} &= \frac{x+2}{(x+4)^2} \cdot \frac{(x+4)(x+3)}{x+3} \\ &= \frac{(x+2)\cancel{(x+4)}\cancel{(x+3)}}{(x+4)^{\cancel{2}}\cancel{(x+3)}} \\ &= \frac{x+2}{x+4}. \end{aligned}$$

4. **Quotient de deux fractions rationnelles**

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{2x+6}:\frac{x-2}{x+3} &= \frac{x^2-4}{2x+6}\cdot\frac{x+3}{x-2}\\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{2(x+3)}\cdot\frac{x+3}{x-2}\\ &= \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}}{2\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}}\\ &= \frac{x+2}{2}.\end{aligned}$$

5. **Somme de deux fractions rationnelles**

$$\begin{aligned}\frac{3}{x+y}-\frac{2}{x-y} &= \frac{3(x-y)}{(x+y)(x-y)}-\frac{2(x+y)}{(x-y)(x+y)}\\ &= \frac{3(x-y)-2(x+y)}{(x+y)(x-y)}\\ &= \frac{3x-3y-2x-2y}{(x+y)(x-y)}\\ &= \frac{x-5y}{(x+y)(x-y)}.\end{aligned}$$

Remarque.

1. Il faut faire attention à un signe "$-$" placé avant la fraction. Celui-ci change tous les signes du numérateur. En effet, on a par exemple

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x+y}-\frac{3x-4y}{x+y} &= \frac{2x}{x+y}+(-1)\cdot\frac{3x-4y}{x+y}\\ &= \frac{2x}{x+y}+\frac{-3x+4y}{x+y}\\ &= \frac{2x-3x+4y}{x+y}\\ &= \frac{-x+4y}{x+y}.\end{aligned}$$

2. La simplification

$$\frac{x^{\cancel{2}}+1}{4\cancel{x}+3}=\frac{x+1}{4+3}=\frac{x+1}{7}$$

est fausse.

Pour le voir, il suffit d'exhiber un contre-exemple.

En posant $x=2$, on a

$$\frac{2^2+1}{4\cdot 2+3}=\frac{5}{11}$$

et

$$\frac{2+1}{7}=\frac{3}{7}.$$

Exercice 2.10. Simplifier au maximum.

a) $\dfrac{15a^3b^2}{20a^2b^4}$ b) $\dfrac{-18a^3xy^2}{42ax^2y^3}$

c) $\dfrac{(a+b)^2(a-b)}{(a-b)^2(a+b)}$ d) $\dfrac{6x^4-12x^3}{2x^3-4x^2}$

e) $\dfrac{14+7x}{7x}$ f) $\dfrac{5a+15b}{4a+12b}$

g) $\dfrac{x^2-y^2}{ax+ay}$ h) $\dfrac{45(x+1)}{63(x^2-1)}$

Exercice 2.11. Effectuer, puis simplifier au maximum.

a) $\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{6}{x^2-4}$ b) $\dfrac{5x}{x^2-9}-\dfrac{15}{x^2-9}$

c) $\dfrac{9}{(2s+1)^2}-\dfrac{2}{2s+1}$ d) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3x+1}{x^2}-\dfrac{x-2}{x^3}$

e) $\dfrac{5}{x}-\dfrac{2x-1}{x^2}+\dfrac{x+5}{x^3}$ f) $\dfrac{5}{t+2}+\dfrac{2}{t-2}-\dfrac{40}{t^2-4}$

Exercice 2.12. Effectuer, puis simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $\dfrac{x^2}{y}\cdot\dfrac{2y^2}{3x}$ b) $\dfrac{5a^2b}{x^2}:\dfrac{6ab^2}{ay}$

2.5 Solutions

Exercice 2.1.

a) $5x$	b) $-9ab$
c) 0	d) $9b^3$
e) $15a+6$	f) $-5a+15$
g) $2z+z^2$	h) $2x^2-\frac{1}{2}x$
i) $-3x+6y-9z$	j) $x^2+8x+15$
k) x^2-x-2	l) $6z^2+10z-4$

Exercice 2.2.

a) $19x-y$
b) $-2x^2+5y$
c) $9x-3$
d) 0
e) $2048y^5\cdot z^6$
f) x^2+2x+3
g) $x^4-x^3+x^2-2x+7$
h) $-6x-12$
i) $-x+9$
j) $4x^2-13x+7$

Exercice 2.3.

a) $80acn+64abn-100cnx-80bnx$
b) $30acx-60adx-20bcx+40bdx-12acy+24ady+8bcy-16bdy$
c) $-x^3+9x^2-49x$
d) $9x^6-51x^5-6x^4$
e) x^4-2x^2-x
f) $4x^4-12x^3-8x^2+24x$
g) $-11a+3b+4c$
h) $5y$

Exercice 2.4.

a) -54	b) $-\frac{1}{2}$

Exercice 2.5.

a) x^2+2x+1	b) $x^2+10x+25$
c) x^2-4	d) x^2-6x+9
e) $x^2-14x+49$	f) x^2-36
g) x^2-49	h) $4x^2-16$
i) $9x^2-36$	j) x^2-4x+4
k) $\frac{4}{49}x^2-\frac{6}{7}xy+\frac{9}{4}y^2$	l) $16m^4-72m^2n^2+81n^4$
m) $x^2y^4z^2-25$	n) $x^2-\frac{4}{9}$

Exercice 2.6.

a) $64x^2 + \frac{16}{3} \cdot x + \frac{1}{9} = \left(8x + \frac{1}{3}\right)^2$ b) $9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

c) $\left(\frac{1}{3}x + 6\right)^2 = \frac{1}{9}x^2 + 4x + 36$ d) $\left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{25}x^2 + \frac{3}{10}x + \frac{9}{16}$

Exercice 2.7.

a) $(x+5)^2$ b) $(x+8)^2$
c) $(x-7)^2$ d) $(2x+1)^2$
e) $(3x+2)(3x-2)$ f) $(x^2+5x)(x^2-5x)$

Exercice 2.8.

a) $s(r+4t)$ b) $2u(2u-v)$
c) $3a^2b(b-2)$ d) $5xy(2+3y)$
e) $3x^2y^2(y-3x)$ f) $8x^3y^2(2x^2+y)$
g) $(2x-1)((2x-1)-3(x+2)+(x+4))$ h) $17(x-2)(-1+5(x-2)) = 17(x-2)(5x-11)$
i) $(x-y)(n-1)$ j) $(3p-2q)(3a-10b)$
k) $r(a-2)(1+r-r^2) = r(2-a)(-1-r+r^2)$ l) $(x-y)(2-x)$
m) $(2x+y)(a-3b)$ n) $(ay+3x)(2y-x)$
o) $3x(x-9)(x+1)$ p) $5(x-2)(x+2)^2$

Exercice 2.9.

a) $(x+2)(x+3)$ b) $(x+1)(x+2)$
c) $(x+3)(x+4)$ d) $(x+6)(x-5)$
e) $(x+7)(x+8)$ f) $(x+3)(x-1)$
g) $(x+4)(x-3)$ h) $(x+8)(x-7)$

Exercice 2.10.

a) $\frac{3a}{4b^2}$ b) $-\frac{3a^2}{7xy}$
c) $\frac{a+b}{a-b}$ d) $3x$
e) $\frac{2+x}{x}$ f) $\frac{5}{4}$
g) $\frac{x-y}{a}$ h) $\frac{5}{7(x-1)}$

Exercice 2.11.

a) $\frac{3}{x+2}$ b) $\frac{5}{x+3}$
c) $\frac{7-4s}{(2s+1)^2}$ d) $\frac{5x^2+2}{x^3}$
e) $\frac{3x^2+2x+5}{x^3}$ f) $\frac{7t-46}{t^2-4}$

Exercice 2.12.

a) $\dfrac{2xy}{3}$ b) $\dfrac{5a^2y}{6bx^2}$

2.6 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

2.1 ☐ Effectuer les opérations élémentaires (addition, soustraction et multiplication) sur des polynômes.
2.2 ☐ Elever un binôme au carré à l'aide des identités remarquables.
2.3 ☐ Factoriser un polynôme par mise en évidence.
2.4 ☐ Factoriser un polynôme à l'aide des identités remarquables.
2.5 ☐ Factoriser un trinôme du deuxième degré.
2.6 ☐ Combiner ces trois dernières techniques.
2.7 ☐ Amplifier une fraction rationnelle.
2.8 ☐ Simplifier une fraction rationnelle.
2.9 ☐ Effectuer les quatre opérations élémentaires sur les fractions rationnelles.

Chapitre 3

Equations

3.1 Equations du premier degré à une inconnue

Définition. Une *équation* est une égalité contenant une ou plusieurs variables (inconnues).

Exemple. $x - 5 = 7$ est une équation où $x - 5$ est appelé le *membre de gauche* et 7, le *membre de droite. L'inconnue* de cette équation est x.

Lorsque l'on résout une équation, le but est de trouver la (ou les) valeur(s) de l'inconnue de manière à ce que l'égalité soit correcte. Autrement dit, que le membre de gauche soit égal au membre de droite. Une telle valeur est appelée *solution* de l'équation. Par exemple, 12 est solution de l'équation $x - 5 = 7$, car ainsi le membre de gauche et le membre de droite valent tout deux 7. Les équations dont l'exposant de l'inconnue ne dépasse pas 1 sont appelées *équations du premier degré.*

Comment résoudre des équations du 1er degré ?

Il est possible d'effectuer toutes les opérations (addition/soustraction/multiplication/division) sur un membre tant qu'on effectue la même chose sur l'autre. Le but est d'isoler l'inconnue x pour trouver sa valeur.

Exemple. Soit l'équation $3x + 5 = 17$.
Nous pouvons soustraire 5 de part et d'autres de l'équation : $3x + 5 - 5 = 17 - 5$.
Nous obtenons ainsi $3x = 12$.
Nous divisons maintenant par 3 de chaque côté pour obtenir $x = 4$.
Désormais, nous présenterons ces diverses étapes comme suit :

$$\begin{array}{rcl|l} 3x + 5 & = & 17 & -5 \\ 3x & = & 12 & :3 \\ x & = & 4. & \end{array}$$

Exercice 3.1. Dans chacun des cas suivants, entourer les nombres qui sont solutions de l'équation.

a)	$3x-15-4x=-9+x-13$	$x=5$	$x=-\dfrac{8}{3}$	$x=\dfrac{7}{2}$	$x=7$	$x=\dfrac{21}{6}$
b)	$4(2x+3)=2(4x+6)$	$x=0$	$x=-4$	$x=\dfrac{4}{5}$	$x=9$	$x=16$
c)	$x^2-9=0$	$x=4$	$x=-3$	$x=-5$	$x=3$	$x=6$
d)	$\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{3}=x-5$	$x=12$	$x=-7$	$x=6$	$x=-12$	$x=1$
e)	$\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{4x+3}{7}=1$	$x=7$	$x=9$	$x=-4$	$x=8$	$x=-13$
f)	$x^3-8=0$	$x=2$	$x=3$	$x=8$	$x=-8$	$x=-2$

Exercice 3.2. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $-3x+4=-1$
b) $2x-2=-9$
c) $4x-3=-5x+6$
d) $5x-4=2(x-2)$
e) $4(2y+5)=3(5y-2)$
f) $6(2y+3)-3(y+5)=0$

Exercice 3.3. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $\dfrac{1}{5}x+2=3-\dfrac{2}{7}x$
b) $\dfrac{5}{3}x-1=4+\dfrac{2}{3}x$
c) $\dfrac{2x-9}{4}=2+\dfrac{x}{12}$
d) $(3x-2)^2=(x-5)(9x+4)$
e) $(5x-7)(2x+1)-10x(x-4)=0$
f) $3x+5=3x-7$
g) $5x+7-2x=3x+7$
h) $x+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{6}$

Exercice 3.4. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $\dfrac{2x}{5}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{2}$
b) $\dfrac{2x-4}{3}-\dfrac{x+5}{5}-\dfrac{2x+3}{4}=1$
c) $\dfrac{x+7}{5}-\dfrac{3x+1}{6}=3-\dfrac{x+7}{15}$
d) $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x+1}{3}=5$
e) $\dfrac{3x-10}{6}-\dfrac{-10x-8}{2}=\dfrac{10x-2}{3}$
f) $\dfrac{2(5-2x)}{3}-\dfrac{x+2}{4}=4(x+1)$
g) $60=\left(\dfrac{x-3}{3}\right)\cdot 4$
h) $(x-6)^2+(x-4)^2+(2x-9)^2=(x-8)(6x-8)$
i) $(5x+1)(2x-1)-(2x+1)(3x-5)=4(x+3)(x-1)-4$
j) $3x+2(1-3x)=5(x+2)-2-x$

Exercice 3.5. Résoudre par rapport à la variable demandée.

a) $3y - 5a = 10a$, $y = ?$ b) $4(x - 3b) = 8a - 9b$, $x = ?$

c) $\frac{x}{5} + b = 3f$, $x = ?$ d) $P = 2\pi r$, $r = ?$

e) $A = \frac{1}{2}bh$, $h = ?$ f) $E = mc^2$, $c = ?$

Exercice 3.6. Quelle doit être la valeur du paramètre m de telle sorte que l'équation

a) $m(2x - 1) - 3(4x + 2) = mx - 7$ n'admette pas de solution ?

b) $4x - m(1 - x) = 2x(1 - m)$ n'admette pas solution ?

c) $x(1 - m) - 3(mx - 5) = 15$ admette une infinité de solutions ?

d) $m(1 - 4x) - 2mx + 3 = m - 4$ admette une infinité de solutions ?

3.2 Equations du premier degré à deux inconnues

Il est possible d'avoir des équations possédant deux inconnues différentes comme par exemple $x + 2y = 8$. Or, une équation à deux inconnues admet une infinité de solutions comme $(0; 4)$, $(8; 0)$, $(2; 3)$, $\left(-\frac{1}{3}; \frac{25}{6}\right)$ etc. Pour que la solution soit unique, une deuxième équation est nécessaire. C'est pour cette raison que nous allons étudier les systèmes de deux équations à deux inconnues. Pour résoudre un tel système, il existe deux méthodes : la méthode de substitution et celle d'addition.

3.2.1 Substitution

Exemple.

Soit à résoudre $\left\{\begin{array}{rcl|l} x + 2y &=& 8 & \text{(I)} \\ 2x - y &=& 1 & \text{(II)} \end{array}\right.$.	
$\begin{array}{rcl\|l} x + 2y &=& 8 & -2y \\ x &=& 8 - 2y & \end{array}$	**Etape 1 :** Dans une des équations, on isole une des iconnues, par exemple x. En utilisant l'équation (I), on obtient $x = 8 - 2y$
$\begin{array}{lrcl\|l} \text{(II)} & 2x - y &=& 1 & x = 8 - 2y \\ & 2(8 - 2y) - y &=& 1 & \text{Distribution} \\ & 16 - 4y - y &=& 1 & \text{Distribution} \\ & 16 - 5y &=& 1 & \text{Simplification} \end{array}$	**Etape 2 :** Dans l'équation non-utilisée, on substitute (remplace) la variable grâce au résultat obtenu à la première étape. On utilise la seconde équation (II) dans laquelle on remplace x par $8 - 2y$.

$\begin{array}{rcl\|l} 16-5y & = & 1 & -16 \\ -5y & = & -15 & :(-5) \\ y & = & 3 & \end{array}$	**Etape 3 :** Résoudre l'équation obtenue. On résout et l'on obtient $y=3$.
$\begin{array}{rcl\|l} x & = & 8-2y & y=3 \\ x & = & 8-2\cdot 3 & \\ x & = & 2 & \end{array}$	**Etape 4 :** Dans l'équation obtenue lors de la première étape, on y remplace le résultat trouvé à l'étape 3. On remplace y par 3 dans l'équation $x=8-2y$.
Ainsi, la solution est $x=2$ et $y=3$, ce qui se note $(x;y)=(2;3)$.	

Exercice 3.7. Résoudre chacun des systèmes ci-dessous par substitution.

a) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 8 \\ 3x+y & = & -1 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 29 \\ 3x-5y & = & 11 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y & = & -1 \\ 5x-3y & = & 1 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x-1 \\ 2x & = & 2y+2 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+6y-4 & = & 0 \\ 3y-4 & = & -x \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rcl} 6x-18y & = & 90 \\ -7x+3y & = & -33 \end{array}\right.$

3.2.2 Méthode d'addition

La seconde méthode est appelée la méthode de l'addition (ou combinaisons linéaires).

Exemple.

Soit à résoudre $\left\{\begin{array}{rcl\|l} 2x-3 & = & -3y+6 & (\mathrm{I}) \\ 5x-2y+5 & = & -20 & (\mathrm{II}) \end{array}\right.$.	
$\left\{\begin{array}{rcl\|l} 2x-3 & = & -3y+6 & +3y+3 \\ 5x-2y+5 & = & -20 & -5 \end{array}\right.$	**Etape 1 :** Mettre tous les termes contenant des inconnues à gauche et les constantes à droite.
$\left\{\begin{array}{rcl\|l} 2x+3y & = & 9 & \cdot 5 \\ 5x-2y & = & -25 & \cdot(-2) \end{array}\right.$	**Etape 2 :** Multiplier une ou les deux équations pour obtenir c et $-c$ devant x (ou y).
$\begin{array}{lrcl} & 10x+15y & = & 45 \\ + & -10x+4y & = & 50 \\ \hline & 19y & = & 95 \end{array}$	**Etape 3 :** Additionner les deux équations.
$\begin{array}{rcl\|l} 19y & = & 95 & :19 \\ y & = & 5 & \end{array}$	**Etape 4 :** Résoudre l'équation à une inconnue ainsi obtenue.
$\begin{array}{rcl\|l} 2x+3y & = & 9 & y=5 \\ 2x+3\cdot 5 & = & 9 & -15 \\ 2x & = & -6 & :2 \\ x & = & -3 & \end{array}$	**Etape 5 :** Remplacer la solution obtenue à l'étape 4 dans une des équations de l'étape 2 puis résoudre.
Ainsi, la solution est $x=-3$ et $y=5$, ce qui se note $(x;y)=(-3;5)$.	

Exercice 3.8. Résoudre chacun des systèmes ci-dessous à l'aide de la méthode d'addition.

a) $\left\{\begin{array}{rcl} 4x-5y &=& 18 \\ 6x-8y &=& 28 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} 7x-y &=& 4 \\ -2x+y &=& 1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcl} 6x-3y &=& 3 \\ 2x-y &=& -1 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{rcl} 4y-3x &=& 11 \\ 5y-7x &=& 4 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcl} 5x+8y &=& 101 \\ 9x+2y &=& 95 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rcl} 6x-5y &=& -15 \\ -12x+10y &=& 30 \end{array}\right.$

Exercice 3.9. Résoudre chacun des systèmes ci-dessous à l'aide de la méthode la plus appropriée.

a) $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x}{2} &=& \dfrac{y}{3} \\ x+\dfrac{1}{3}y &=& 30 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x-3}{7}-\dfrac{2y+2}{3} &=& \dfrac{y-6}{7}+1 \\ y-\dfrac{5x+1}{3} &=& 19-3x \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x+2y}{2} &=& \dfrac{y-1}{4} \\ \dfrac{7x+13y}{12}-y &=& \dfrac{x}{2} \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{6(y+2)}{5} &=& \dfrac{7x}{5}-4 \\ \dfrac{1}{3}(5x+8y) &=& 24 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y &=& 12 \\ x-6 &=& \dfrac{2y}{3}-2 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x-3y}{9} &=& 5+y \\ \dfrac{x}{3} &=& 15+\dfrac{8}{3}y \end{array}\right.$

g) $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{2x}{3}-\dfrac{4}{5}y &=& \dfrac{2+y}{5} \\ 2x &=& 3y \end{array}\right.$ h) $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{4x-5y}{2}+3 &=& \dfrac{2x+y}{5} \\ 8-\dfrac{x-2y}{4} &=& \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3} \end{array}\right.$

3.3 Problèmes

Lors de la réalisation de problèmes mathématiques, il est nécessaire de commencer par définir les inconnues. Très souvent, la question finale nous donne une bonne indication quant aux inconnues à poser. Ensuite, il est nécessaire de poser les équations puis les résoudre.

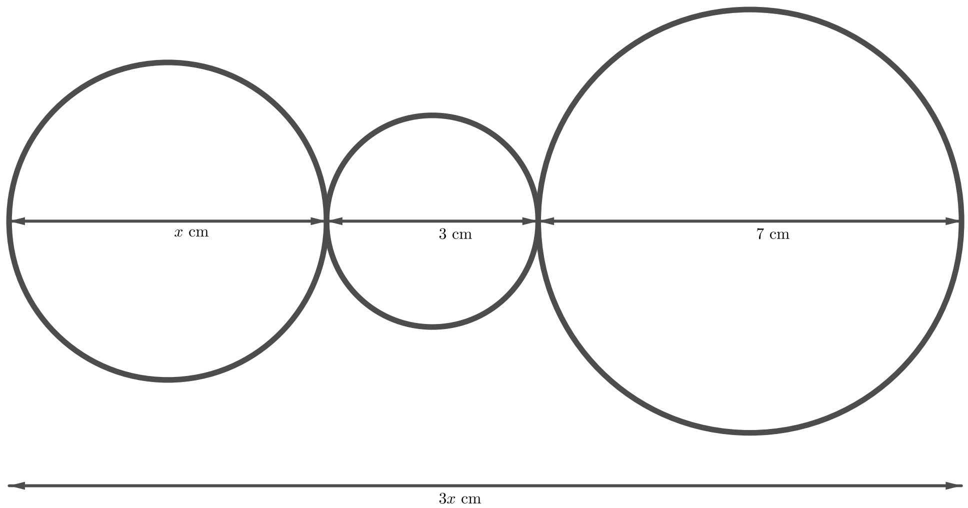
Exemple.

Dans un magasin, tous les CDs ont le même prix et toutes les BDs également. Marcel a acheté deux CDs et trois BDs pour 53 francs. Tristan a acheté quatre CDs et une BD pour 66 francs.
Calculer le prix d'un CD et celui d'une BD.

Posons $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \text{Prix d'un CD} \\ y &=& \text{Prix d'une BD} \end{array}\right.$. L'achat de Marcel s'écrit $2x+3y=53$. L'achat de Tristan s'écrit $4x+y=66$.	**Etape 1 :** Définir les deux inconnues.
$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y &=& 53 \\ 4x+y &=& 66 \end{array}\right.$.	**Etape 2 :** Traduire l'information en équations.

$(x; y) = (14,50; 8)$	**Etape 3 :** Résoudre le système d'équations.
Un CD coûte 14,50 frs. Une BD coûte 8 frs.	**Etape 4 :** Donner la réponse sous forme de phrases.

Exercice 3.10. A l'aide d'une équation, décrire algébriquement la situation ci-dessous et la résoudre.



Exercice 3.11. Trouver 3 nombres entiers consécutifs dont la somme est égale à 984.

Exercice 3.12. Si on additionne 12 à un nombre puis que l'on multiplie cette somme par 5 puis que l'on soustrait 72 à ce produit et que l'on divise cette différence par 4 on obtient alors le nombre lui-même.

Exercice 3.13. Un magicien demande à un spectateur : "pensez à un nombre, multipliez le par 2, enlever 3 au résultat, multipliez le tout par 6". Le spectateur annonce 294. A quel nombre pensait-il ?

Exercice 3.14. Si l'on double la différence entre 24 et le quadruple du nombre cherché, on obtient 15 en plus du double de ce nombre.

Exercice 3.15. Un père est aujourd'hui 4 fois plus vieux que son fils. Dans 6 ans, il aura 3 ans de moins que le triple de l'âge de son fils. Quels sont leur âge respectif ?

Exercice 3.16. Le réservoir d'une voiture est rempli jusqu'à un tiers. On rajoute 42 litres pour le remplir. Quelle est sa contenance ?

Exercice 3.17. Un livre a 240 pages ayant chacune le même nombre de lignes. Si l'on mettait 3 lignes de plus par page, le livre aurait alors 24 pages de moins. Quel est le nombre total de lignes de ce livre ?

Exercice 3.18. Dans un hôtel, la moitié des vacanciers sont belges, un tiers néerlandais, un septième français et les trois derniers sont espagnols. Combien y a-t-il de vacanciers dans le village ?

Exercice 3.19. En fabriquant des marches ayant 1,6 cm de plus en hauteur, on pourrait économiser deux marches dans un escalier de vingt-deux marches. Quelle est la hauteur de l'escalier ?

Exercice 3.20. Si l'on augmente l'un des côtés d'un carré de 1,30 m et que l'on diminue l'autre de 80 cm, on obtient un rectangle de même aire que le carré primitif. Quel est le côté de ce carré ?

Exercice 3.21. Un rectangle a une longueur de $5x$ et une largeur de $4x$. Si on augmente sa longueur de 18 cm et si on double sa largeur, ce rectangle devient un carré. Quelles sont les dimensions initiales du rectangle ?

Exercice 3.22. On a partagé 710 francs entre 40 personnes. Chaque homme a reçu 15 francs et chaque femme 20 francs. Combien compte-t-on d'hommes et de femmes ?

Exercice 3.23. Dans une ferme, se trouvent des poules et des lapins. On compte 70 pattes et 25 têtes. Combien y-a-t-il de poules et de lapins ?

Exercice 3.24. Combien de pièces de 5 francs et de 2 francs faut-il pour obtenir la somme de 115 francs, sachant que l'on doit avoir en tout 32 pièces ?

Exercice 3.25. 36 personnes ont mangé dans un restaurant. Le menu adulte est à 22 francs et le menu enfant est à 9 francs. Sachant que le patron a fait une recette de 623 francs, combien a-t-il servi de menus enfants et adultes ?

Exercice 3.26. Pour 5 m de soie et 4 m de drap on a payé 256 francs et pour 4 m de soie et 5 m de drap on a payé 248 francs. Quel est le prix du mètre de chaque étoffe ?

Exercice 3.27. L'usine A a deux fois plus d'ouvriers que l'usine B. Le quart des ouvriers de A et le cinquième des ouvriers de B remplissent sept bus de 25 places. Combien y a-t-il d'ouvriers dans chaque usine ?

Exercice 3.28. Une somme a été partagée également entre un certain nombre de personnes. S'il y avait eu 6 personnes de plus, chacune aurait reçu 2 francs de moins. S'il y avait eu 3 personnes de moins, chacune aurait reçu 2 francs de plus. Déterminer le nombre de personnes et la part de chacune.

Exercice 3.29. Un facteur se rend chez un particulier. Ils commencent à discuter ensemble. Le facteur demande alors :

— "Vous avez des filles, vous ?"

— "Oui, trois."

— "Elles ont quel âge ?"

— "Et bien, c'est simple : le produit de leur âge fait 36 et la somme de leur âge correspond au numéro de la maison en face."

— "Il me manque un indice."

— "Oui pardon : l'ainée de mes filles est blonde."

— "Ah oui, maintenant je sais !"

Quel est donc l'âge des trois filles ?

Exercice 3.30. Un troupeau est constitué de chameaux et de dromadaires. On compte 180 têtes et 304 bosses. Combien y a-t-il d'anumaux de chaque espèce ?

Exercice 3.31. Un réparateur informatique facture 120 francs de l'heure quand il se déplace et 80 francs de l'heure quand il envoie son collaborateur. Le client reçoit une facture de 1120 francs. Sachant que le réparateur a passé deux fois moins de temps chez le client que de son collaborateur, combien de temps chacun a-t-il passé avec son client ?

Exercice 3.32. Une pelouse a la forme d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur. Une allée de 3 m de large entoure cette pelouse. Calculer la largeur de la pelouse, sachant que l'aire totale, pelouse et allée est de 360 m^2.

3.4 Equations du deuxième degré

Définition. On appelle *équation quadratique* ou *équation du deuxième degré* toute équation dont un exposant d'une inconnue au moins vaut au plus deux.

a) **Résoudre des équations du type $ax^2 + c = 0$.**

Exemple.

$$\begin{array}{rcl|l} x^2 - 144 &=& 0 & +144 \\ x^2 &=& 144 & \sqrt{\ } \\ x &=& \pm 12. & \end{array}$$

Remarque. Lorsqu'on utilise une racine carrée ou n'importe quelle racine de degré pair, on considère toujours la valeur positive et négative. En effet, $12^2 = 144$ mais également $(-12)^2 = 144$.

b) **Résoudre des équations du type $ax^2 + bx = 0$.**
Dans un tel cas, il est possible de mettre x en évidence.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl|l} 3x^2 - 9x &=& 0 & \text{Mise en évidence} \\ x(3x-9) &=& 0. & \end{array}$$

Donc soit $x = 0$, soit $3x - 9 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$.
Les solutions sont donc $x = 0$ et $x = 3$.

c) **Résoudre des équations générales $ax^2 + bx + c = 0$.**
Il est parfois possible de factoriser à l'aide d'identités remarquables ou par tâtonnement. Autrement, il existe une formule permettant de déterminer les solutions.

$$\boxed{\text{L'équation } ax^2 + bx + c = 0 \text{ admet les solutions } x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.}$$

Cette dernière relation porte le nom de *Formule de Viète*.

On pose $\Delta \overset{\text{déf}}{=} b^2 - 4ac$, le *discriminant* de l'équation, où Δ est la majuscule grecque "*delta*".

Trois cas peuvent alors se présenter :

- $\Delta < 0$ et alors l'équation n'admet pas de solution (réelle).
- $\Delta = 0$ et alors l'équation admet une unique solution.
- $\Delta > 0$ et alors l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 données par

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.}$$

Exemple.

Soit l'équation $x^2+6=5x$.	
$\begin{aligned} x^2+6 &= 5x \quad \Big\vert -5x \\ x^2-5x+6 &= 0 \end{aligned}$	**Etape 1 :** Déplacer tous les termes du même côté du signe $=$.
$a=1$, $b=-5$ et $c=6$.	**Etape 2 :** Identifier les coefficients a, b et c.
$\begin{aligned} \Delta &= b^2-4ac \\ &= (-5)^2-4\cdot 1\cdot 6 \\ &= 25-24 \\ &= 1. \end{aligned}$	**Etape 3 :** Commencer par calculer Δ. On observe que nous aurons donc deux solutions distinctes.
$\begin{aligned} x_{1;2} &= \tfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \tfrac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} \\ &= \tfrac{5\pm 1}{2} \\ & x_1=3 \text{ et } x_2=2. \end{aligned}$	**Etape 4 :** Application de la formule de Viète.
Ainsi, les solutions sont $x=3$ et $x=2$.	

Exercice 3.33. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $x^2=4$ b) $x^2-49=0$
c) $x^2+100=0$ d) $x^2-5x=0$
e) $x^2=4x$ f) $3x^2-12=0$

Exercice 3.34. Résoudre les équations suivantes à l'aide de la formule de Viète ou à l'aide de toute autre méthode.

a) $6x^2-30x-144=0$ b) $12x^2+36x-120=0$
c) $16x^2-64x+64=0$ d) $9x^2+42x+69=0$
e) $3x^2-132=21x$ f) $4x(x+2)=32$
g) $2x^2-\dfrac{11x}{10}-\dfrac{3}{10}=0$ h) $x(x+1)=2(x+1)$
i) $-\dfrac{x^2}{8}+(x-1)(x+1)+\dfrac{1}{8}=0$ j) $\dfrac{1}{2}(9-x)+\dfrac{4}{3}(x-3)^2-\dfrac{5}{6}=0$
k) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{x^2}{3}$ l) $(2x-3)(3x-2)-(3x-1)(x+3)=9-21x$

3.5 Equations bicarrées

Définition. Une *équation bicarrée* est une équation du type $ax^4+bx^2+c=0$.

La formule de Viète ne permettant que de résoudre des équations du deuxième degré, il est nécessaire d'effectuer un changement de variable.

Exemple.

Soit à résoudre $2x^4 - 6x^2 - 8 = 0$.	
$$\begin{array}{rcl\|l} 2x^4 - 6x^2 - 8 & = & 0 & u = x^2 \\ 2u^2 - 6u - 8 & = & 0 & \end{array}$$	**Etape 1 :** Procéder au changement de variable. On définit u comme étant x^2, on a donc $x^2 = u$ et par conséquent $x^4 = u^2$.
$u_{1;2} = \dfrac{6 \pm 10}{4}$ $u_1 = 4$ et $u_2 = -1$.	**Etape 2 :** Résoudre à l'aide de la formule de Viète. Attention, nous obtenons la (ou les) valeur(s) de u.
$$\begin{array}{rcl\|l} x^2 & = & 4 & \sqrt{\ } \\ x & = & \pm 2 & \end{array}$$ et $x^2 = -1 \;\|\; \sqrt{\ }$ Pas de solution !	**Etape 3 :** En déduire les valeurs de x. On utilise le fait que $x^2 = u$.
Ainsi, les solutions sont $x = 2$ et $x = -2$.	

Exercice 3.35. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $3x^4 - 12x^2 = 0$	b) $x^4 + 9x^2 + 18 = 0$
c) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$	d) $x^4 - 41x^2 + 400 = 0$
e) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$	f) $8x^6 - 63x^3 - 8 = 0$
g) $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$	h) $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$

3.6 Equations irrationnelles

Définition. Une équation est dite *irrationnelle* si elle possède au moins une inconnue sous un radical (une racine).

Exemple.

Soit à résoudre $\sqrt{2x-1} - 3 = -2x$.	
$$\begin{array}{rcl\|l} \sqrt{2x-1} - 3 & = & -2x & +3 \\ \sqrt{2x-1} & = & 3 - 2x & \end{array}$$	**Etape 1 :** Isoler la racine.
$$\begin{array}{rcl\|l} \sqrt{2x-1} & = & 3 - 2x & (...)^2 \\ \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 & = & (3-2x)^2 & \\ 2x - 1 & = & 9 - 12x + 4x^2 & \end{array}$$	**Etape 2 :** On élève au carré de chaque côté de l'égalité. **Attention aux identités remarquables !**

$x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{5}{2}$.	**Etape 3 :** Résoudre l'équation obtenue.
$x_1 = 1 \quad \underbrace{\sqrt{2 \cdot 1 - 1} - 3}_{=-2} = \underbrace{-2 \cdot 1}_{=-2}$ OK $x_2 = 2,5 \quad \underbrace{\sqrt{2 \cdot 2,5 - 1} - 3}_{=-1} \neq \underbrace{-2 \cdot 2,5}_{=-5}$ KO	**Etape 4 :** Vérifier les solutions !
L'unique solution est $x = 1$.	

Exercice 3.36. Résoudre les équations suivantes.

a) $\sqrt{x-1} = 7$	b) $\sqrt{7-5x} = 8$
c) $\sqrt{x+4} = 9$	d) $-\frac{1}{2}\sqrt{2x-5} = 12$
e) $3\sqrt{x-2} = 4 - \sqrt{x-2}$	f) $3(\sqrt{x}+1) + 2\sqrt{x} = 5$
g) $x + \sqrt{3x+1} = 1$	h) $8 - 3\sqrt{2x-1} = 2$
i) $x - 2 = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$	j) $x - \sqrt{3x+25} = 15$
k) $\sqrt{2x^2 - 5x + 7} = 7 + x$	l) $x - \sqrt{4x-19} = 4$

3.7 Solutions

Exercice 3.1.

a)	$x=5$	$x=-\frac{8}{3}$	$\boxed{x=\frac{7}{2}}$	$x=7$	$\boxed{x=\frac{21}{6}}$
b)	$\boxed{x=0}$	$\boxed{x=-4}$	$\boxed{x=\frac{4}{5}}$	$\boxed{x=9}$	$\boxed{x=16}$
c)	$x=4$	$\boxed{x=-3}$	$x=-5$	$\boxed{x=3}$	$x=6$
d)	$\boxed{x=12}$	$x=-7$	$x=6$	$x=-12$	$x=1$
e)	$x=7$	$x=9$	$x=-4$	$x=8$	$\boxed{x=-13}$
f)	$\boxed{x=2}$	$x=3$	$x=8$	$x=-8$	$x=-2$

Exercice 3.2.

a) $x=\frac{5}{3}$ b) $x=-\frac{7}{2}$

c) $x=1$ d) $x=0$

e) $y=\frac{26}{7}$ f) $y=-\frac{1}{3}$

Exercice 3.3.

a) $x=\frac{35}{17}$ b) $x=5$

c) $x=\frac{51}{5}$ d) $x=-\frac{24}{29}$

e) $x=\frac{7}{31}$ f) Pas de solution

g) Infinité de solutions h) $x=\frac{1}{6}$

Exercice 3.4.

a) $x=\frac{85}{8}$ b) $x=-\frac{245}{2}$

c) $x=-\frac{39}{7}$ d) $x=\frac{31}{5}$

e) $x=-\frac{18}{13}$ f) $x=-\frac{14}{67}$

g) $x=48$ h) Pas de solution

i) $x=5$ j) $x=-\frac{6}{7}$

Exercice 3.5.

a) $y = 5a$ b) $x = 2a + \frac{3}{4}b$

c) $x = 15f - 5b$ d) $r = \frac{P}{2\pi}$

e) $h = \frac{2A}{b}$ f) $r = \pm\sqrt{\frac{E}{m}}$

Exercice 3.6.

a) $m = 12$ b) $m = -\frac{2}{3}$

c) $m = \frac{1}{4}$ d) Pas de solution

Exercice 3.7.

a) $(x; y) = (-2; 5)$ b) $(x; y) = (12; 5)$
c) $(x; y) = (-1; -2)$ d) Infinité de solutions
e) Pas de solution f) $(x; y) = (3; -4)$

Exercice 3.8.

a) $(x; y) = (2; -2)$ b) $(x; y) = (1; 3)$
c) Pas de solution d) $(x; y) = (3; 5)$
e) $(x; y) = (9; 7)$ f) Infinité de solutions

Exercice 3.9.

a) $(x; y) = (20; 30)$ b) $(x; y) = \left(\frac{152}{11}; \frac{10}{11}\right)$

c) $(x; y) = (1; -1)$ d) $(x; y) = (8; 4)$
e) Infinité de solutions f) $(x; y) = (45; 0)$

g) Pas de solution h) $(x; y) = \left(\frac{2652}{211}; \frac{1806}{211}\right)$

Exercice 3.10. $3x = x + 10$, d'où $x = 5$ cm.

Exercice 3.11. 327, 328 et 329.

Exercice 3.12. 12.

Exercice 3.13. Il pensait à 26.

Exercice 3.14. $3,3$.

Exercice 3.15. 9 et 36 ans.

Exercice 3.16. 63 litres.

Exercice 3.17. 6480 lignes.

Exercice 3.18. 126 vacanciers.

Exercice 3.19. $3,52$ m.

Exercice 3.20. Côté du carré : $2,08$ m.

Exercice 3.21. Longueur : 30 cm, largeur : 24 cm.

Exercice 3.22. 18 hommes et 22 femmes.

Exercice 3.23. 15 poules et 10 lapins.

Exercice 3.24. 15 pièces de 2 francs et 17 de 5 francs.

Exercice 3.25. 13 menus enfants et 23 menus adultes.

Exercice 3.26. Soie : 32 francs le mètre et 24 francs le mètre de drap.

Exercice 3.27. 500 ouvriers pour l'usine A et 250 ouvriers pour l'usine B.

Exercice 3.28. 12 personnes reçoivent chacune 6 francs.

Exercice 3.29. 2 ans, 2 ans et 9 ans.

Exercice 3.30. 124 chameaux et 56 dromadaires.

Exercice 3.31. 4 heures pour le réparateur et 8 heures pour le collaborateur.

Exercice 3.32. 9 m.

Exercice 3.33.

a) $x = 2$, $x = -2$
b) $x = 7$, $= -7$
c) Pas de solution
d) $x = 0$, $x = 5$
e) $x = 0$, $x = 4$
f) $x = 2$, $x = -2$

Exercice 3.34.

a) $x = -3$, $x = 8$
b) $x = -5$, $= 2$
c) $x = 2$
d) Pas de solution
e) $x = -4$, $x = 11$
f) $x = -4$, $x = 2$
g) $x = -\frac{1}{5}, x = \frac{3}{4}$
h) $x = 2$, $x = -1$
i) $x = 1$, $x = -1$
j) Pas de solution
k) $x = \sqrt{\frac{15}{8}}, x = -\sqrt{\frac{15}{8}}$
l) $x = 0$

Exercice 3.35.

a) $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$
b) Pas de solution
c) $x = \sqrt{5}$, $x = -\sqrt{5}$, $x = 2$, $x = -2$
d) $x = 4$, $= -4$, $x = 5$, $x = -5$
e) $x = 5$, $x = -5$, $x = 2$, $x = -2$
f) $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$
g) $x = 2$, $x = -2$, $x = 3$, $x = -3$
h) $x = -2$, $x = 1$

Exercice 3.36.

a) $x = 50$

b) $x = -\dfrac{57}{5}$

c) $x = 77$

d) Pas de solution

e) $x = 3$

f) $x = \dfrac{4}{25}$

g) $x = 0$

h) $x = \dfrac{5}{2}$

i) $x = 3$

j) $x = 25$

k) $x = 21$, $x = -2$

l) $x = 5$, $x = 7$

3.8 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

3.1 ☐ Résoudre une équation du premier degré à une inconnue.
3.2 ☐ Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par substitution.
3.3 ☐ Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par addition.
3.4 ☐ Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la méthode la plus appropriée.
3.5 ☐ Résoudre un problème en mettant en équation(s).
3.6 ☐ Résoudre une équation du deuxième degré à l'aide de la formule de Viète ou de toute autre méthode.
3.7 ☐ Résoudre une équation bicarrée.
3.8 ☐ Résoudre une équation irrationnelle.

Chapitre 4

Fonctions

4.1 Introduction

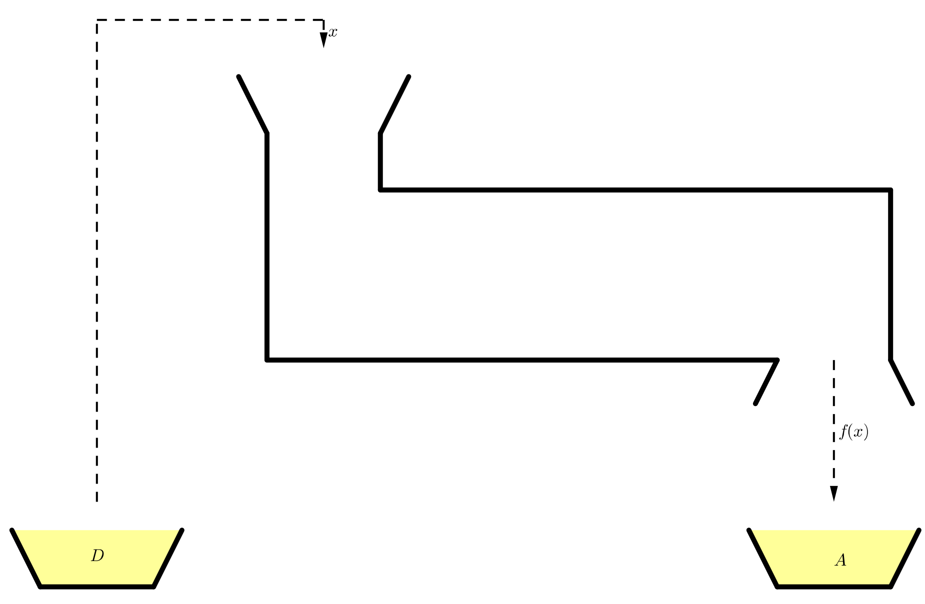
Le terme de *fonction* s'utilise dans le langage courant. Par exemple, le prix d'un billet de train dépend de la longueur du trajet. On dit que le prix est *fonction* de cette longueur. L'aire d'un disque dépend de son rayon. Son aire est donc *fonction* de son rayon.

4.2 Notion de fonction

Définition. On appelle *fonction* toute correspondance qui, à chaque nombre $x \in D$ (ensemble de départ) associe un et un seul nombre $y = f(x) \in A$ (ensemble d'arrivée).

Une fonction se note souvent sous la forme

$$\begin{array}{rcccl} f & : & D & \to & A \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$



1. L'élément $y = f(x)$ est appelé *image* de x par f.
2. L'élément x est appelé *préimage* de y par f.
3. Une formule permettant de calculer les images est appelée *expression fonctionnelle* de f.

Exemple. Avec 1 franc suisse, on obtient $0,87$ euros. Le nombre d'euros que l'on obtiendra dépendra du nombre de francs que l'on changera. On dit alors que le nombre d'euros est fonction du nombre de francs suisses.

Il est possible de représenter cette fonction de différentes manières :

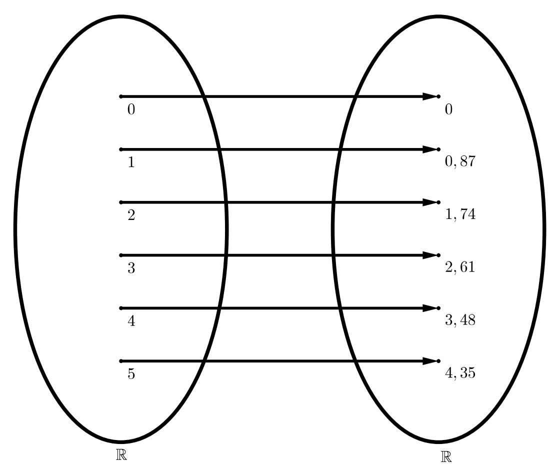
Tableau de valeurs

Le désavantage d'un tableau de valeurs est le fait qu'il ne permet pas de savoir quelles sont les valeurs de f en dehors de celles qui y figurent.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	$0,87$	$1,74$	$2,61$	$3,48$	$4,35$

Diagramme sagittal

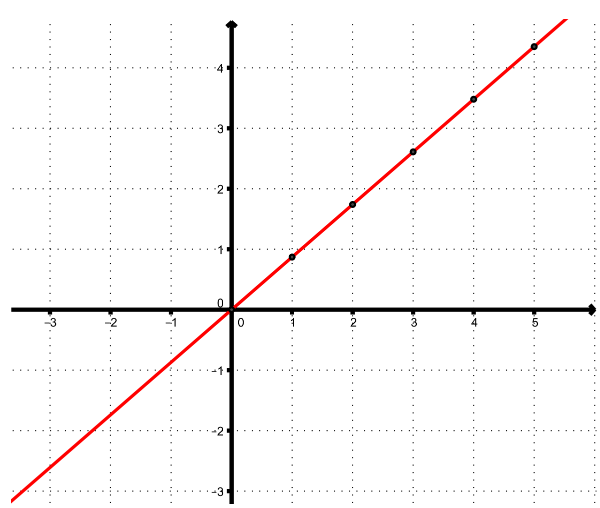
L'inconvénient du diagramme sagittal est le même que celui d'un tableau de valeurs. Il présente cependant l'avantage de mettre en avant les ensembles de départ et d'arrivée et est plus cohérant qu'un tableau de valeurs lorsque les ensembles de départs et d'arrivée ne sont pas numériques.



Graphe

Pour dessiner un graphe, il suffit de choisir une valeur de x, prise dans l'ensemble de départ et de calculer son image $f(x)$. x sera la première coordonnée (*l'abscisse*) du point et $y = f(x)$ sera la deuxième (*l'ordonnée*). Autrement dit, le point sur la verticale correspondant à x sera à hauteur $y = f(x)$. Après avoit calculé les coordonnées de plusieurs points, il suffit de relier les points à la main.

Très pratique et relativement précise, la repréentation graphique d'une fonction reste néanmoins restreinte à une région. Ici, par exemple, le graphe ne montre pas comment la fonction se comporte explicitement pour $x < -3$ (x plus petit que -3) et pour $x > 5$ (x plus grand que 5).



Forme verbale

"A un certain nombre, on fait correspondre son produit par $0,87$".

En fonction de la complexité de la correspondance, il peut être fastidieux de comprendre la phrase la décrivant.

Expression fonctionnelle

L'expression fonctionnelle de f s'écrit

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0,87x \end{array}$$

ou

$$f(x) = 0,87x$$

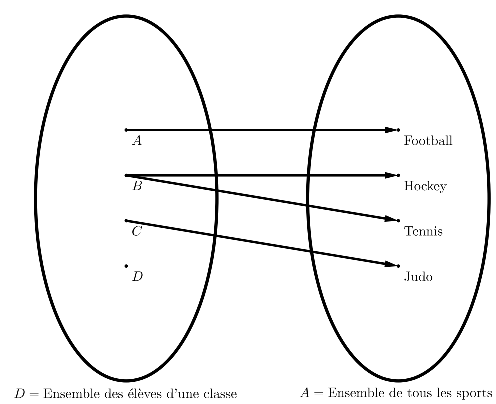
ou

$$y = 0,87x.$$

L'expression fonctionnelle est la meilleure manière de décrire une fonction, car en la connaissant, on peut construire un tableau de valeurs, un diagramme sagittal et un graphe, alors que le contraire n'est pas toujours possible.

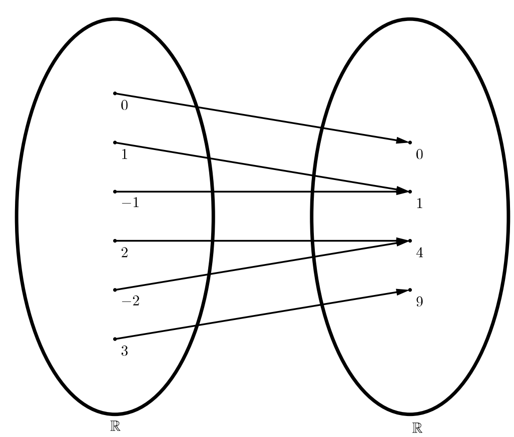
Exemple.

Si D = Ensemble des élèves d'une classe et A = Ensemble des sports, la correspondance ci-contre, qui associe à chaque élève le ou les éventuels sports qu'il apprécie n'est pas une fonction, car deux sports sont associés à B et aucun à D.



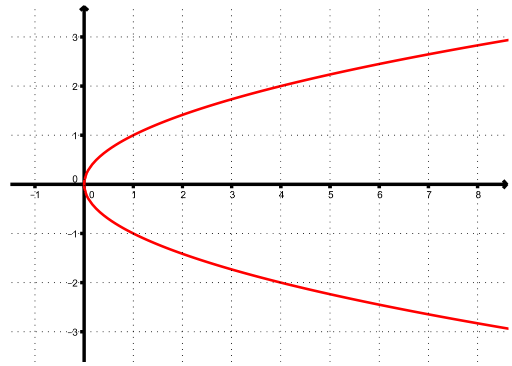
Exemple.

La correspondance ci-contre, qui à chaque nombre réel x associe son carré est une fonction, car à tout nombre réel admet un et un seul carré.



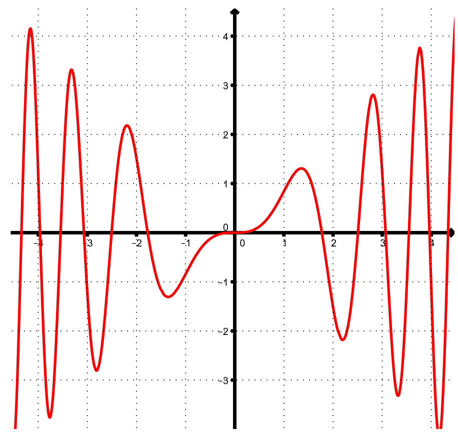
Exemple.

La courbe ci-contre ne représente pas une fonction, car deux images sont assocées à $x = 2$ (entre autres).



Exemple.

La courbe ci-contre est une fonction, car chaque $x \in D = \mathbb{R}$ admet une et une seule image.



Exercice 4.1. Soit la fonction f définie par

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 + 5 \end{array}.$$

a) Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de f ?

b) Quelle est l'expression fonctionnelle de f ?

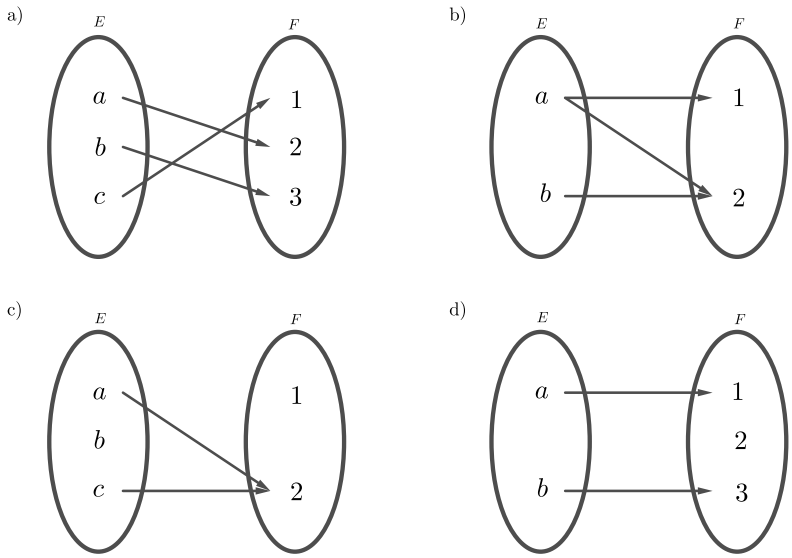
c) Quelle est l'image de 3 par f ?

d) Quelle est l'image de -2 par f ?

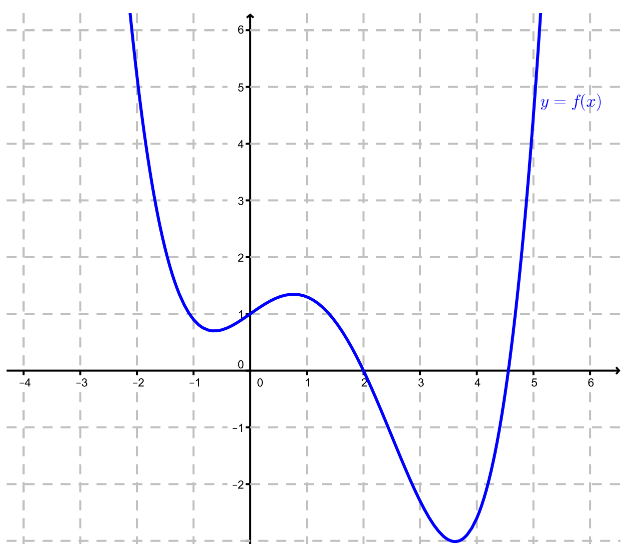
Exercice 4.2. Représenter graphiquement les fonctions f ci-dessous.

a) $y = x$	b) $y = -x$
c) $y = \|x\| - 1$	d) $y = -3$
e) $y = x^3$	f) $y = x^4$

Exercice 4.3. Parmi les diagrammes suivants, lesquels correspondent à des fonctions de E dans F ?



Exercice 4.4. La figure ci-dessous représente le graphe d'une fonction f.



En observant le graphe, estimer

a) La valeur de $f(0)$.

b) La valeur de $f(-2)$.

c) Les valeurs de x sachant que $f(x) = 0$.

d) Les valeurs de x sachant que $f(x) = 1$.

e) La valeur de a sachant que l'équation $f(x) = a$ ne possède qu'une seule solution ? Quelle est cette solution ?

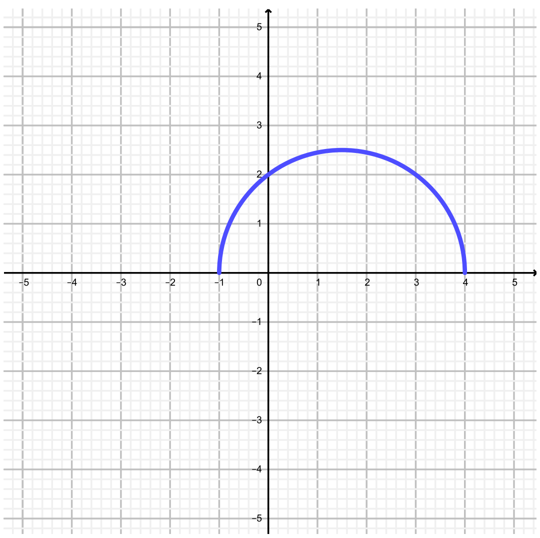
f) Les valeurs de x sachant que $f(x) = x$.

Exercice 4.5. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Déterminer

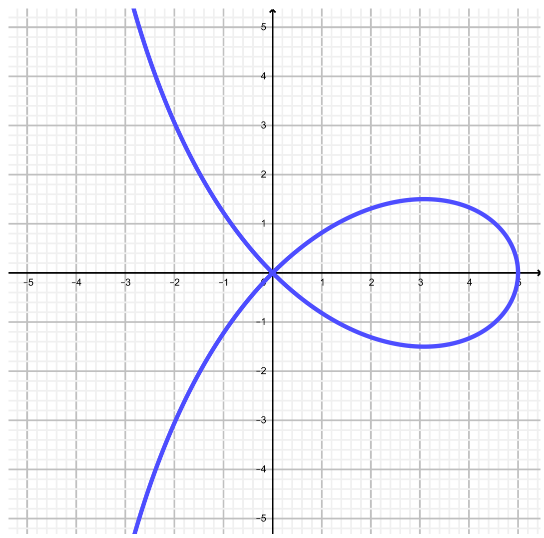
a) $f(3)$	b) $f(-1)$
c) $f(a)$	d) $f(3a)$
e) $f(k-1)$	f) $f(2k-3)$
g) $f(2k) - 3$	h) $f(2+k) - f(2)$

Exercice 4.6. En utilisant la technique de la ligne verticale, determiner si les graphiques suivants représentent des fonctions ou pas.

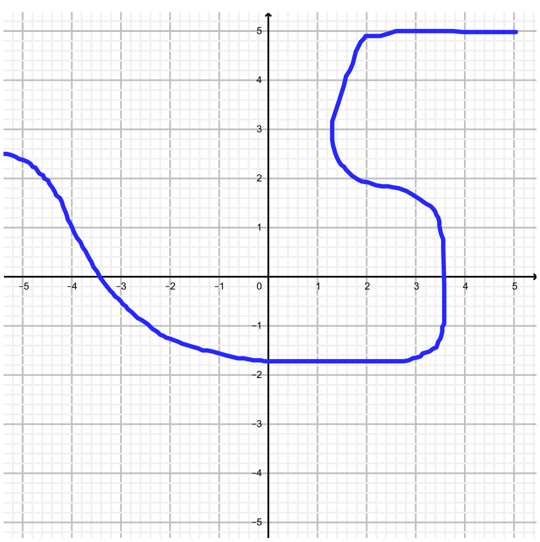
a)



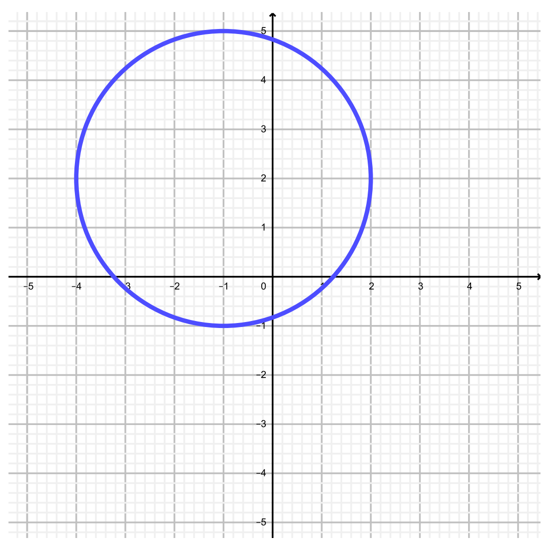
b)



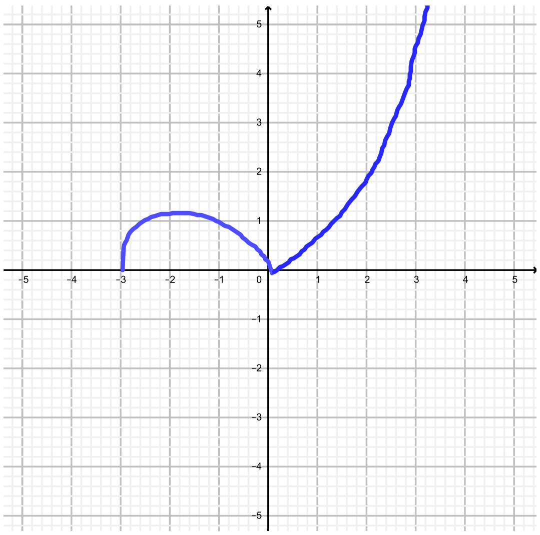
c)



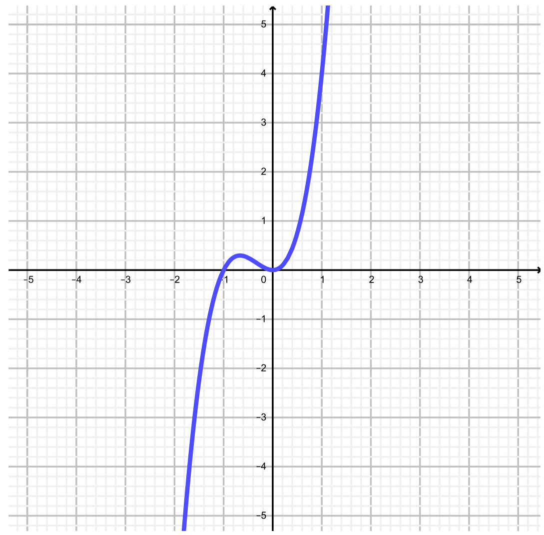
d)



e)



f)



Exercice 4.7. Expliquer pourquoi on ne peut pas trouver une fonction qui, à x envoie y.

x	-2	1	0	2	-1	1
y	-4	3	-3	5	2	4

Exercice 4.8. Compléter les tableaux suivants représentant des fonctions.

a)

3	1	10			x
-9	-3	-30	48	-66	

b)

-10	0	1	5	10	x
95	-5	-4			

c)

4		15	11		x
$1,\overline{3}$	6	5	$3,\overline{6}$	$-1,\overline{6}$	

d)

100	200	300		60	x
20	30	40	55		

e)

9	36		100		x
$1,5$	3	4	5	$4,5$	

f)

	4	1	5	6	x
8	64	1	125		

g)

-1	0	6	$\frac{3}{2}$		x
-5	-3		0	13	

h)

-20	20	0	-25	25	x
15	25	5	20	30	

Exercice 4.9. Soit la fonction f définie par

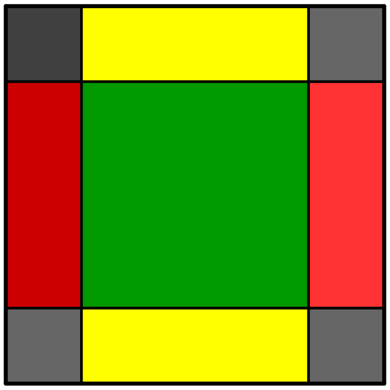
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}.$$

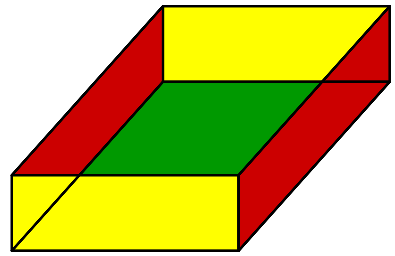
Calculer

a) $f(-3)$ b) $f(0)$

c) $f(1)$ d) $f(2)$

Exercice 4.10. Une entreprise fabrique des boîtes sans couvercle en découpant quatre carrés identiques de côté x dans les quatre coins d'une plaque métallique de dimensions 10 cm$\times$10 cm, puis en relevant les bords.





a) Calculer le volume de la boîte avec $x = 3$.

b) Déterminer l'expression mathématique qui établit la relation entre la mesure x et le volume $V(x)$ de la boîte.

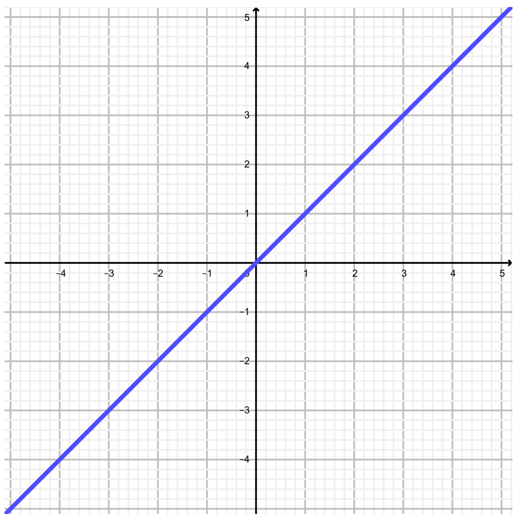
4.3 Solutions

Exercice 4.1.

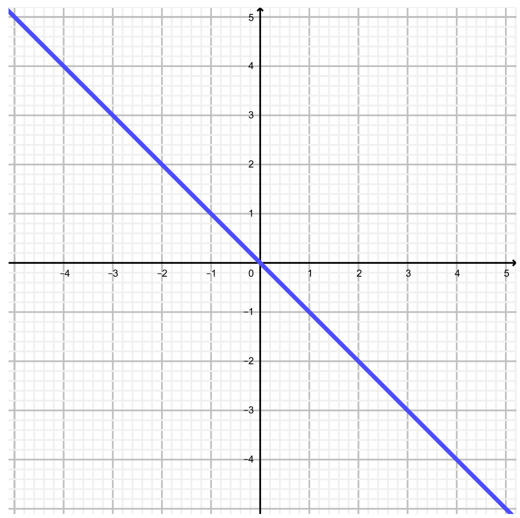
a) $E = \mathbb{Z}$ et $F = \mathbb{R}$	b) $f(x) = x^2 + 5$
c) $f(3) = 14$	d) $f(-2) = 9$

Exercice 4.2.

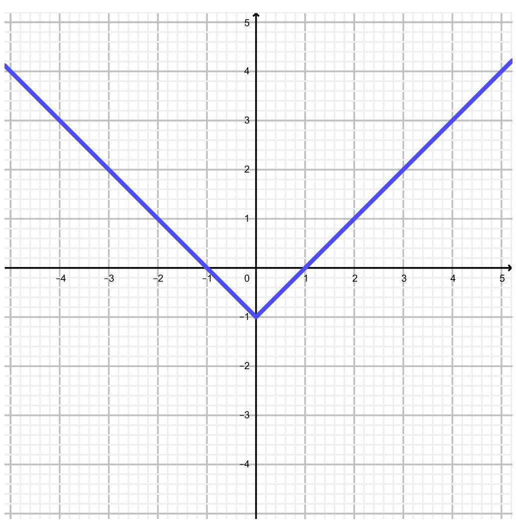
a)



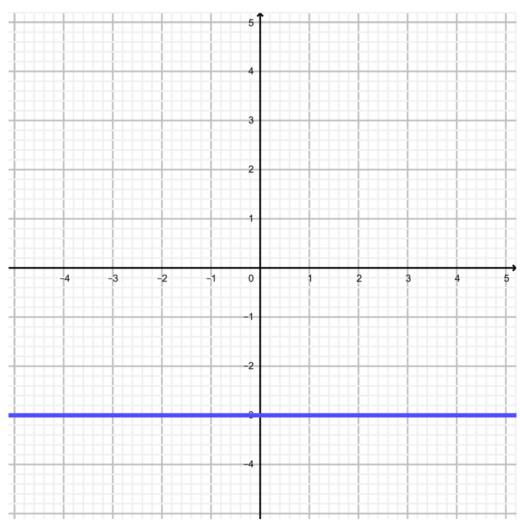
b)



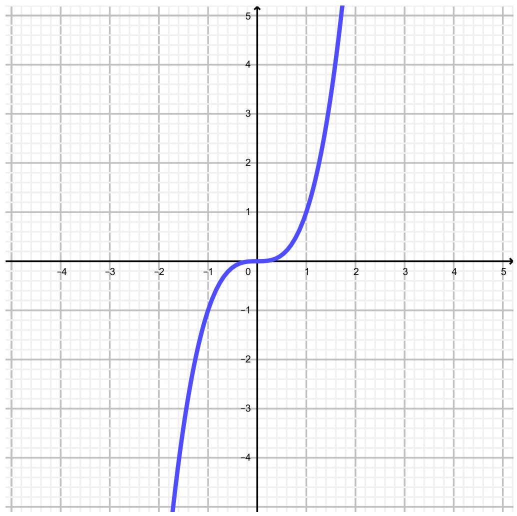
c)



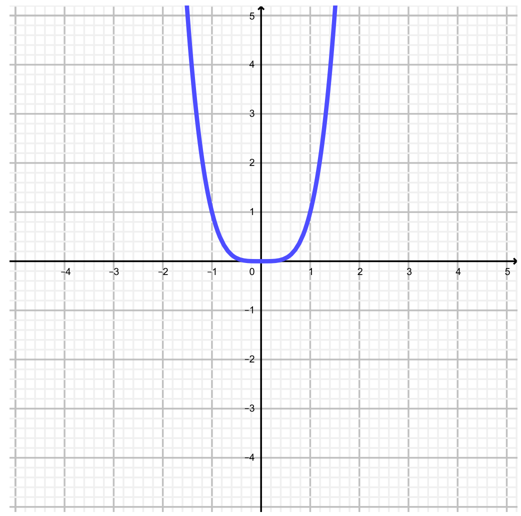
d)



e)



f)



Exercice 4.3. a) et d).

Exercice 4.4.

a) $f(0) = 1$
b) $f(-2) \cong 5$
c) $x = 2$ et $x \cong 4,56$
d) $x \cong -1, x = 0, x \cong 1,4$ et $x \cong 4,75$
e) $a = -3$
f) $x \cong 1,19$ et $x = 5$

Exercice 4.5.

a) 6
b) 6
c) $a^2 - 2a + 3$
d) $9a^2 - 6a + 3$
e) $k^2 - 4k + 6$
f) $4k^2 - 16k + 18$
g) $4k^2 - 4k$
h) $k^2 + 2k$

Exercice 4.6.

a) Oui
b) Non
c) Non
d) Non
e) Oui
f) Oui

Exercice 4.7. 1 a deux images différentes.

Exercice 4.8.

a)

3	1	10	-16	22	x
-9	-3	-30	48	-66	$-3x$

b)

-10	0	1	5	10	x
95	-5	-4	20	95	x^2-5

c)

4	18	15	11	-5	x
$1,\overline{3}$	6	5	$3,\overline{6}$	$-1,\overline{6}$	$\frac{x}{3}$

d)

100	200	300	450	60	x
20	30	40	55	16	$\frac{x}{10}+10$

e)

9	36	64	100	81	x
$1,5$	3	4	5	$4,5$	$\frac{\sqrt{x}}{2}$

f)

2	4	1	5	6	x
8	64	1	125	216	x^3

g)

-1	0	6	$\frac{3}{2}$	8	x
-5	-3	9	0	13	$2x-3$

h)

-20	20	0	-25	25	x
15	25	5	20	30	$\lvert x+5\rvert$

Exercice 4.9.

a) $f(-3) = -\dfrac{4}{5}$ b) $f(0) = \dfrac{1}{4}$

c) $f(1) = 0$ d) $f(2)$ n'est pas défini

Exercice 4.10.

a) $V = 48$ cm^3.

b) $V(x) = x \cdot (10-2x)^2$.

4.4 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

4.1 ☐ Maîtriser le vocabulaire des fonctions.
4.2 ☐ Représenter le graphe d'une fonction.
4.3 ☐ Déterminer si une correspondance est une fonction.
4.4 ☐ Lire le graphe d'une fonction.
4.5 ☐ Evaluer une fonction pour différentes valeurs de x.

Chapitre 5

Fonctions du premier degré

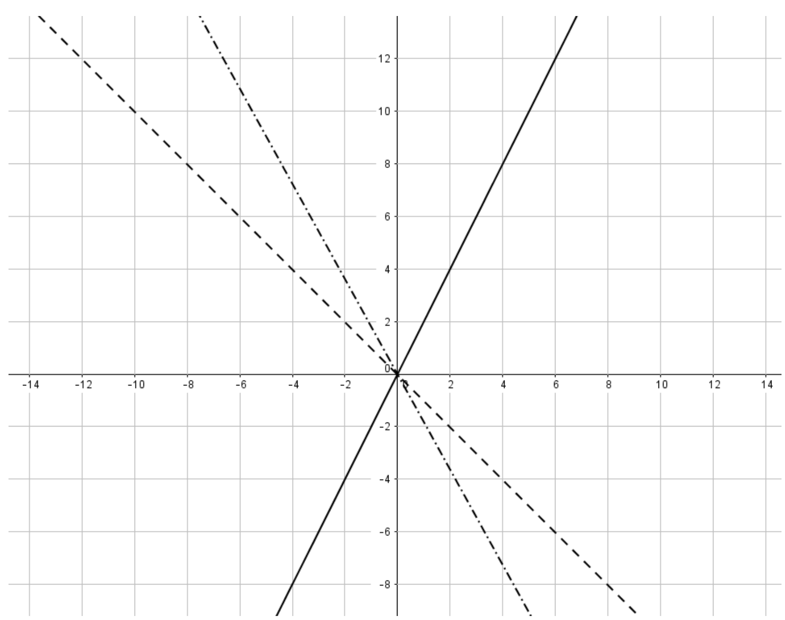
Définition. Une fonction est dite du *premier degré* si le degré de son expression fonctionnelle vaut 1. On en distingue deux types.

5.1 Fonctions linéaires

Définition. Une fonction est dite *linéaire* s'il y a uniquement un facteur de proportionnalité entre x et $f(x)$. Son expression est donc de la forme

$$\boxed{f(x) = p \cdot x \text{ ou } y = p \cdot x \text{ avec } p \in \mathbb{R}.}$$

Exemple. $f(x) = 2x$, $y = -x$, $y = -\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot x$ sont des fonctions linéaires. Graphiquement, une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine. La valeur de p détermine la *pente* de cette droite.



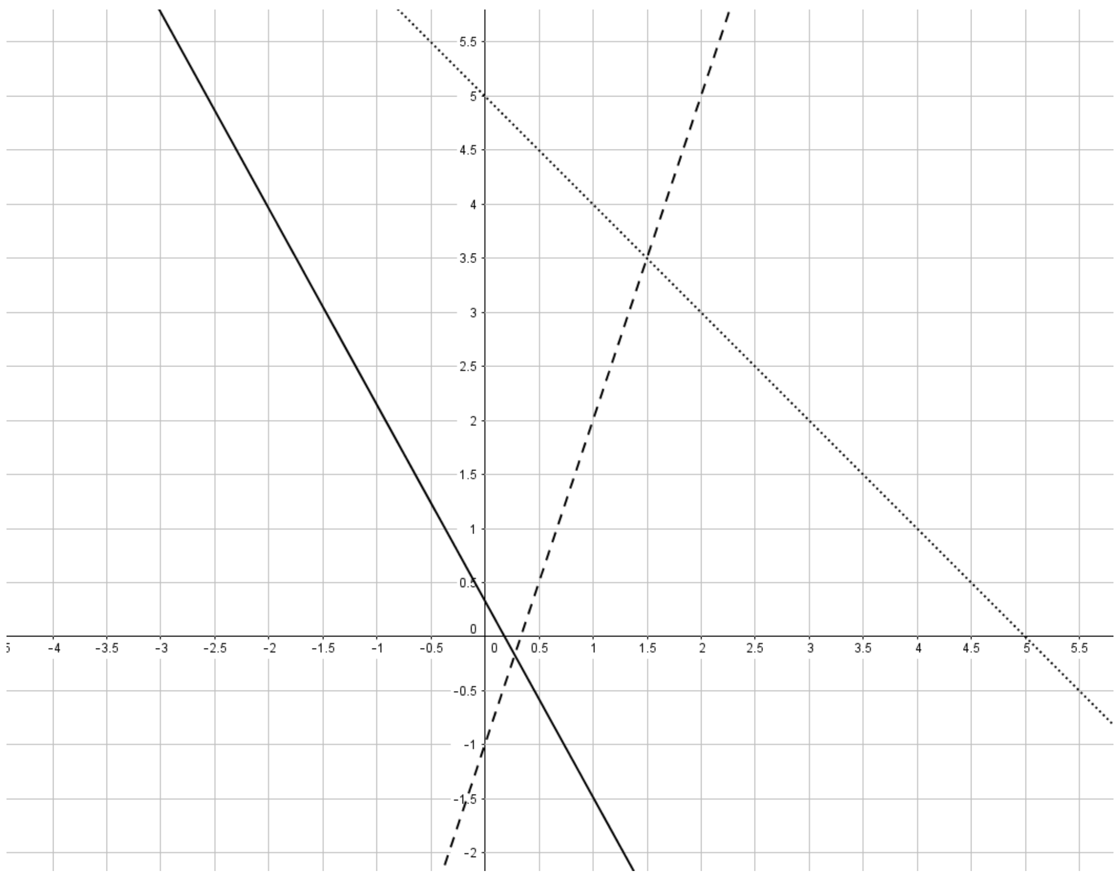
5.2 Fonctions affines

Définition. Une fonction est dite *affine* si son expression fonctionnelle est de la forme

$$\boxed{f(x) = px + h \text{ ou } y = px + h \text{ avec } p, h \in \mathbb{R}.}$$

Exemple. $f(x) = 3x - 1$, $y = -x + 5$, $y = -\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{3}$ sont des fonctions affines.

Graphiquement, une fonction affine est une droite qui ne passe pas par l'origine. La valeur de p détermine la *pente* et celle de h *l'ordonnée à l'origine* (c'est-à-dire la hauteur à laquelle la droite coupe l'axe O_y).

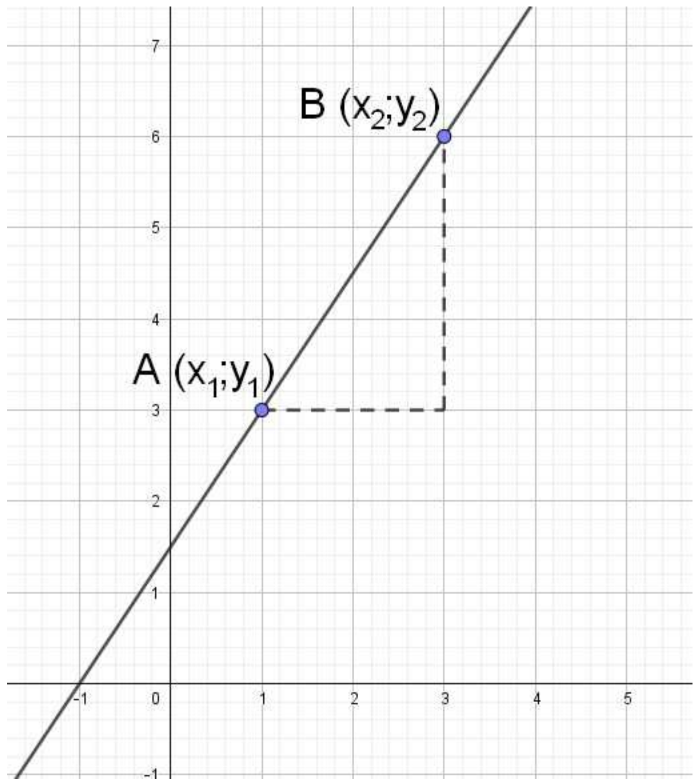


Exercice 5.1. Représenter graphiquement les fonctions ci-dessous.

a) $y = 2x$	b) $y = -2x$
c) $y = \dfrac{1}{2}x$	d) $y = -1$
e) $y = x + 3$	f) $y = 2x + 1$
g) $y = -2x - 3$	h) $y = 4x - 6$

5.3 Pente d'une droite

Définition. La *pente* d'une droite est le rapport entre la différence de hauteur et la différence de longueur entre deux points de la droite.



Si une droite passe par les deux points $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$, alors la pente est définie par

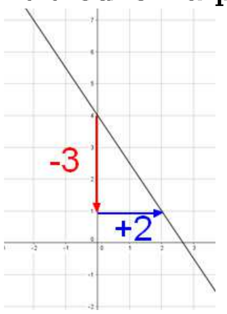
$$\boxed{p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.}$$

Remarque.

La pente d'une droite peut également s'exprimer en pourcent, comme c'est le cas des panneaux routiers. Dans le cas d'une pente de 10%, cela signifie que sur une distance horizontale de 100 m, on monte ou descend d'une hauteur de 10 m.

Exemple.

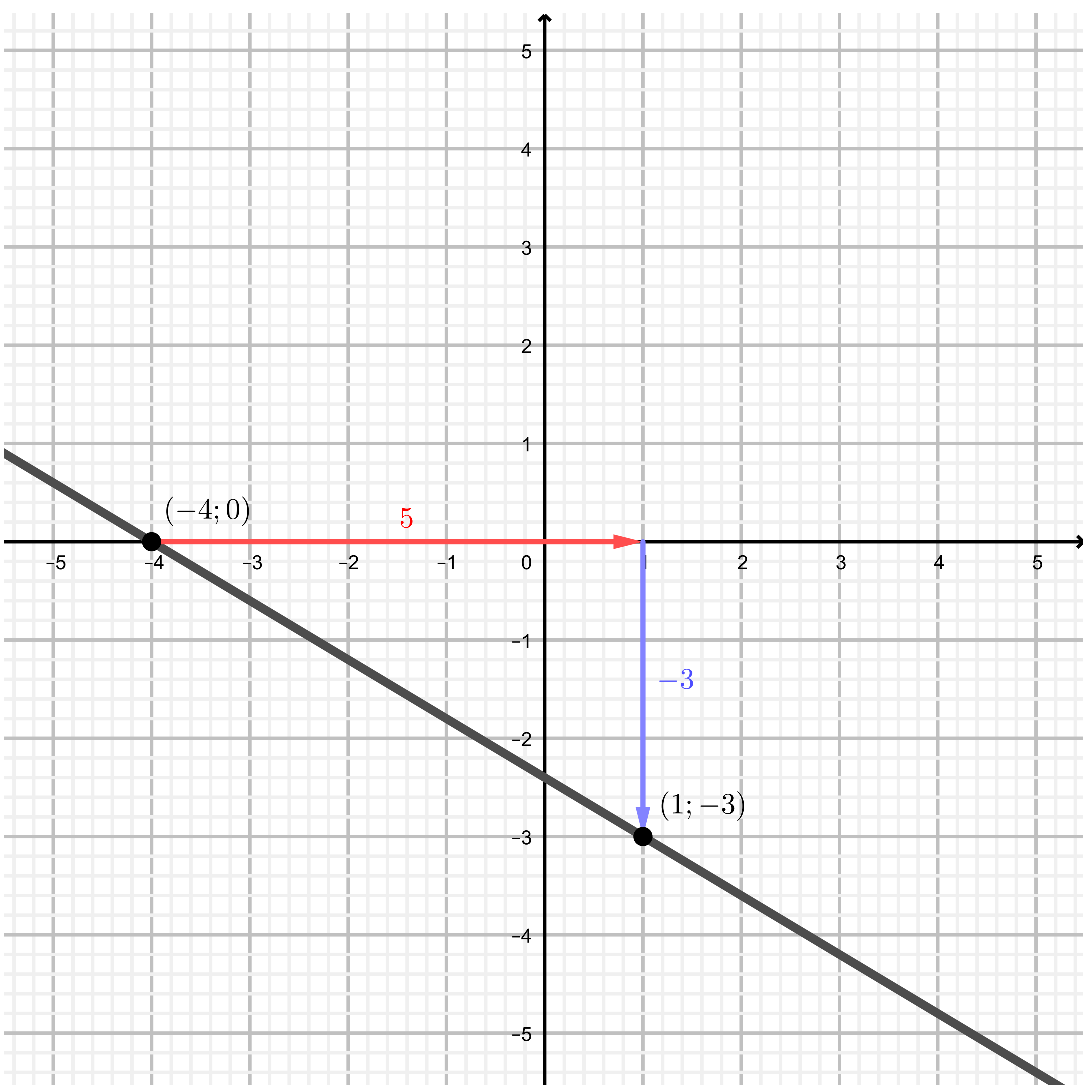
1. **Comment trouver la pente d'une droite à partir de son graphe ?**



On choisit deux points sur la droite et l'on déduit la différence de hauteur et la différence horizontale entre les deux points. Dans l'exemple ci-contre, $\Delta y = -3$ et $\Delta x = 2$. Donc la pente est donnée par $p = -\frac{3}{2}$.

2. **Comment trouver la pente d'une droite à partir de deux de ses points ?**
Soient $(1;-3)$ et $(-4;0)$, deux points d'une droite. Sa pente vaudra donc

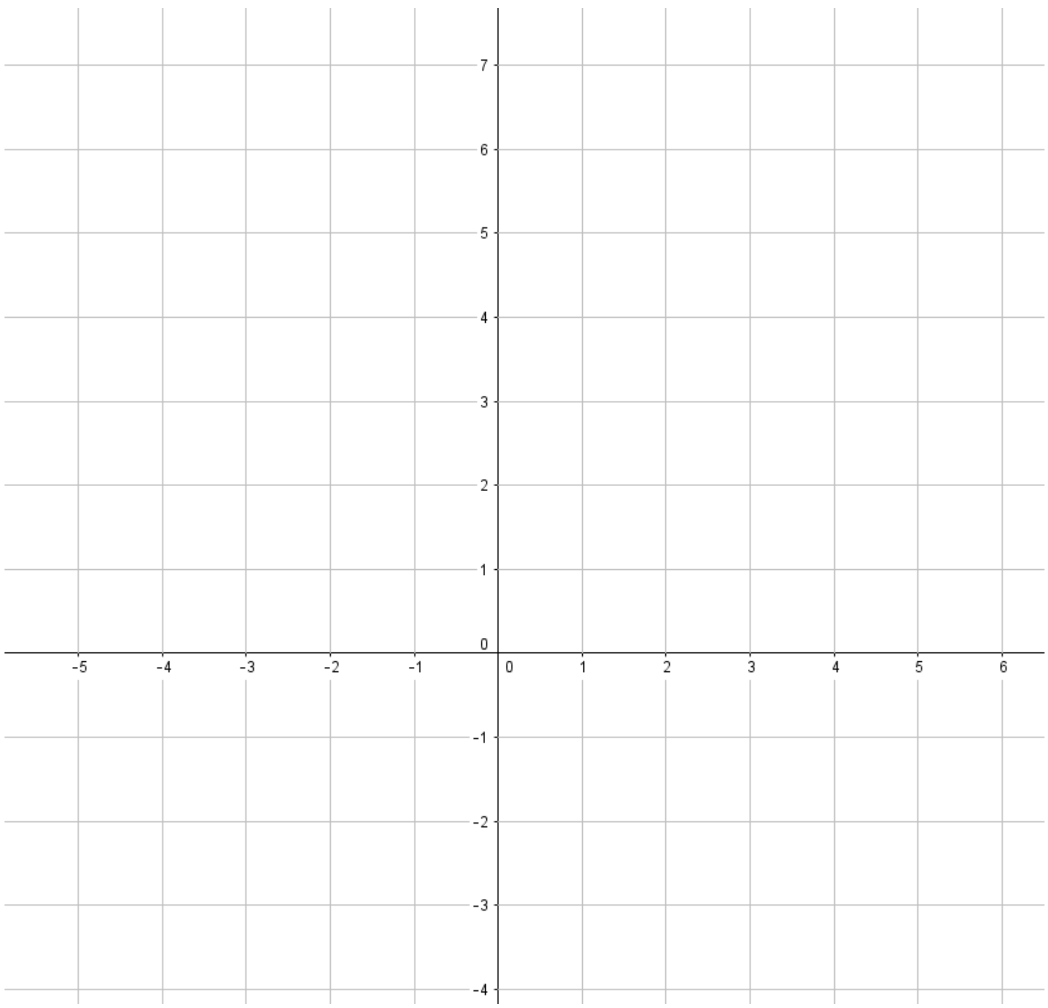
$$p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-3)}{-4-1} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}.$$



5.4 Graphe

Avant de tracer une droite à partir de son équation, il faut tout d'abord veiller à ce que l'équation de la droite soit exprimée sous la forme explicite $y = px + h$. Ensuite on identifie l'ordonnée à l'origine (qui nous donne un premier point) puis on utilise la pente afin de trouver un second point. Il suffit finalement de les relier pour obtenir la droite. Une alternative consiste à trouver deux points à l'aide d'un tableau de valeurs.

Exemple. Tracer le graphe des droites d'équations $y = -\frac{5}{3}x + 2$ et $y - 2x = 0$.



Exercice 5.2. Déterminer la pente de chacune des droites ci-dessous, puis les représenter graphiquement.

a) $y = x + 3$ b) $y = 2x - 2$

c) $y = 3x + 2$ d) $y = \frac{1}{2}x + 2$

e) $y = -x + 4$ f) $y = -2x - 3$

g) $y = -3x - 1$ h) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

5.5 Equation d'une droite

Si l'on dispose du graphe d'une fonction du premier degré, il suffit de « compter les petits carrés » pour trouver la pente p et de regarder où la droite coupe l'axe O_y afin d'obtenir l'ordonnée à l'origine h.

Que faire si l'on ne possède pas de graphe précis ? Ou pire encore, si l'on n'a aucun graphe ? Pour trouver une droite, connaître deux points est suffisant. Grâce à eux on peut tout d'abord déterminer la pente $p = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (revoir la section 5.3). Finalement, en reprenant l'équation de base d'une fonction affine $y = px + h$, on peut remplacer la valeur de p par celle trouvée auparavant et celles de x, y par les coordonnées d'un point connu. On obtient ainsi une équation à une inconnue qu'il suffit de résoudre pour trouver la valeur de h.

Exemple. Trouver l'équation de la droite passant par les points $(-2; 2)$ et $(8; -1)$.

Il est possible de calculer la pente d'une telle droite.

$$p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 2}{8 - (-2)} = -\frac{3}{10}.$$

On sait que l'équation de la droite sera de la forme

$$y = px + h.$$

Comme $p = -\frac{3}{10}$, l'équation ci-dessus s'écrit

$$y = -\frac{3}{10}x + h.$$

Comme la droite passe par le point $(8; -1)$, cela signifie que si $x = 8$, alors $y = -1$. On peut donc remplacer x et y par ces valeurs afin de pouvoir trouver la valeur de h.

$$\begin{array}{rcl|l} -1 & = & -\frac{3}{10} \cdot 8 + h & \text{Calculs} \\ -1 & = & -\frac{24}{10} + h & \\ -1 & = & -\frac{12}{5} + h & \cdot 5 \\ -5 & = & -12 + 5h & +12 \\ 7 & = & 5h & : 5 \\ h & = & \frac{7}{5}. & \end{array}$$

Donc l'équation de la droite est

$$y = -\frac{3}{10}x + \frac{7}{5}.$$

Remarque. On aurait obtenu le même résultat si l'on utilisait le point $(-2; 2)$ plutôt que $(8; -1)$. L'important est de prendre un point de la droite. On aurait également pu obtenir l'équation de cette droite en résolvant le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p \cdot (-2) + h & = & 2 \\ p \cdot 8 + h & = & -1 \end{array} \right. .$$

Exercice 5.3. Déterminer l'expression fonctionnelle de la droite de pente -3 passant par le point $A(4;7)$.

Exercice 5.4. Déterminer l'expression fonctionnelle de la droite passant par les points $A(-1;-9)$ et $B(3;11)$.

Exercice 5.5. Représenter les graphes des fonctions affines f telles que

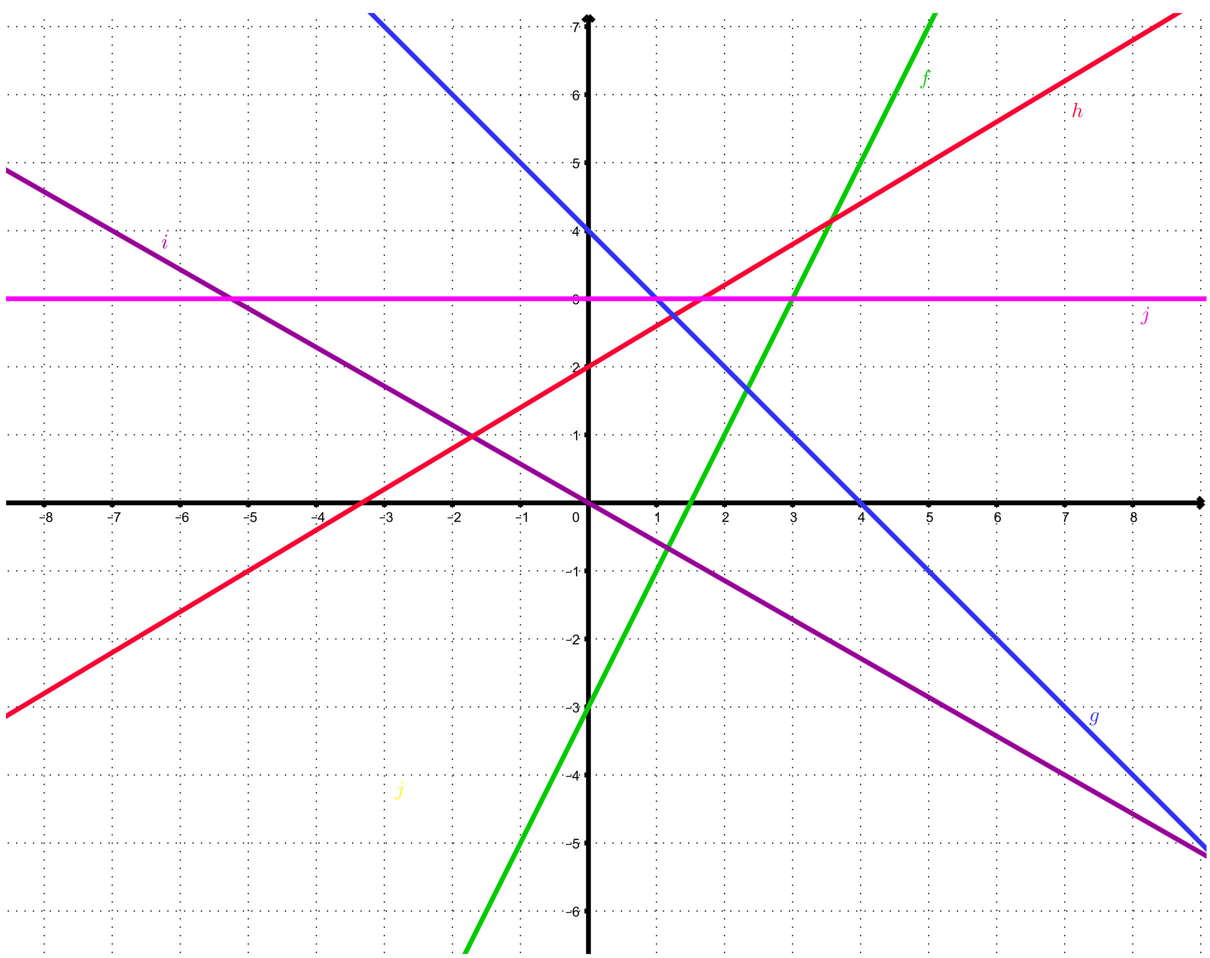
a) $f(-1) = 2$ et la pente du graphe de f vaut -2.

b) $g(0) = -1$ et la pente du graphe de g vaut $\frac{3}{2}$.

c) $h(2) = 0$ et la pente du graphe de h vaut $-\frac{3}{5}$.

d) $j(4) = 5$ et la pente du graphe de j vaut 0.

Exercice 5.6. Trouver l'expression fonctionnelle des 5 fonctions dont les graphes sont les droites ci-dessous.



5.6 Droites particulières

Certaines droites se démarquent par des caractéristiques particulières.

1. **Les droites horizontales**
   Ce sont des droites qui ont une pente de 0. Leur équation est donc $y = 0 \cdot x + h$, par conséquent, $y = h$.

Exemple.

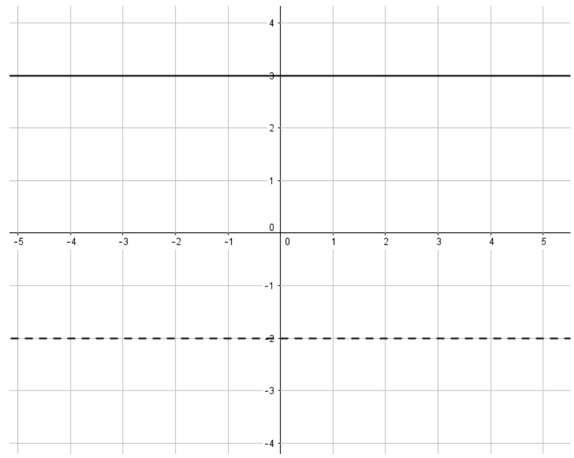


FIGURE 5.1 – Graphe de $y = 3$ et $y = -2$.

2. **Les droites verticales**
   Ce sont des droites ayant une pente infinie. Tous les points d'une telle droite possèdent la même abscisse. Son équation est de la forme $x = n$.

   Exemple.

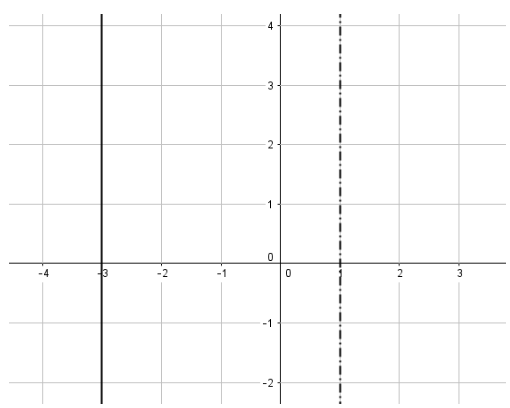
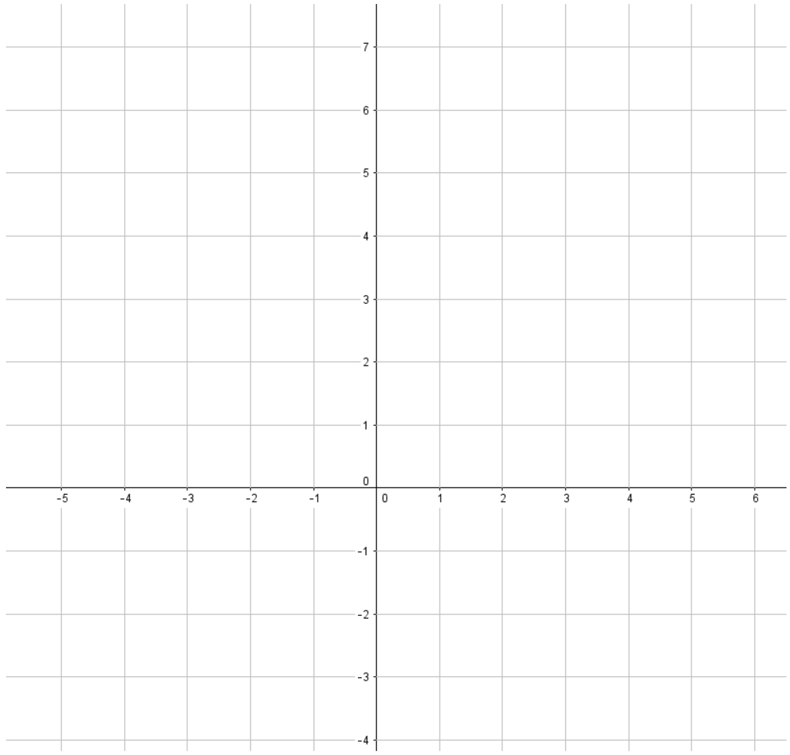


FIGURE 5.2 – Graphe de $x = 1$ et $x = -3$.

3. **Les droites parallèles**
   Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont exactement la même pente.

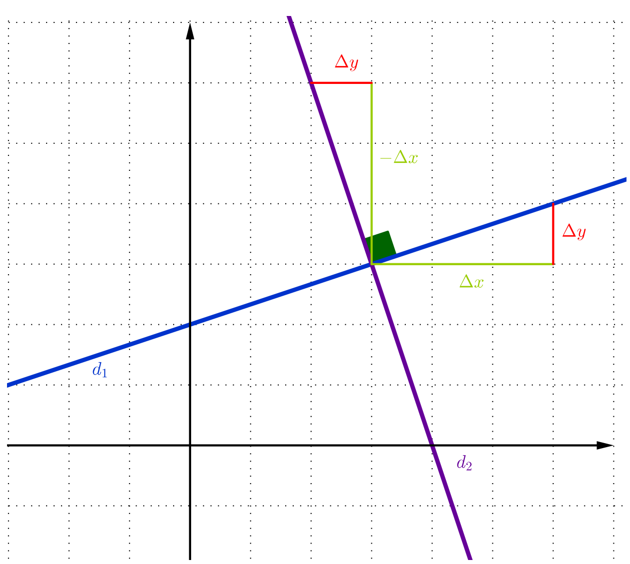
   Exemple. Est-ce que ces deux droites sont parallèles ?

$$y = 3x + 2 \text{ et } 9x - 3y = -12.$$



4. **Les droites perpendiculaires**
   Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leur pente vaut -1.

   Preuve. d_1 a pour pente
   $$p_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
   Comme d_2 est perpendiculaire à d_1, on peut obtenir d_2 par rotation de d_1 de 90° (dans le sens horaire).
   Ainsi, Δx devient un accroissement vertical négatif et Δy un accroissement horizontal positif.



d_2 a donc pour pente

$$p_2 = \frac{-\Delta x}{\Delta y}.$$

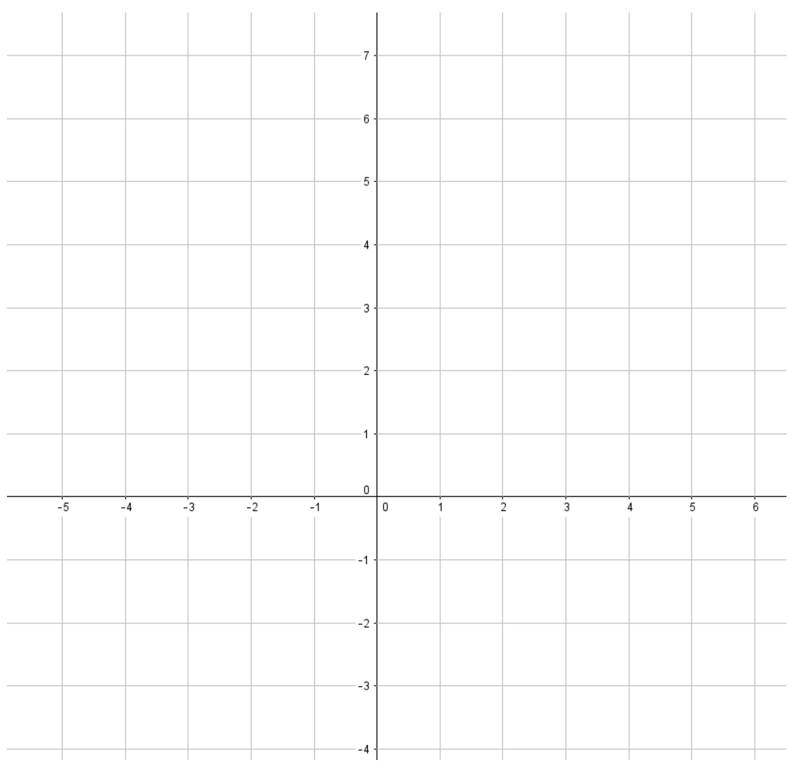
Il s'ensuit que

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{-\Delta x}{\Delta y} = -1.$$

□

Exemple. Est-ce que ces deux droites sont perpendiculaires ?

$$2x + 3y = 1 \text{ et } 6x - 4y - 1 = 0.$$



Remarque. Si une droite a une pente de p et que l'on désire trouver la pente d'une droite perpendiculaire, on peut appliquer la méthode de "*l'opposé de l'inverse*" ou "*l'inverse de l'opposé*". On obtient ainsi $-\frac{1}{p}$ comme pente de la droite perpendiculaire cherchée.

Exercice 5.7. Tracer les droites suivantes : $d_1 : x = 4$ et $d_2 : y = -2$.

Exercice 5.8. Trouver l'abscisse du point $P(x; 13)$ sachant que les points P, $Q(-1; 7)$ et $R(3; -1)$ sont alignés.

Exercice 5.9. Déterminer l'équation

a) De la droite parallèle à $y = -3x + 2$ passant par l'origine.

b) De la droite parallèle à $y = \dfrac{3x+5}{2}$ passant par le point $A(6; 1)$.

c) De la droite perpendiculaire à $y = -3x + 2$ passant par l'origine.

d) De la droite perpendiculaire à $y = 2x$ passant par le point $B(4; 2)$.

Exercice 5.10. Trouver l'équation de la droite passant par le point $P(3; -5)$ et parallèle à la droite d'équation $2x + 2y = 4$.

Exercice 5.11. Trouver l'équation de la droite passant par le point $P(3; -5)$ et étant perpendiculaire à la droite $3x + 2y = 6$.

5.7 Intersection de deux droites

Afin d'illustrer l'utilité des intersections de droites, commençons avec un exemple concret.

Exemple. Pour effectuer le trajet La Chaux-de-Fonds – Neuchâtel en train, différents types d'offres sont proposées. Nous en retiendrons trois :

1. Prix plein à chaque fois : 10 francs par trajet.
2. Demi-tarif : 185 frs puis 5 francs par trajet.
3. Abonnement annuel : 1080 francs.

Dès lors, il est intéressant de choisir le forfait le plus rentable. Autrement dit, à partir de combien de trajets par année devrions-nous prendre un forfait plutôt qu'un autre ? Pour répondre à cette question, transformons tout d'abord ces forfaits en expressions fonctionnelles.

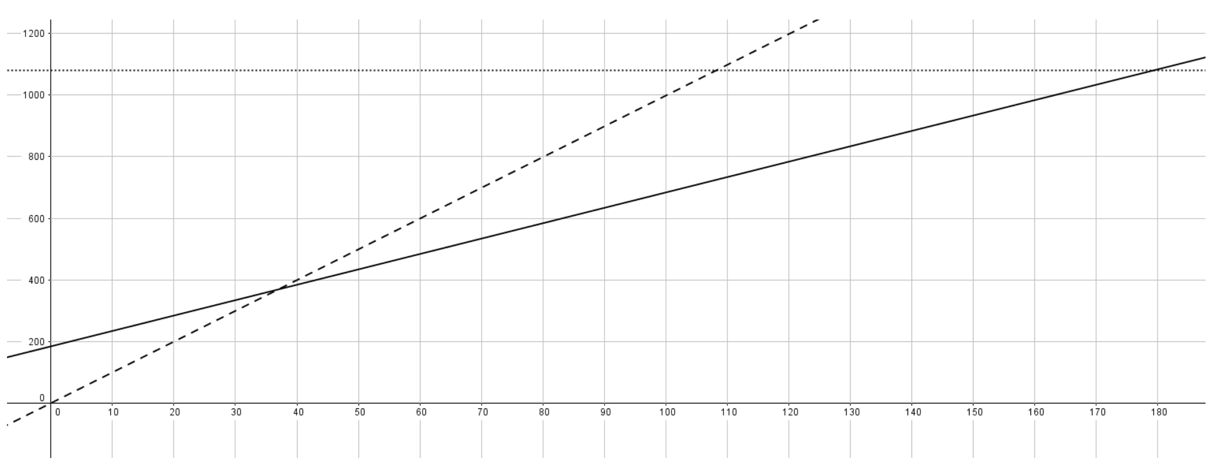
Posons

x = "nombre de trajets" et y = "somme dépensée".

Ces trois types d'offre peuvent s'exprimer à l'aide des expressions fonctionnelles suivantes.

1. $y = 10x$.
2. $y = 5x + 185$.
3. $y = 1080$.

Voici leurs représentations graphiques respectives :



Les intersections de ces droites représentent le moment précis où un tarif deviendra plus favorable qu'un autre. Par conséquent, si l'on arrive à déterminer l'intersection entre deux droites, on saura le nombre de trajets limite pour lequel un forfait est plus profitable qu'un autre.

Déterminons algébriquement les coordonnées des points d'intersection. Le point d'intersection entre deux droites est le point dont les coordonnées satisfont les deux équations de droites en question. Autrement dit, « les coordonnées où les droites sont identiques ». Calculons pour commencer le point d'intersection entre le prix plein et le demi-tarif.

Il faut donc résoudre le système d'équation à deux inconnues :

$$\begin{cases} y = 10x \\ y = 5x + 185 \end{cases}.$$

En le résolvant par substitution (de y) ou par addition/soustraction, on obtient :

$$(x; y) = (37; 370).$$

Ce qui signifie qu'après 37 trajets, le demi-tarif coûte moins cher que le tarif 1. Pour exactement 37 trajets, peu importe le tarif 1 ou 2, nous aurons payé exactement 370 francs. De manière similaire, nous pouvons calculer le point d'intersection entre le demi-tarif et l'abonnement. Nous obtenons le point $(179; 1080)$. Donc à partir de 179 trajets par année, il est préférable d'avoir l'abonnement.

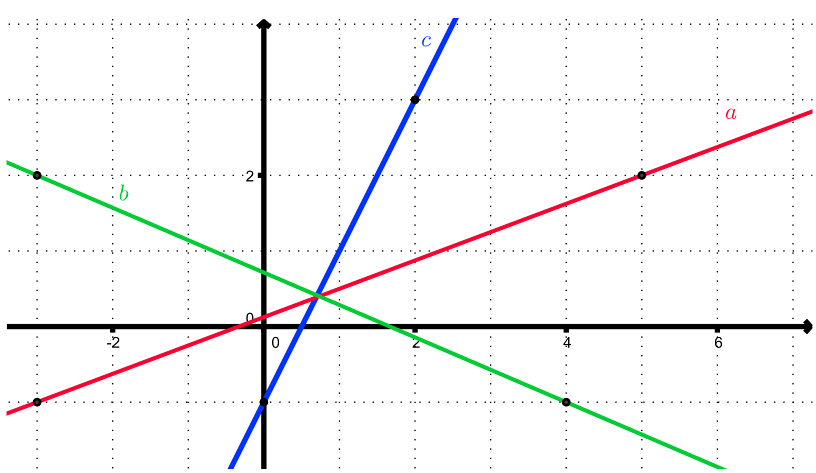
Exercice 5.12. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des fonctions f et g dans chacun des cas suivants.

a) $f(x) = -x + 5$ et $g(x) = 3x + 1$
b) $f(x) = 3x - 6$ et $g(x) = -2x + 4$
c) $f(x) = 2x - 4$ et $g(x) = -x + 5$
d) $f(x) = 5x - 2$ et $g(x) = 3x + 4$
e) $f(x) = -2x + 8$ et $g(x) = 12$
f) $f(x) = -7x$ et $g(x) = -3x$
g) $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = -2x - 3$
h) $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = 3x + 4$

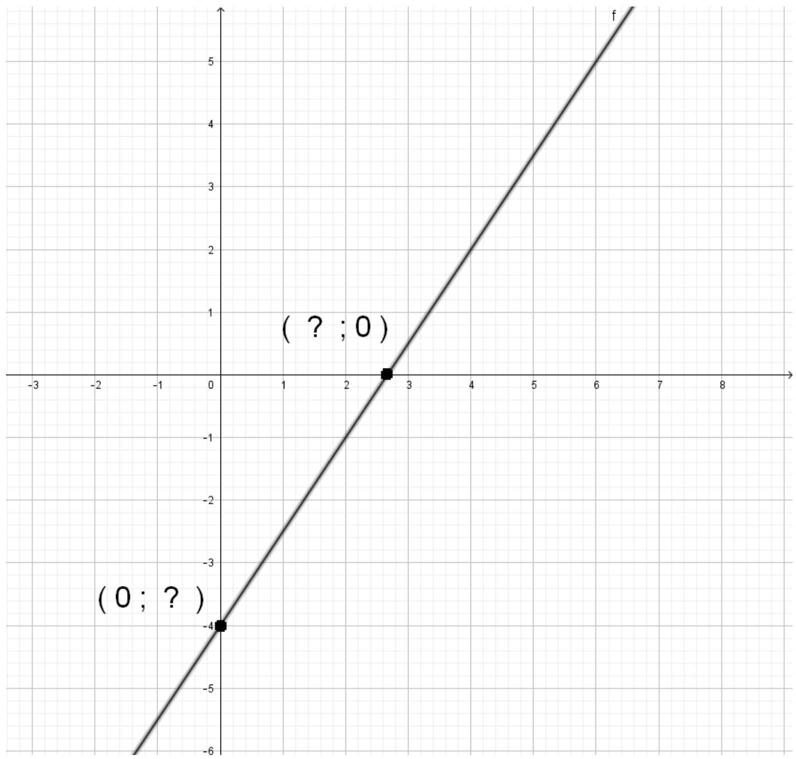
Exercice 5.13. Trouver de manière algébrique les coordonnées du point d'intersection entre les droites.

$$d_1 : -3x + 2y = 6 \text{ et } d_2 : 2x - 8y - 16 = 0.$$

Exercice 5.14. Les trois droites a, b et c se coupent-elles en un point ou forment-elles un triangle ?



5.8 Intersections d'une droite avec les axes



1. **Intersection avec l'axe O_x**
   Lorsque la droite touche l'axe O_x, alors la coordonnée y du point d'intersection de la droite avec l'axe O_x vaut 0. Ainsi, pour déterminer algébriquement les coordonnées ce point d'intersection on pose $y = 0$ et on résout l'équation pour trouver x.

   Exemple. Soit la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x - 4$.
   On pose $y = 0$.
   On obtient donc

   $$\begin{array}{rcl} 0 & = & \frac{3}{2}x - 4 \\ x & = & \frac{8}{3}. \end{array}$$

   Le point d'intersection est donc $\left(\dfrac{8}{3}; 0\right)$.

2. **Intersection avec l'axe O_y**
   En suivant un raisonnement similaire, il suffit de poser $x = 0$ et de trouver la valeur de y.

   Exemple. Soit la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x - 4$. On pose $x = 0$.
   On obtient donc

   $$y = \frac{3}{2} \cdot 0 - 4 = -4.$$

   Le point d'intersection est donc $(0; -4)$.

Exercice 5.15. Déterminer les coordonnées des points d'intersections avec les axes de chacune des droites suivantes.

a) $y = 2x - 4$ b) $3x + 5y = 6$

5.9 Applications

Exercice 5.16. Une dette de 7200 francs est amortie à raison de 300 francs par mois. Etablir une formule permettant de représenter l'état de la dette $C(k)$ en fonction de la durée écoulée ($k \in \mathbb{R}$).

Exercice 5.17. Un travail écrit comporte 20 points. La note 1 correspond à 0 point et la note 6 à 20 points. Déterminer la fonction permettant de calculer la note N en fonction du nombre de points x.

Exercice 5.18. La Société Speedza livre des pizzas à domicile. À ses vendeurs, elle offre à choix deux modèles de rémunération :
Modèle 1 : Salaire mensuel 4500 francs plus 5% de commission sur les ventes.
Modèle 2 : Salaire mensuel 4000 francs plus 10% de commission sur les ventes.
Vous êtes un nouvel employé. Quel mode de rémunération choisissez-vous ?

Exercice 5.19. Une ville a installé des usines pour alimenter ses citoyens en eau potable. Elle finance les coûts d'exploitation en facturant une redevance fixe et l'eau consommée. Un des voisins de Jean a reçu son décompte et pour une consommation de 60'000 litres il paie 88 francs. Un autre voisin paie 100 francs pour une consommation de 75'000 litres. Jean n'a pas reçu son décompte, mais il sait qu'il a consommé 82'000 litres d'eau.

a) Quel montant doit-il prévoir ?
b) Déterminer également le montant de la taxe fixe.

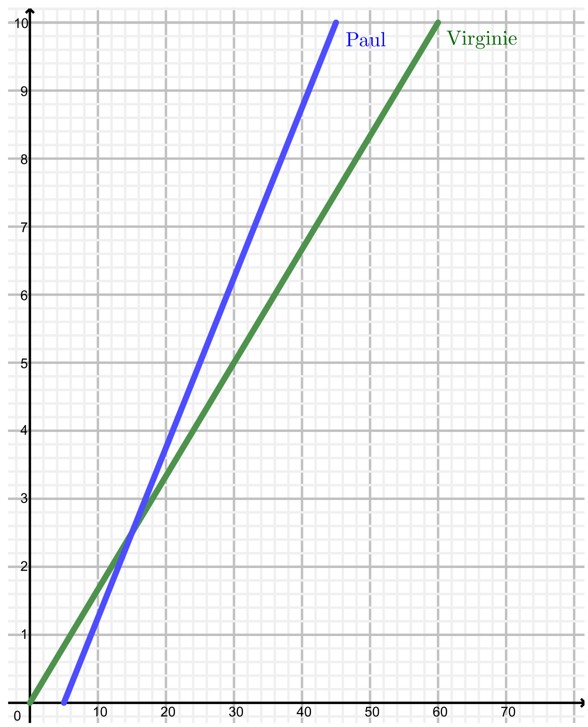
Exercice 5.20. Le volume d'un glacier était de 125'000 m^3 en 1974 et de 16'000 m^3 en 2003. Selon l'hypothèse d'une décroissance linéaire, estimer en quelle année ce glacier aura totalement disparu.

Exercice 5.21. On obtient la température en degrés Celsius par rapport à une valeur en Fahrenheit par la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}.$$

a) A quelle température exprimée en degrés Celsius correspond une température de 36 Fahrenheit ?
b) A quelle température lit-on la même valeur sur les deux échelles ?
c) Pour quelle température la valeur en Fahrenheit est-elle le double qu'en Celsius ?

Exercice 5.22. Paul et Virginie sont inscrits aux 10 km de Lausanne. Virginie part 5 minutes avant Paul, comme le montre le graphe ci-dessous.



a) Qui est arrivé en premier ? Avec combien de minutes d'avance ?

b) Quelle distance les sépare lorsque Paul franchit la ligne d'arrivée ?

c) Quelles ont été leurs vitesses respectives ?

Exercice 5.23. On a effectué les mêmes trajets avec deux taxis différents. Avec le premier, on a payé 8,50 francs pour un trajet de 2,5 km et 15,70 francs pour un trajet de 5,5 km. Avec le second taxi, pour les mêmes distances, on a payé respectivement 8,25 francs et 16,35 francs. Pour chaque taxi, trouver la fonction donnant le prix de la course en fonction de la longueur du trajet. Pour quel trajet, le prix de la course est-il le même avec les deux taxis.

Exercice 5.24. Une voiture s'engage sur une route avec le réservoir plein et roule à vitesse constante. Après 200 km de route, il reste 40 litres d'essence et après 450 km, il reste 15 litres. Déterminer

a) La fonction qui détermine le nombre de litres restants dans le réservoir en fonction des kilomètres parcourus.

b) La capacité du réservoir.

c) La consommation au 100 km.

d) La distance maximale que l'on peut parcourir avec un plein.

Exercice 5.25. Un réparateur informatique demande pour le déplacement un montant forfaitaire de 30 francs.

a) Quel est son tarif de l'heure sachant que l'on a payé 390 francs une réparation nécessitant 4 heures et demi d'intervention ?

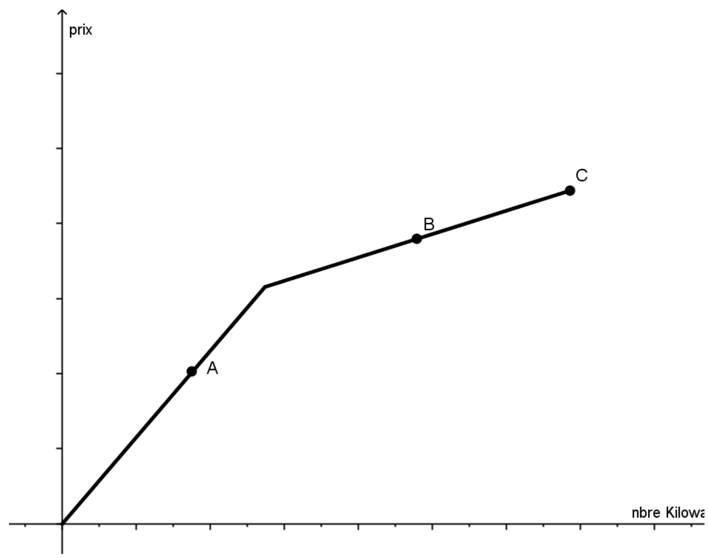
b) Représenter le tarif horaire $f(t)$ en fonction des heures t d'intervention.

Exercice 5.26. Voici les prix d'une compagnie d'électricité

	Prix par kilowatt	Taxe mensuelle
De 1 à ...		0 francs
Plus que ...		36,90 francs

a) En utilisant le graphique ci-dessous et sachant que $A(1600; 100)$, $B(5000; 286,9)$ et $C(7000; 386,9)$, déterminer le prix du kilowatt pour chaque situation

b) A partir de combien de kilowatt paie-t-on une taxe mensuelle ?



5.10 Application à l'économie : point mort

Définition. On appelle *point mort* (ou *seuil de rentabilité*) le chiffre d'affaire minimum à partir duquel un produit devient rentable.

Pour définir le seul de rentabilité, on représente graphiquement la droite des coûts $C(x)$ ainsi que la droite des revenus $R(x)$ en fonction des quantités produites x.

— Les coûts de production sont en principe composés d'une partie des coûts fixes ainsi que de coûts variables proportionnels à la quantité produite. Une fonction de coût pourra donc naturellement s'exprimer par une fonction de la forme

$$y = C(x) = p_1 x + h$$

où h représente la part des coûts fixes.

— Le revenu est géralement proportionnel à la quantité vendue. Une fonction du revenu pourra donc s'exprimer par une fonction de la forme

$$y = R(x) = p_2 x.$$

Exemple. Un vendeur ambulant vend des roses ayant des coûts fixes de 20 francs par jour. Il achète ses roses à 2 francs la pièce et les revend à 6 francs.

Pour déterminer le nombre de roses à vendre pour atteindre le seuil de rentabilité, on détermine les éléments suivants :

- x le nombre de roses vendues.
- $C(x) = 2x + 20$ les coûts de production.
- $R(x) = 6x$ le montant des ventes.

Le seuil de rentabilité se détermine en résolvant $C(x) = R(x)$:

$$\begin{aligned} 2x + 20 &= 6x \\ 20 &= 4x \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Le vendeur devra donc vendre plus de 5 roses pour faire des profits.

Que se passe-t-il si maintenant le vendeur peut payer ses roses 1 franc auprès d'un autre fournisseur en périphérie de la ville mais qu'il doit pour cela prendre un taxi qui lui en coûtera 20 francs supplémentaires ?

La situation est désormais la suivante :

- x le nombre de roses vendues.
- $C(x) = x + 40$ les coûts de production.
- $R(x) = 6x$ le montant des ventes.

Le seuil de rentabilité se calcule en posant $C(x) = R(x)$:

$$\begin{aligned} x + 40 &= 6x \\ 40 &= 5x \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Le vendeur doit donc vendre plus de 8 roses pour faire un profit.

Pour qu'il accepte de travailler avec ce nouveau fournisseur, il convient de déterminer le nombre de roses à vendre pour que le coût du nouveau système soit inférieur à l'ancien. Autrement dit, on cherche x tel que

$$\begin{aligned} 2x + 20 &= x + 40 \\ x + 20 &= 40 \\ x &= 20. \end{aligned}$$

En conclusion, si le vendeur pense vendre plus de 20 roses par jour, il a intérêt à opter pour ce nouveau fournisseur. Sinon, il lui faudra conserver son fournisseur actuel.

Exercice 5.27. Un producteur maraîcher sait qu'il peut vendre toute sa production de navets en les vendant $0,40$ francs chacun. Il estime qu'il a des frais fixes de 100 francs par jour et qu'il lui en coûte $0,20$ francs pour produire chaque navet.

a) Calculer le seuil de rentabilité.

b) Un vendeur de machinerie lourde propose au producteur l'achat d'une machine qui produira le coût de production à $0,10$ francs par navet mais qui augmentera ses frais fixes à 180 francs par jour. Donner le nouveau seuil de rentabilité, puis déterminer le nombre de navets que le producteur devra vendre pour prendre la bonne décision.

Exercice 5.28. Un manufacturier de ballons estime qu'il lui en coûte 4 francs pour fabriquer chaque ballon. De plus, il a calculé qu'il lui en coûte 156 francs par jour de frais fixes. S'il vend ses ballons 10 frs chacun, déterminer son seuil de rentabilité.

Exercice 5.29. Un commerçant achète d'un grossiste des articles au prix de 2 francs l'unité. Les frais fixes de fonctionnement du commerçant sont de 148 francs par jour. A quel prix doit-il vendre chaque article pour avoir un seuil de rentabilité de 37 articles par jour ?

Exercice 5.30. Un éditeur décide de publier un ouvrage de mathématiques. Les coûts qu'il doit assumer sont formés de frais fixes (composition, montage, ...) s'élevant à 11000 francs et des frais variables (impression, droits d'auteurs,...) s'élevant à 9 francs par volume.

a) S'il vend ses livres 20 francs l'exemplaire, quel est son seuil de rentabilité ?

b) Un nouveau procédé de composition permet d'abaisser les frais fixes à 9500 francs. Par contre, dans ce cas, l'impression augmente les coûts variables à 10 francs par livre. Calculer le nouveau seuil de rentabilité ainsi que le nombre de livres à vendre pour l'aider à choisir un procédé.

Exercice 5.31. Une troupe de théâtre a obtenu une subvention de 50000 francs pour monter une pièce. Chaque représentation rapporte 10000 francs, mais les frais fixes (décors, costumes, répétitions,...) s'élèvent à 150000 francs et les frais variables (salaire des comédiens, des placeurs,...) à 8000 francs par représentation.

a) Déterminer les expressions qui donnent le revenu $R(x)$, les coûts $C(x)$ et le bénéfice $B(x)$ en fonction du nombre x de représentations.

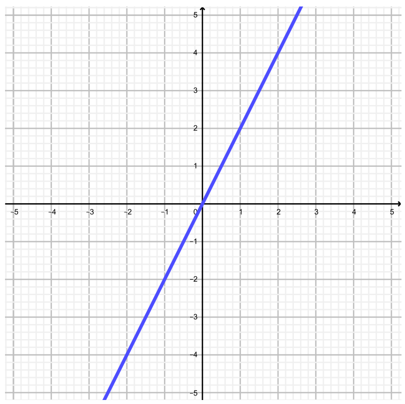
b) La troupe de théâtre rentre-t-elle dans ses frais si elle donne 25 représentations ?

c) Déterminer le seuil de rentabilité.

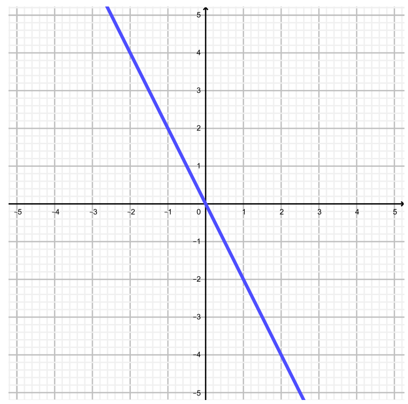
5.11 Solutions

Exercice 5.1.

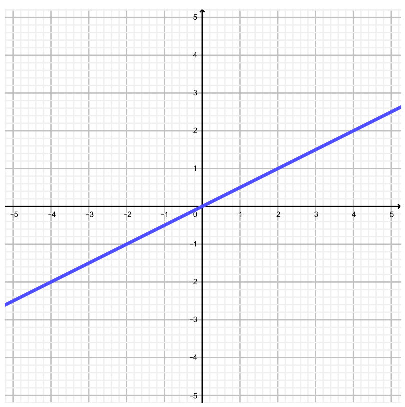
a)



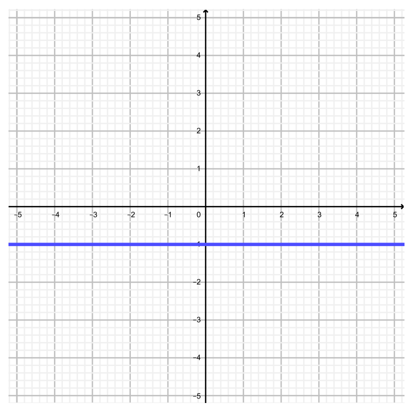
b)



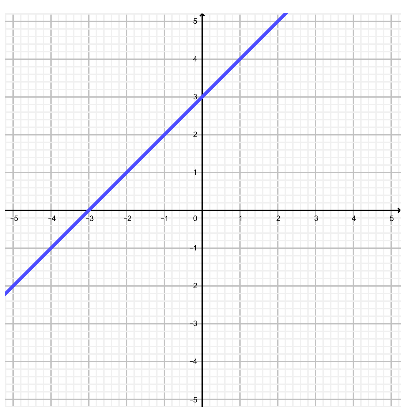
c)



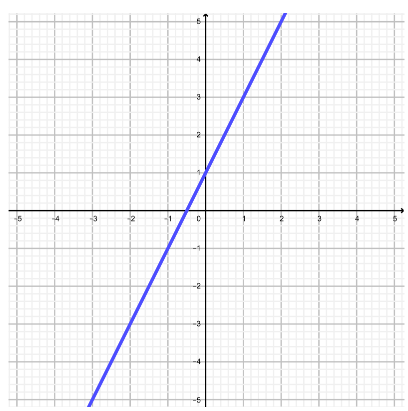
d)



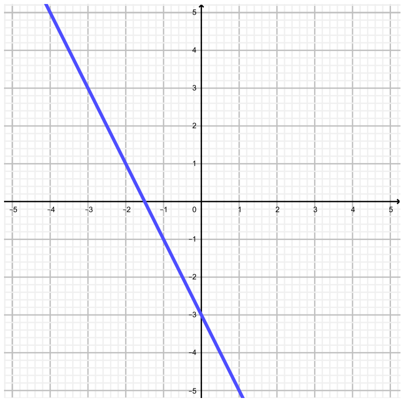
e)



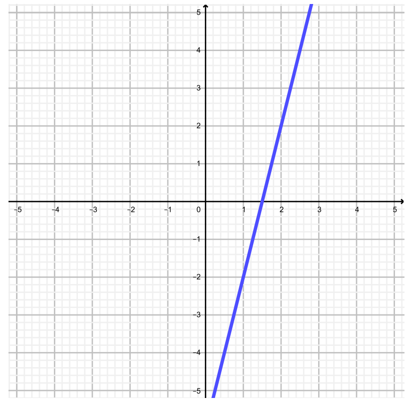
f)



g)

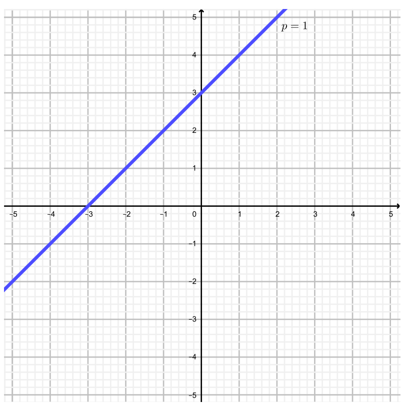


h)

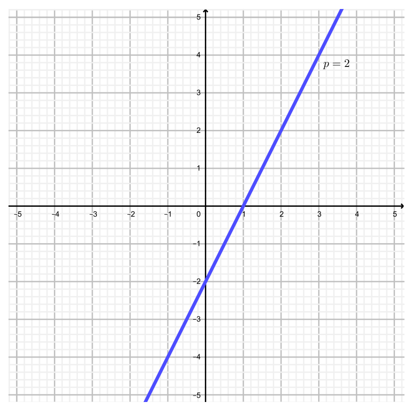


Exercice 5.2.

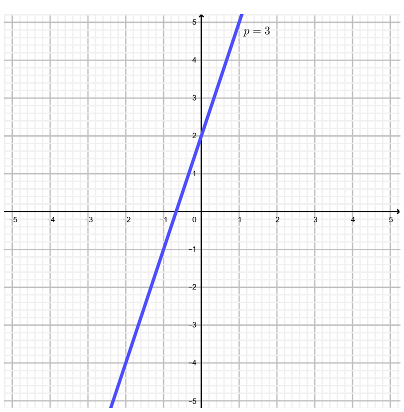
a)



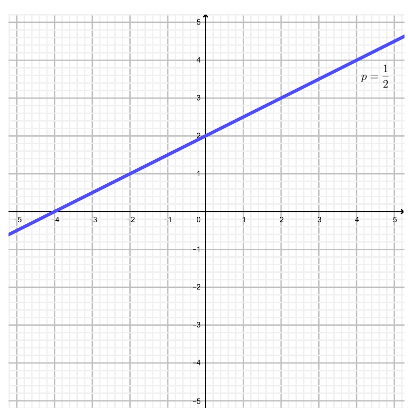
b)



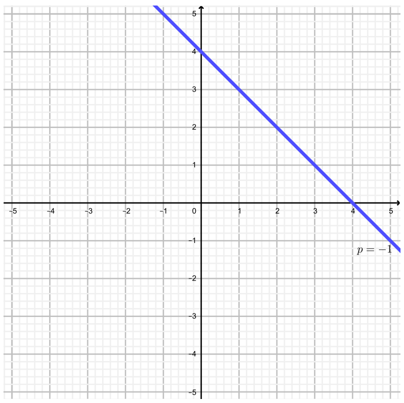
c)



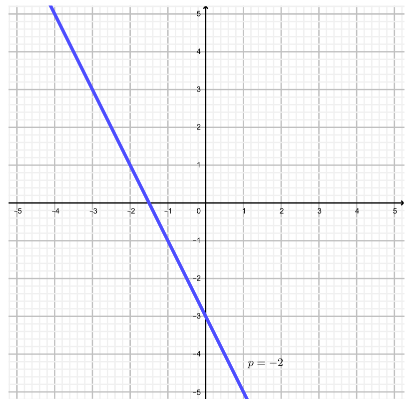
d)



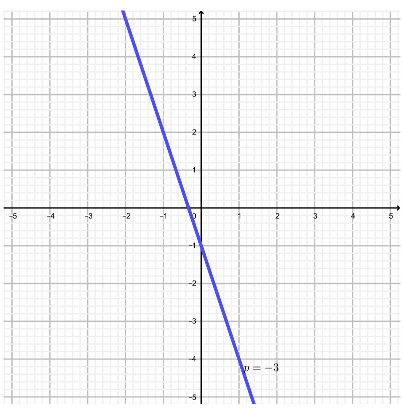
e)



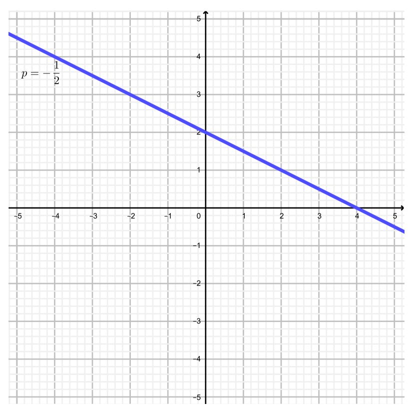
f)



g)



h)

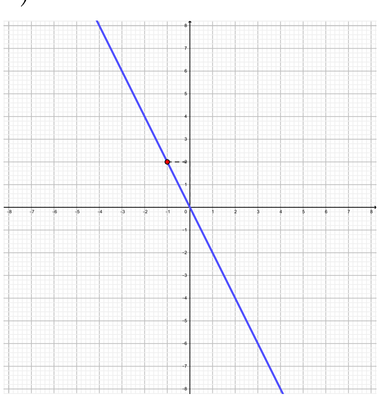


Exercice 5.3. $y = -3x + 19$.

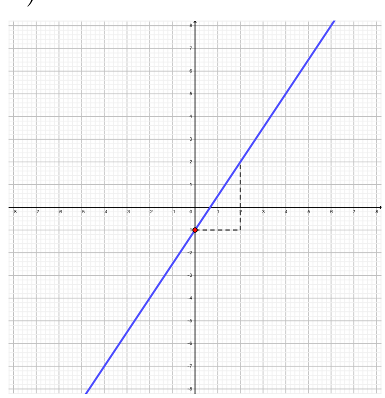
Exercice 5.4. $y = 5x - 4$.

Exercice 5.5.

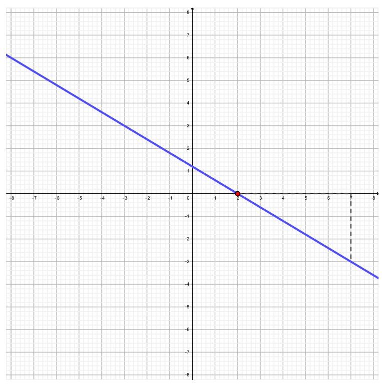
a)



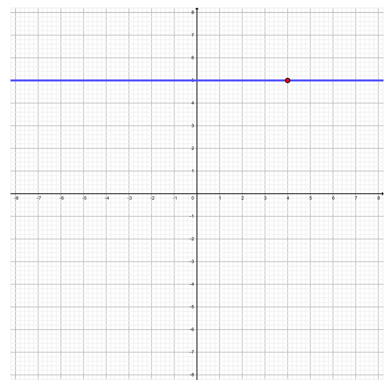
b)



c)



d)



Exercice 5.6.

$f(x) = 2x - 3.$

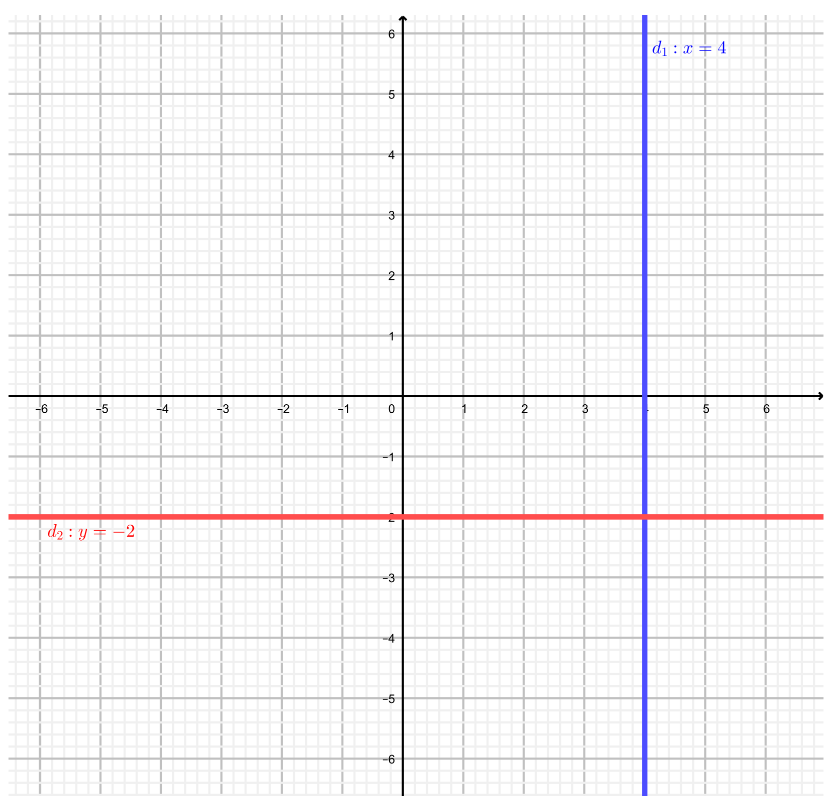
$g(x) = -x + 4.$

$h(x) = \dfrac{3}{5}x + 2.$

$i(x) = -\dfrac{4}{7}x.$

$j(x) = 3.$

Exercice 5.7.



Exercice 5.8. $x = -4$.

Exercice 5.9.

a) $y = -3x$.

b) $y = \frac{3}{2}x - 8$.

c) $y = \frac{1}{3}x$.

d) $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Exercice 5.10. $y = -x - 2$.

Exercice 5.11. $y = \frac{2}{3}x - 7$.

Exercice 5.12.

a) $I(1;4)$	b) $I(2;0)$
c) $I(3;2)$	d) $I(3;13)$
e) $I(-2;12)$	f) $I(0;0)$
g) Pas d'intersection	h) Infinité d'intersections

Exercice 5.13. $I(-4;-3)$.

Exercice 5.14. Elles forment un triangle.

Exercice 5.15.

a) $(2;0)$ et $(0;-4)$.

b) $(2;0)$ et $\left(0;\frac{6}{5}\right)$.

Exercice 5.16. $C(k) = 7200 - 300k$.

Exercice 5.17. $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Exercice 5.18. Le modèle 1 jusquà 10'000 francs et le modèle 2 sinon.

Exercice 5.19.

a) $105,60$ francs.

b) 40 francs.

Exercice 5.20. Au courant de l'année 2007.

Exercice 5.21.

a) $2,\overline{2}$°C.

b) -40°C $= -40$ F.

c) 320 F.

Exercice 5.22.

a) Paul avec 15 minutes d'avance.

b) $2,5$ km.

c) Paul : $15\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Virginie : $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Exercice 5.23. $y_1 = 2,4x + 2,5$, $y_2 = 2,7x + 1,5$, $y_1 = y_2$ pour un trajet de $x = 3,33$ km.

Exercice 5.24.

a) $f(x) = -\frac{1}{10}x + 60$.

b) 60 litres.

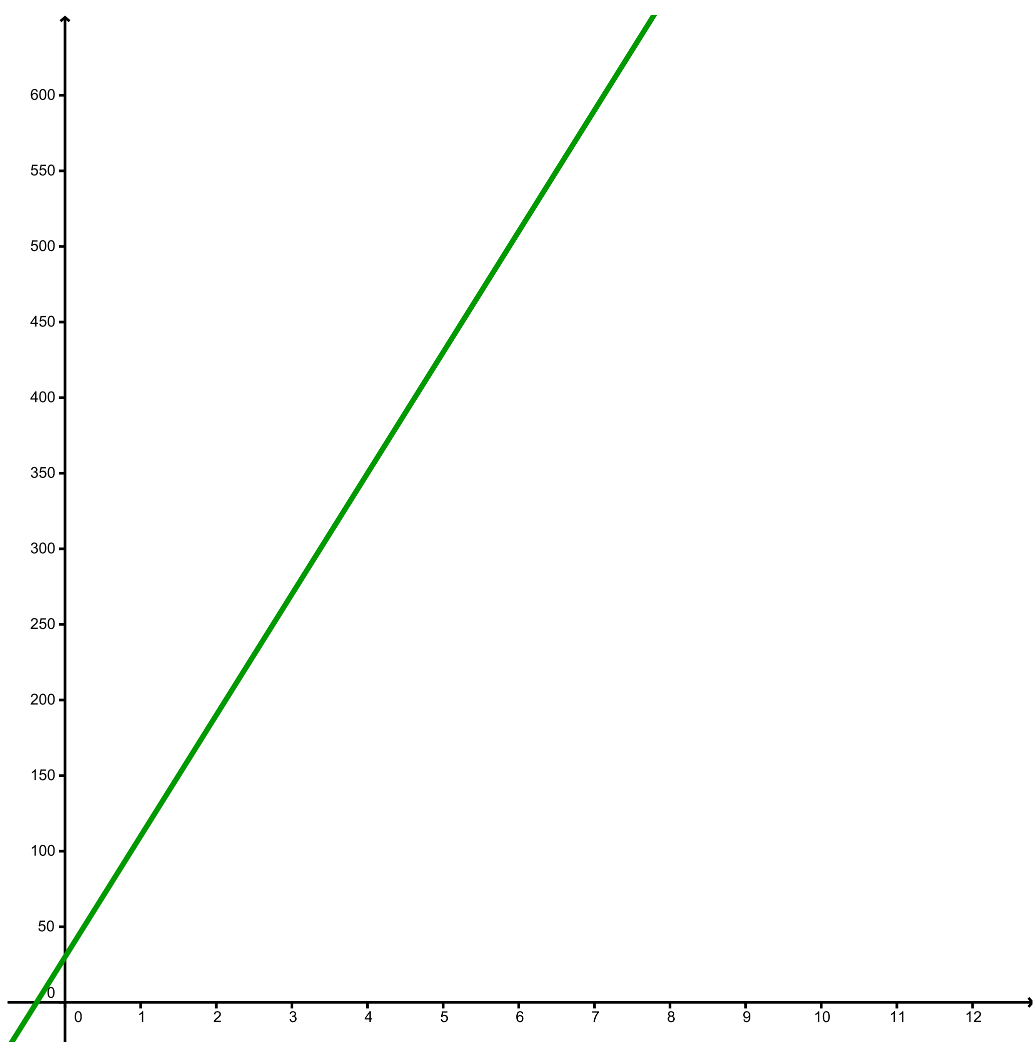
c) 10 litres pour 100 km.

d) 600 km.

Exercice 5.25.

a) 80 francs de l'heure.

b)



Exercice 5.26.

a) $6,25$ centimes et 5 centimes.

b) $y = 0,0625x$, $y = 0,05x + 36,9$. A partir de à $x = 2952$ kilowatts.

Exercice 5.27.

a) 500 navets.

b) Le nouveau seuil de rentabilité est de 600 navets. Il devra accepter cette offre s'il vend plus de 800 navets.

Exercice 5.28. 26 ballons.

Exercice 5.29. 6 francs.

Exercice 5.30.

a) 1000 livres.

b) 950 livres pour le seuil de rentabilité. Il devra opter pour ce nouveau procédé jusqu'à 1500 livres.

Exercice 5.31.

a) $R(x) = 50000 + 10000x$, $C(x) = 150000 + 8000x$ et $B(x) = 2000x - 100000$.

b) Non.

c) 50 représentations.

5.12 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

5.1 ☐ Représenter le graphe d'une fonction du premier degré à l'aide d'un tableau de valeurs.
5.2 ☐ Calculer la pente d'une droite.
5.3 ☐ Représenter le graphe d'une fonction du premier degré à l'aide de la pente et de l'ordonnée à l'origine.
5.4 ☐ Retrouver l'expression fonctionnelle d'une droite à partir de son graphe, de deux points ou de sa pente et d'un point.
5.5 ☐ Représenter le graphe d'une droite horizontale ou verticale.
5.6 ☐ Déterminer l'équation d'une parallèle à une droite donnée.
5.7 ☐ Déterminer l'équation d'une perpendiculaire à une droite donnée.
5.8 ☐ Calculer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection de deux droites.
5.9 ☐ Calculer les coordonnées des intersections d'une droite avec les axes.
5.10 ☐ Résoudre un problème impliquant des fonctions du premier degré.
5.11 ☐ Etre capable d'établir la fonction des coûts d'un problème d'économie.
5.12 ☐ Etre capable d'établir la fonction du revenu d'un problème d'économie.
5.13 ☐ Etre capable de trouver le point mort d'un problème d'économie.

Chapitre 6

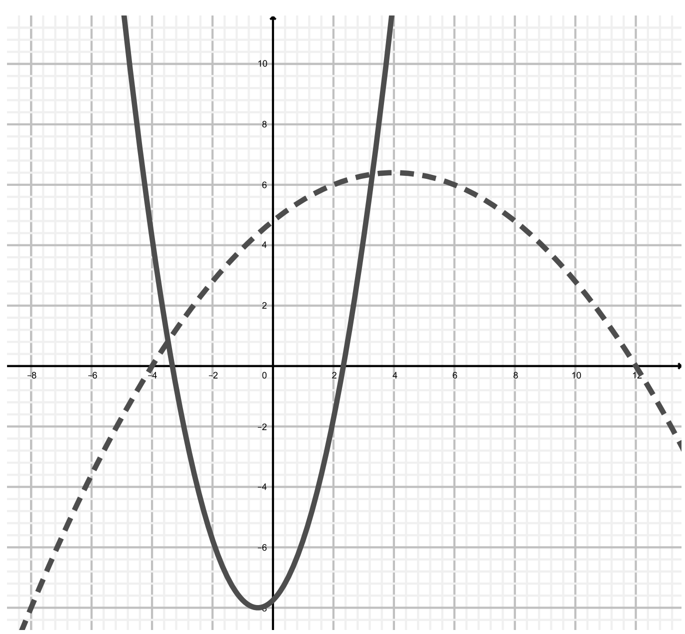
Fonctions du deuxième degré

6.1 Définition

Définition. On appelle *fonction du deuxième degré* ou *fonction quadratique* toute fonction qui peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Graphiquement, une fonction quadratique est une *parabole* :



Le coefficient a représente la *convexité* de la parabole.

— Si $a > 0$, alors la fonction est *convexe*. "Elle sourit".
— Si $a < 0$, alors la fonction est *concave*. "Elle n'est pas contente".
— Si $a = 0$, alors ce n'est plus une parabole mais une droite.

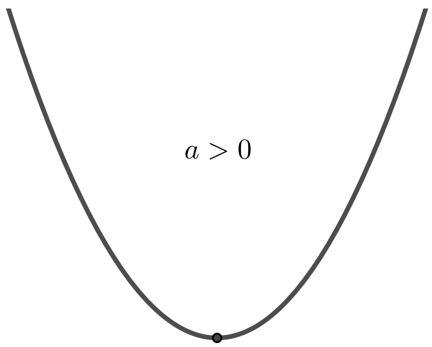


FIGURE 6.1 – f convexe.

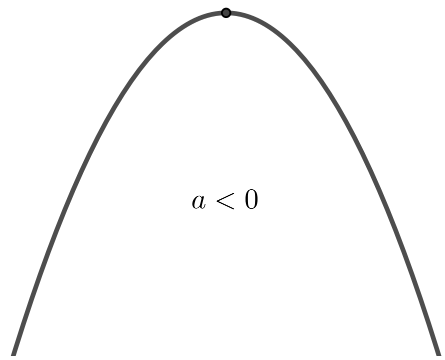


FIGURE 6.2 – f concave.

La lettre c représente *l'ordonnée à l'origine* de la parabole, comme l'était la lettre h pour les droites.

Exercice 6.1. Représenter graphiquement les fonctions f ci-dessous.

a) $f(x) = x^2 - 4x$ b) $f(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 4$

6.2 Propriétés de la parabole

Soit la *parabole* $\mathcal{P}$ d'équation

$$\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Courbure

Sa courbure est d'autant plus forte (la courbe est d'autant plus resserrée) que $|a|$ est grand.

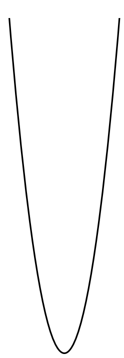


FIGURE 6.3 – $|a|$ grand.

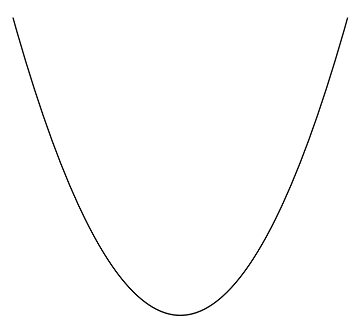
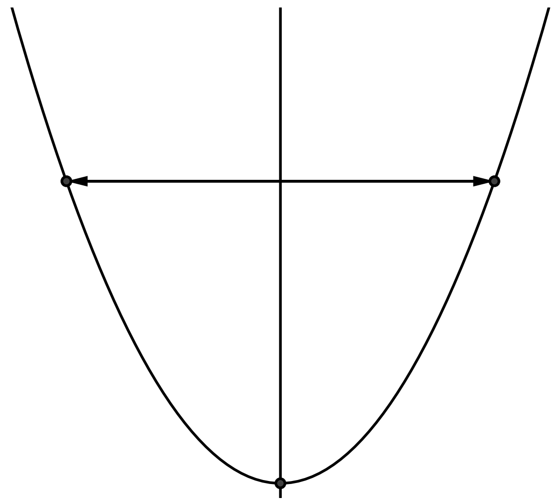


FIGURE 6.4 – $|a|$ petit.

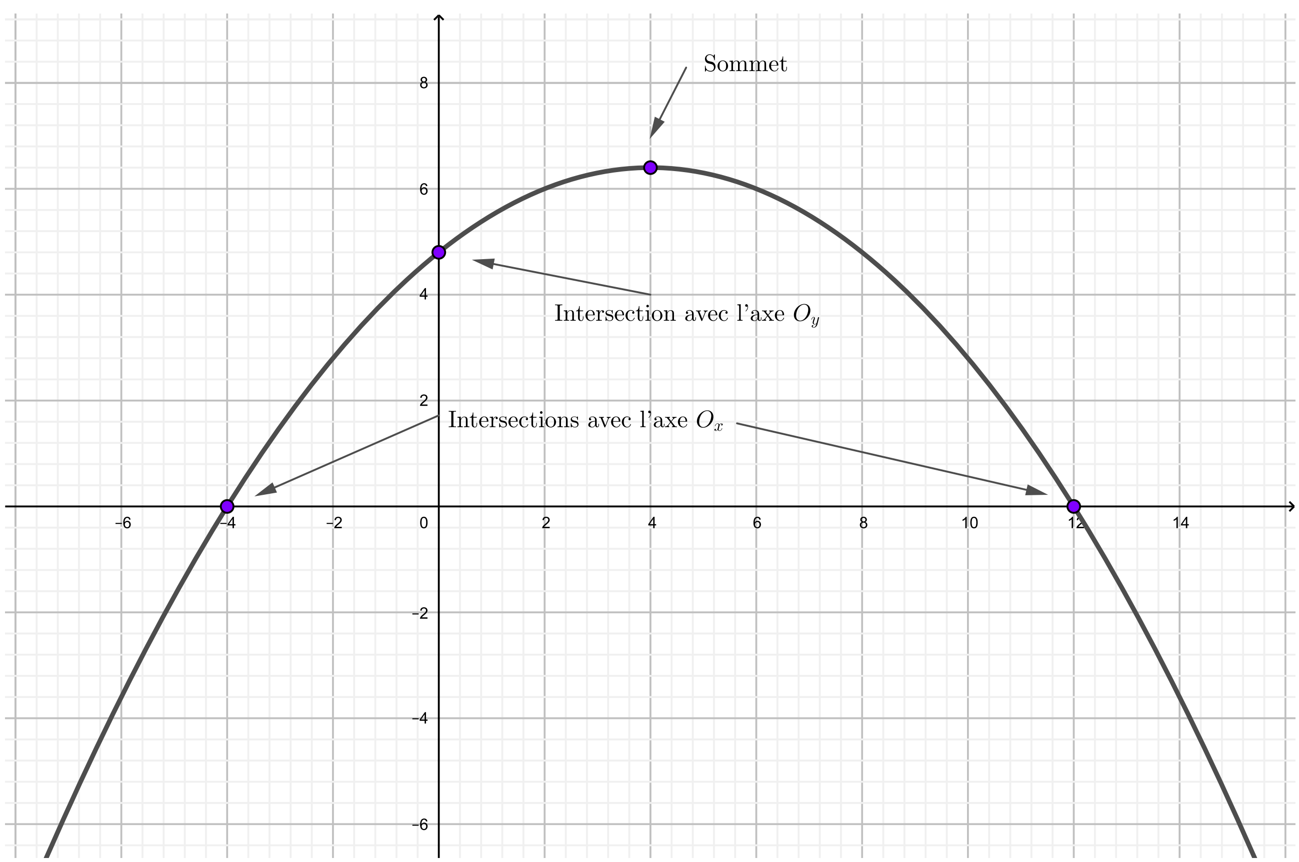
Symétrie

La courbe est symétrique par rapport à un axe vertical passant par son sommet.



Intersection avec les axes et sommet

Les paraboles possèdent des points importants. Il s'agit du *sommet* de la parabole et des *intersections avec les axes*.



Comment calculer ces points ?

1. **Intersections avec l'axe O_x.**
   Il faut trouver les éventuels zéros de la fonction (x_1 et x_2). Comme dans le cas des droites, on pose donc $y = 0$ et on trouve la(les) éventuelle(s) valeur(s) de x.

   Exemple. Soit $f(x) = 3x^2 + 3x - 18$.
   On résout

$$\begin{array}{rcl|l} 3x^2 + 3x - 18 & = & 0 & :3 \\ x^2 + x - 6 & = & 0. & \end{array}$$

   Par formule de Viète, on obtient $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$.
   On en déduit les points d'intersection $(-3; 0)$ et $(2; 0)$.

2. **Intersection avec l'axe O_y.**
   On pose $x = 0$ et on trouve la valeur de y.

   Exemple. Soit $f(x) = 3x^2 + 3x - 18$.
   En posant $x = 0$, on obtient

$$y = 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 18 = -18.$$

   Donc le point d'intersection est $(0; -18)$.

3. **Sommet $S(x_S; y_S)$.**
   Il s'agit d'un minimum si $a > 0$, et d'un maximum si $a < 0$. On le calcule comme suit :

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a} \text{ et } y_S = f(x_S).$$

   On trouve donc y_S en remplacant x par la valeur de x_S dans l'expression fonctionnelle.

   Exemple. Soit $f(x) = 3x^2 + 3x - 18$.
   On a

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2} \text{ et } y_S = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 18 = -\frac{75}{4}.$$

   On peut calculer x_S d'une autre manière :

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

   Le sommet est donc

$$S\left(-\frac{1}{2}; -\frac{75}{4}\right).$$

Exercice 6.2. Déterminer les coordonnées des intersections avec les axes et celles du sommet de chacune des fonctions f ci-dessous.

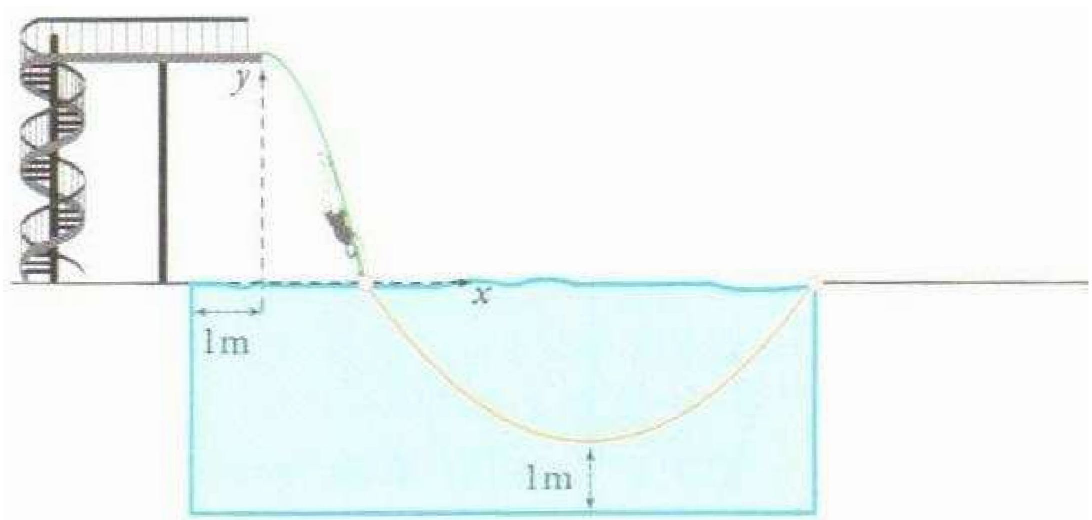
a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ b) $f(x) = -x^2 + 5x$
c) $f(x) = 3x^2 + 3$ d) $f(x) = -2x^2 + 5x - 4$

Exercice 6.3. Un plongeur saute d'un plongeoir et décrit une trajectoire parabolique modélisable par la fonction f définie par

$$f(x) = -1,25(x^2 - 4).$$

Une fois dans l'eau, il suit une autre trajectoire parbolique décrite par la fonction

$$g(x) = 0,6x^2 - 4,8x + 7,2.$$



Déterminer

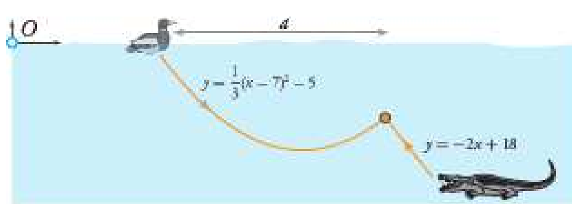
a) La hauteur du plongeon.

b) La distance au bord de la piscine quand il entre dans l'eau.

c) La longueur de la piscine.

d) La profondeur de la piscine.

Exercice 6.4. Un canard flottant au-dessus d'un petit lac décide de plonger à la recherche de nourriture. La situation est illustrée dans le schéma ci-dessous, dans lequel les distances sont exprimées en mètres.



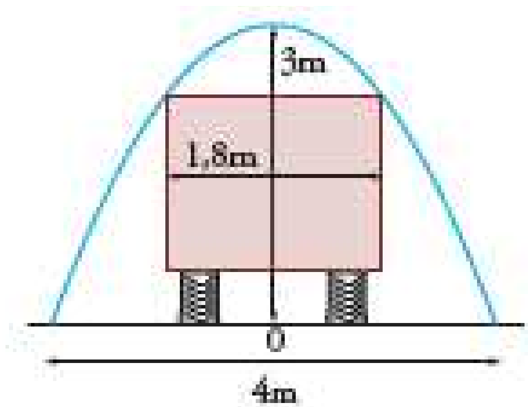
La trajectoire du canard lors de sa plongée est donnée par la fonction quadratique indiquée sur le schéma. A l'affût, au fond du lac, se trouve un crocodile rusé. Ce dernier s'élance en ligne droite vers le canard, après que ce dernier eut entamé sa remontée. La trajectoire du crocodile est également représentée sur le schéma.

a) A quelle distance de la berge (origine O) le canard se situe-t-il initialement ?

b) A quelle profondeur maximale le canard plonge-t-il ?

c) Quelle est la distance a ? (distance par rapport à la surface du lac, entre le point initial de flottaison du canard et l'endroit de sa fin tragique).

Exercice 6.5. Un tunnel a une forme parabolique de 4 m de diamètre et d'une hauteur de 3 m. Un camion mesurant 1,8 m de large souhaite traverser ce tunnel. Quelle doit alors être sa hauteur maximale ?



6.3 Différentes formes d'expression fonctionnelle

1. **La forme polynomiale :** $y = ax^2 + bx + c$.
   Avantage : On connait l'intersection avec l'axe O_y.

   Exemple. Soit $y = x^2 - 4x + 1$.
   On en déduit les coordonnées de l'intersection avec l'axe O_y : $(0; 1)$.

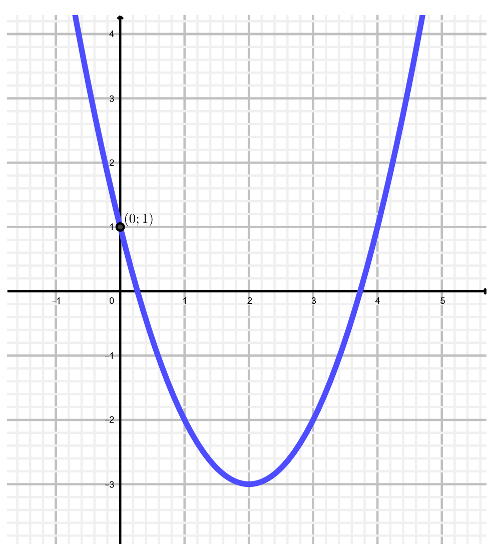


FIGURE 6.5 – Graphe de $y = x^2 - 4x + 1$.

2. **La forme standard :** $y = a(x - x_S)^2 + y_S$.
   Ici, la lettre a est la même que celle de la forme polynomiale. Elle donne donc la convexité.
   Avantage : on a le sommet. x_S et y_S sont ses coordonnées.

   Exemple.

   (a) Soit $y = 3(x - 2)^2 + 5$. On en déduit les coordonnées du sommet : $S(2; 5)$.

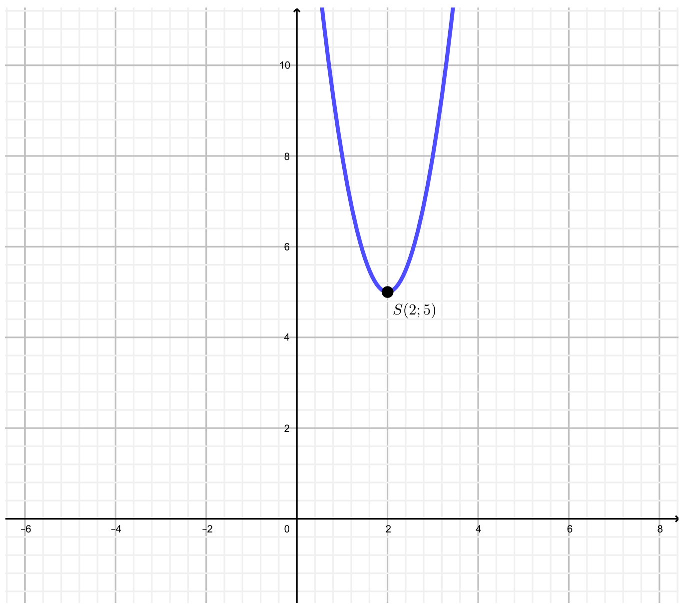


FIGURE 6.6 – Graphe de $y = 3(x - 2)^2 + 5$.

   (b) Soit $y = -2(x + 3)^2 - 3$. On en déduit les coordonnées : $S(-3; -3)$.

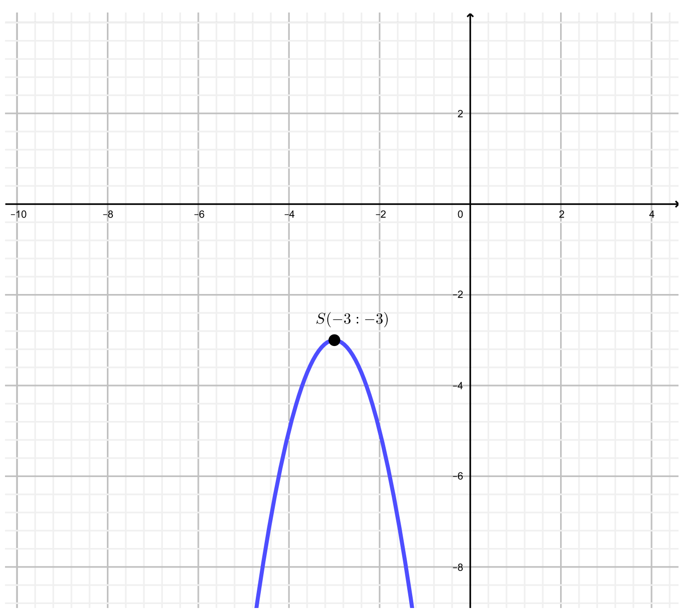


FIGURE 6.7 – Graphe de $y = -2(x + 3)^2 - 3$.

3. **La forme factorisée :** $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
La lettre a est toujours la même et donne donc la convexité.
Avantage : On possède les intersections avec l'axe O_x. Ici, la lettre a est toujours la même. x_1 et x_2 sont les zéros de la fonction (donc les points d'intersection avec l'axe O_x).

Exemple.

(a) Soit $y = (x - 2)(x - 4)$.
On en déduit que les intersections avec l'axe O_x sont les points $(2; 0)$ et $(4; 0)$.

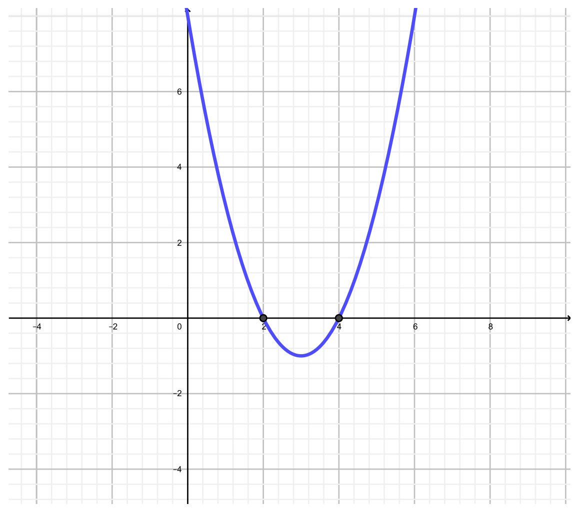


FIGURE 6.8 – Graphe de $y = (x - 2)(x - 4)$.

(b) Soit $y = 3(x + 5)\left(x - \dfrac{7}{2}\right)$.

On en déduit que les intersections avec l'axe O_x sont les points $(-5; 0)$ et $\left(\dfrac{7}{2}; 0\right)$.

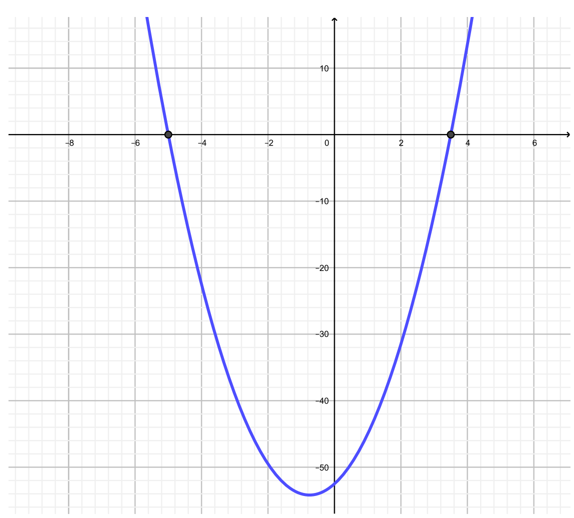


FIGURE 6.9 – Graphe de $y = 3(x + 5)\left(x - \dfrac{7}{2}\right)$.

Chaque forme a ses propres avantages et inconvénients.
Le tableau ci-dessous récapitule les propriétés des trois formes :

Forme	Expression fonctionnelle	Sommet	Intersections avec O_x
Polynomiale	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$S(x_S; y_S)$ avec $x_S = -\dfrac{b}{2a}$	En résolvant $f(x) = 0$
Standard	$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$	$S(x_S; y_S)$	En résolvant $f(x) = 0$
Factorisée	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$S(x_S; y_S)$ avec $x_S = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$	$I_1(x_1; 0)$ et $I_2(x_2; 0)$

6.4 Graphe d'une fonction du deuxième degré

Pour une droite, deux points suffisaient pour la caractériser. Ce n'est plus forcément le cas pour une fonction du deuxième degré. Il faut calculer les coordonnées des intersections avec les axes et le sommet. Si cela n'est pas suffisant, on peut construire un tableau de valeurs.

Exemple. Traçons la parabole $\mathcal{P} : y = -2(x - 2)(x + 4)$.

La première chose à faire est d'identifier si la parabole est donnée sous une forme connue. On remarque ici qu'il s'agit de la forme factorisée. L'avantage de cette dernière est de pouvoir en déduire les zéros de la fonction :

$$x_1 = 2 \text{ et } x_2 = -4.$$

Les intersections avec l'axe O_x sont donc : $(2; 0)$ et $(-4; 0)$.

Pour trouver l'intersection avec l'axe O_y, il suffit de remplacer x par 0.

$$y = -2(0 - 2)(0 + 4) = -2(-2)(4) = 16.$$

Ainsi, l'intersection avec l'axe O_y est donné par le point $(0; 16)$.

Quant au sommet, nous pouvons choisir la méthode adéquate pour tout d'abord trouver sa coordonnée x_S. Comme nous possédons déjà x_1 et x_2, nous pouvons donc calculer

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = -1.$$

Pour trouver y_S, il suffit de remplacer la valeur de x_S dans l'expression fonctionnelle pour trouver y_S.

$$y_S = -2(-1 - 2)(-1 + 4) = -2(-3)(3) = 18.$$

Le sommet est donc le point $S(-1; 18)$.

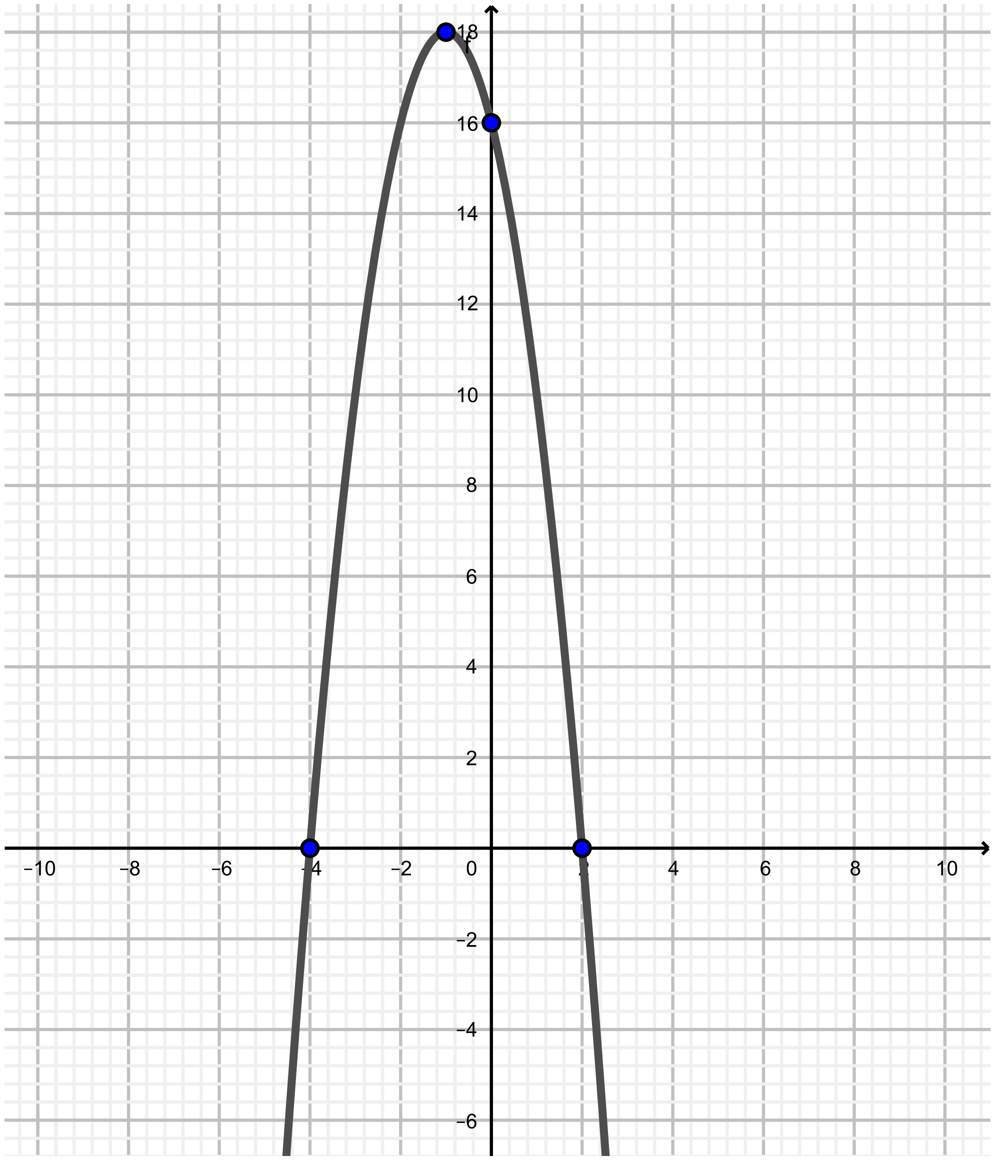


FIGURE 6.10 – Graphe de $y = -2(x-2)(x+4)$.

Comment retrouver l'équation d'une parabole passant par certains points donnés ?

En fonction de la nature des points connus, on choisit la forme adéquate. Puis on utilise le dernier point donné pour trouver la valeur du coefficient a.

Exemple. Soit la parabole passant par les points $(-3;0)$, $(1;0)$ et $(3;4)$.

On remarque ici que nous possédons les points d'intersections avec l'axe O_x. Autrement dit, nous savons que $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$ (ou vice-versa). Connaissant cela, nous allons opter pour la forme factorisée

$$y = a(x - x_1)(x - x_2),$$

qui s'écrit donc

$$\begin{aligned} y &= a(x-(-3))(x-1) \\ y &= a(x+3)(x-1). \end{aligned}$$

Afin de trouver la valeur de a, on utilise le point $(3\,;4)$. En effet, on sait que lorsque $x = 3$, $y = 4$, donc nous pouvons remplacer provisoirement dans l'équation afin d'obtenir plus qu'une inconnue (à savoir a).

$$\begin{array}{rcl|l} 4 &=& a(3+3)(3-1) & \\ 4 &=& 12a & :12 \\ a &=& \dfrac{1}{3}. & \end{array}$$

Donc l'équation de la parabole est

$$y = \frac{1}{3}(x+3)(x-1).$$

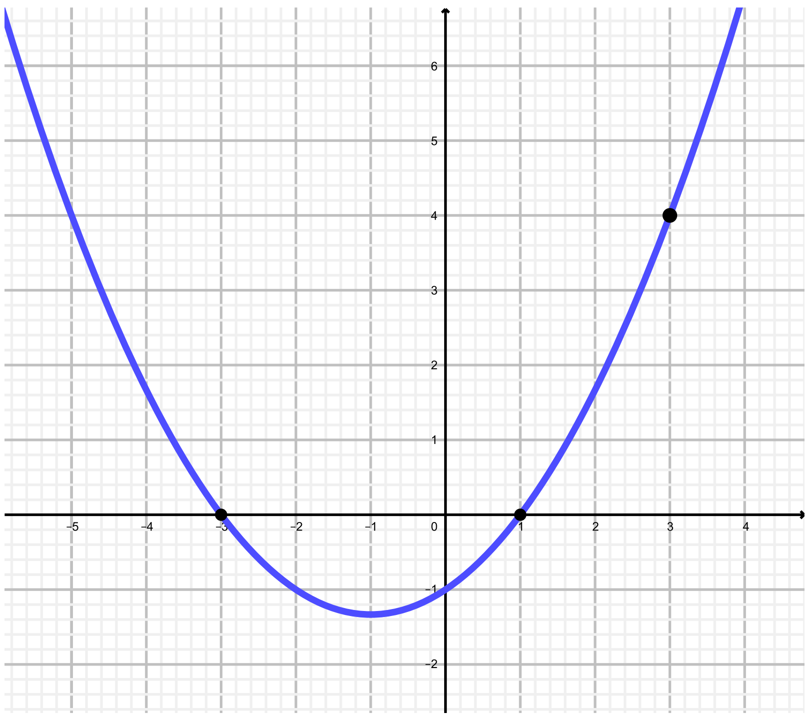


FIGURE 6.11 – Graphe de $y = \dfrac{1}{3}(x+3)(x-1)$.

Exercice 6.6. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - 6$.

a) Déterminer par calcul les coordonnées des points d'intersection entre le graphe de f et les axes de coordonnées.

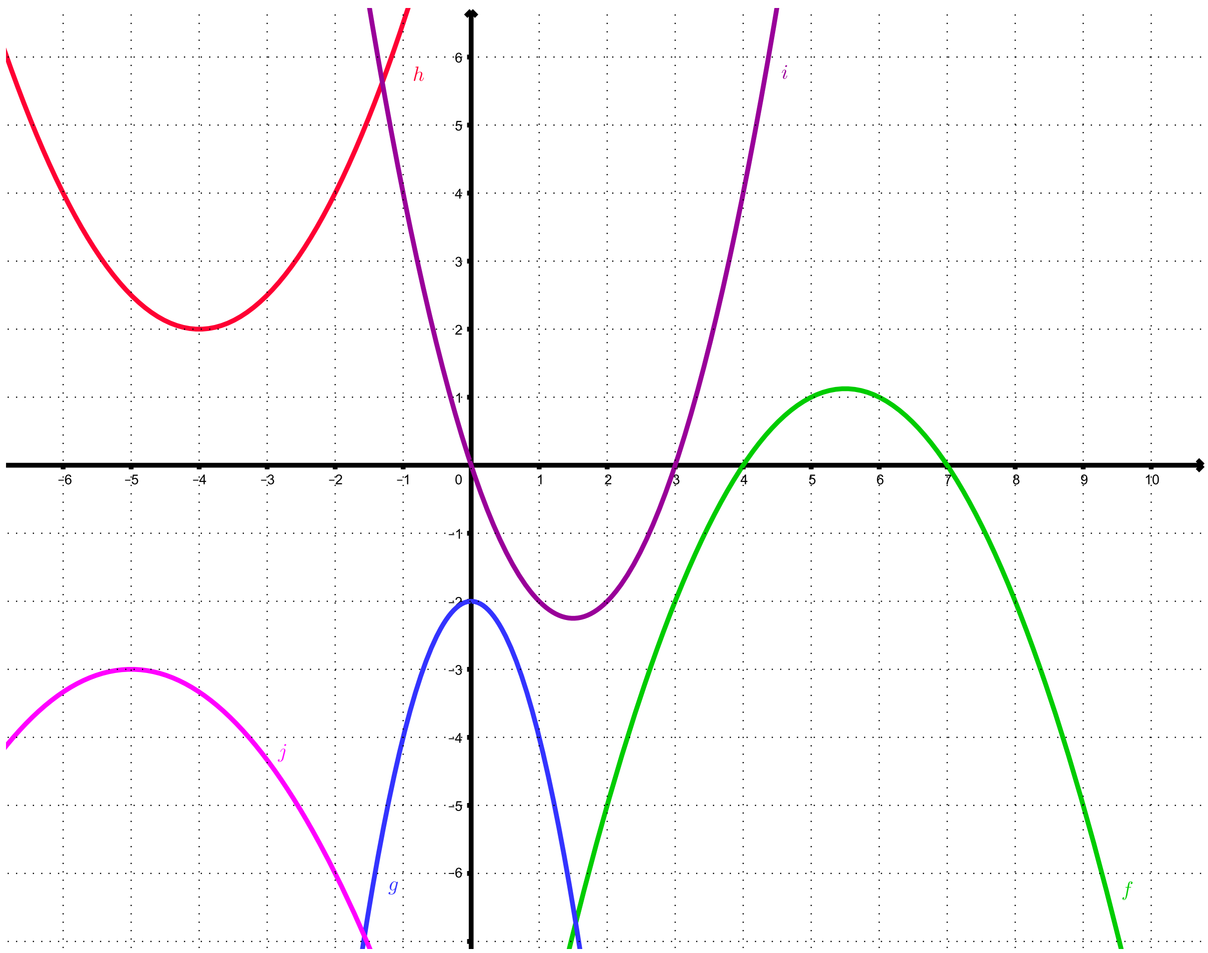
b) Déterminer par calcul les coordonnées du sommet de la parabole.

c) Calculer les coordonnées d'autres points du graphe de f et le tracer.

Exercice 6.7. Déterminer les coordonnées du sommet de chacune des paraboles suivantes.

a) $f_1 : y = 5(x-4)^2 - 3$	b) $f_2 : y = (x-1)^2 + 2$
c) $f_3 : y = -2(x+3)^2$	d) $f_4 : y = 4x^2 - 5$
e) $f_5 : y = 3x^2 + 7$	f) $f_6 : y = -0,5(x-10)^2$
g) $f_7 : y = 5(x-4)(x+3)$	h) $f_8 : y = (x-1)(x+1)$
i) $f_9 : y = -2(x+3)(x-4)$	j) $f_{10} : y = 4(x-2)^2$
k) $f_{11} : y = 3x(x+5)$	l) $f_{12} : y = -0,5x(x-10)$

Exercice 6.8. Trouver l'expression fonctionnelle des 5 fonctions dont les graphes sont les paraboles ci-dessous.



Exercice 6.9. Déterminer l'expression fonctionnelle de la fonction f de sommet $S(-7;-8)$ passant par le point $A(-3;7)$.

6.5 Intersection de deux fonctions

La méthode est identique à celle utilisée pour calculer l'intersection de deux droites. Il suffit de résoudre le système constitué des deux équations de parabole.

Exemple. Soient

$$\mathcal{P} : y = \frac{1}{2}(x+1)^2 \text{ et } d : -x - y = -3.$$

On résout le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{1}{2}(x+1)^2 \\ -x-y & = & -3 \end{array} \right. .$$

Il existe bien sûr plusieurs manières de procéder, mais en isolant y dans l'équation de la droite, nous pouvons procéder facilement à une comparaison (substitution des y)

$$\begin{array}{rcl|l} -x-y & = & -3 & +y+3 \\ y & = & -x+3. & \end{array}$$

Ainsi, par substitution des y, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{1}{2}(x+1)^2 & = & -x+3 & \\ \frac{1}{2}(x^2+2x+1) & = & -x+3 & \cdot 2 \\ x^2+2x+1 & = & -2x+6 & +2x-6 \\ x^2+4x-5 & = & 0. & \end{array}$$

Par la formule de Viète, on obtient

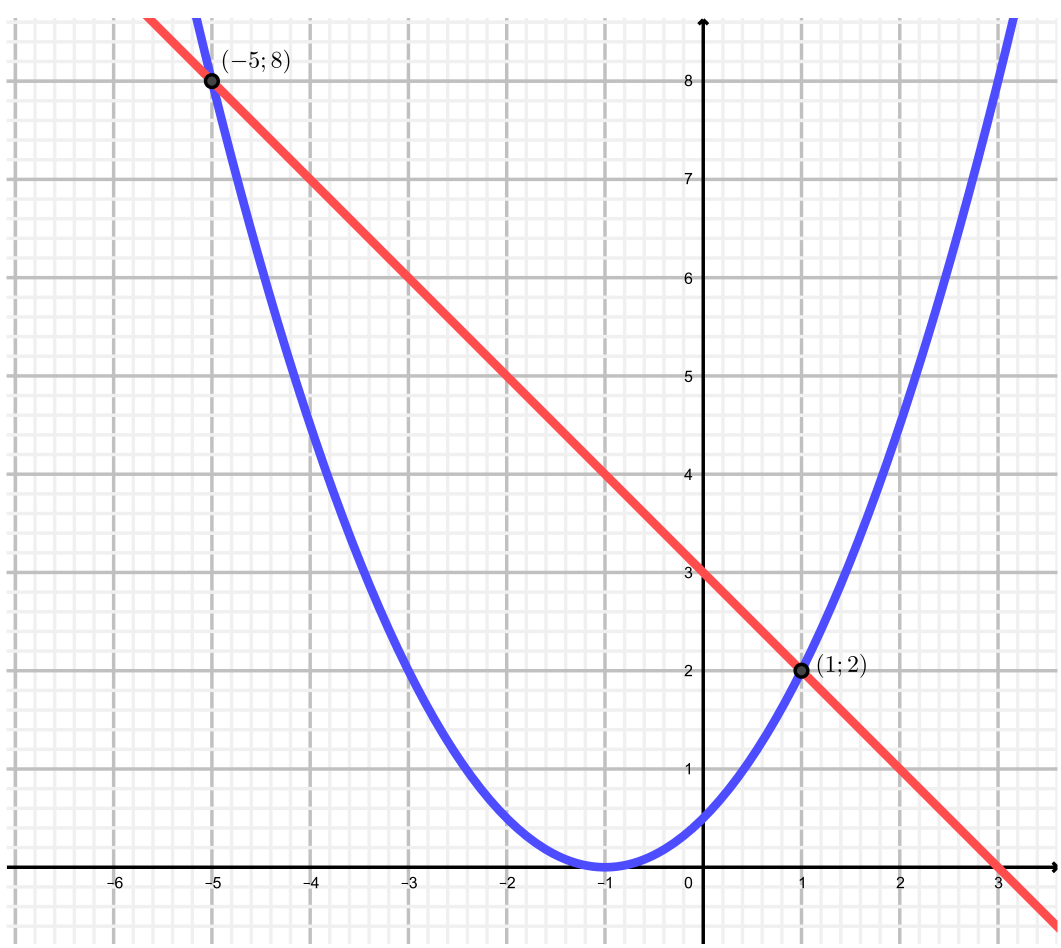
$$x_1 = -5 \text{ et } x_2 = 1.$$

Il s'agit là de la coordonnée x des deux points d'intersection, qui sont donc de la forme $(-5; ?)$ et $(1; ?)$.

Pour trouver leur coordonnée y respective, il suffit de remplacer la valeur de x dans l'une des deux fonctions.

$y = -(-5) + 3 = 8$. Donc le point est $(-5; 8)$.

$y = -1 + 3 = 2$. Donc le point est $(1; 2)$.



Exercice 6.10. Déterminer les coordonnées du (ou des) éventuel(s) point(s) d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ avec la droite d dans chacun des cas suivants.

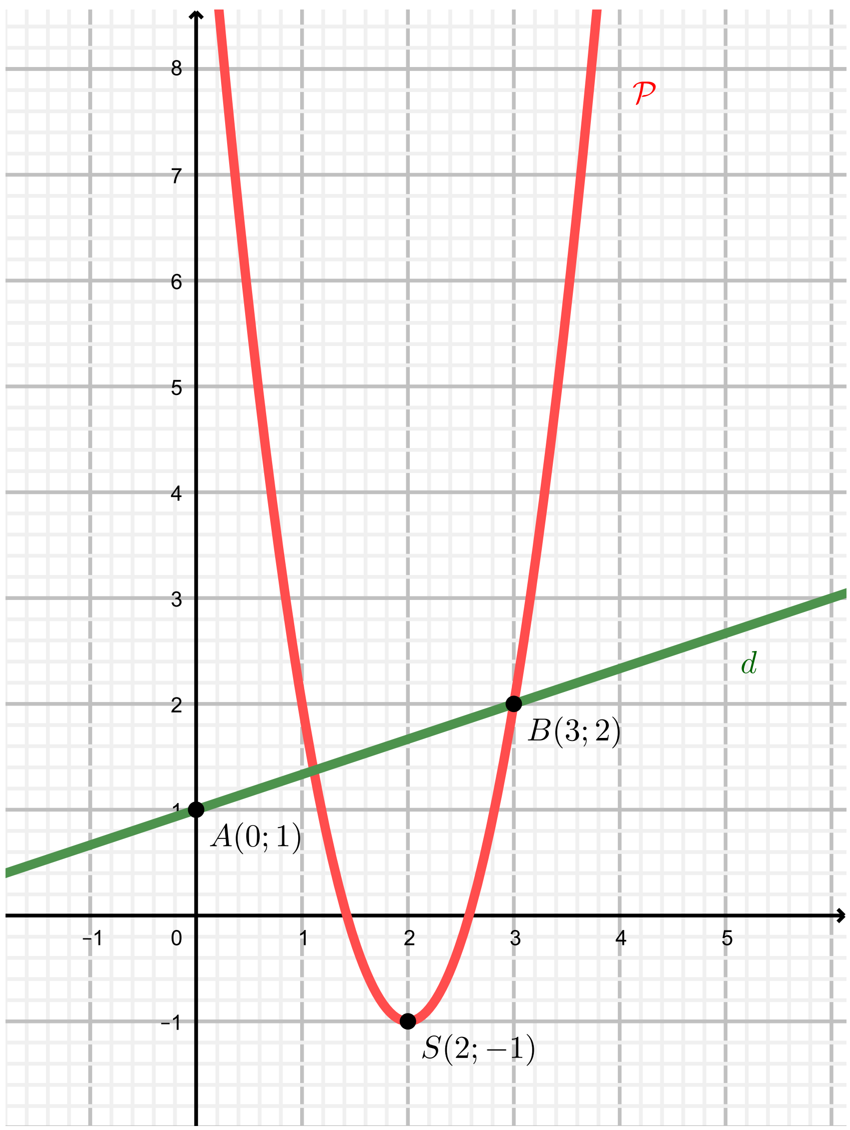
a) $\mathcal{P} : y = x^2 + 7x - 5$ et $d : y = 4x + 5$.
b) $\mathcal{P} : y = 4x^2 - x + 2$ et $d : y = 3x + 1$.
c) $\mathcal{P} : y = 7x^2 + 3x + 2$ et $d : y = x - 2$.

Exercice 6.11. Déterminer les coordonnées du (ou des) éventuel(s) point(s) d'intersection des paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ suivantes.

$$\mathcal{P}_1 : y = x^2 + 5x - 2;$$

$$\mathcal{P}_2 : y = 2x^2 + 11x - 9.$$

Exercice 6.12. Soit le graphe suivant.



a) Trouver l'équation de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite d.

b) Calculer les points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et d.

Exercice 6.13 (Examen 2005). La parabole $\mathcal{P}$ est donnée par l'équation

$$y = -2x^2 - 4x + 6.$$

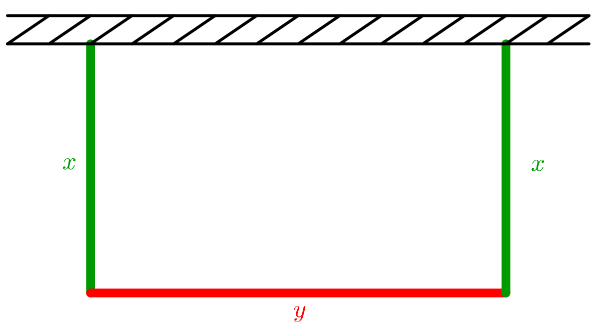
a) Répondre aux différentes questions et montrer tous les calculs.
   a) Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}$.
   b) Calculer les coordonnées de l'intersection de $\mathcal{P}$ avec les axes.
   c) Tracer la parabole (1 unité = 2 carrés).

b) En observant le graphe de la fonction, répondre aux questions suivantes.
   a) Combien de solutions possède l'équation $-2x^2 - 4x + 6 = 100$?
   b) Combien de solutions possède l'équation $-2x^2 - 4x + 6 = -100$?
   c) Combien de solutions possède l'équation $-2x^2 - 4x + 6 = 8$?
   d) Combien de solutions possède l'équation $-2x^2 - 4x + 6 = x$?

6.5.1 Optimisation du deuxième degré

Exemple. On dispose de barrières d'une longueur totale de 100 mètres pour construire un enclos rectangulaire le long d'un mur rectiligne. Quelles dimensions faut-il donner à cet enclos pour que le pré qu'il délimite ait une aire maximale ?

Posons x et y comme indiqué dans la figure ci-dessous.



On remarque que x et y ne peuvent pas prendre n'importe quelles valeurs. Par exemple, si $x = 40$ m, alors y est contraint de valoir 20 m vu que l'on dispose de 100 m de barrières au total.

On en tire ainsi la contrainte suivante :

Contrainte :

$$\begin{aligned} 2x + y &= 100 \\ y &= 100 - 2x. \end{aligned}$$

L'aire de l'enclos est donnée par

$$A = x \cdot y = x \cdot (100 - 2x) = 100x - 2x^2.$$

Ainsi, la fonction $A(x) = -2x^2 + 100x$ détermine l'aire de l'enclos en fonction de la valeur du côté x.

L'abscisse de son sommet, qui sera un maximum vu que $a = -2 < 0$ est donnée par

$$x_S = \frac{-100}{2 \cdot (-2)} = 25.$$

Ainsi, l'enclos cherché aura pour dimensions $x = 25$ m et $y = 100 - 2 \cdot 25 = 50$ m. Son aire est donnée par

$$A(25) = 25 \cdot 50 = 1250 \text{ m}^2.$$

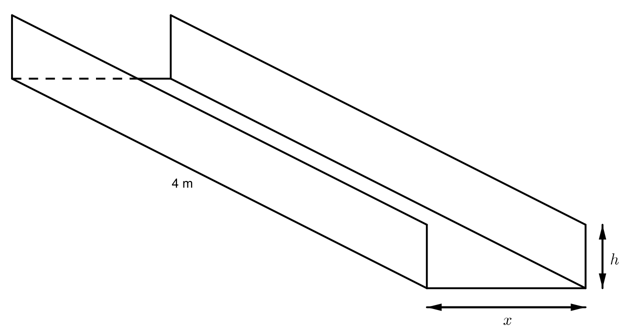
Exercice 6.14. Parmi tous les rectangles de périmètre 10, quel est celui dont l'aire est la plus grande ? Quelle est cette aire ?

Exercice 6.15. Soient la droite $d : y = -x + 1$ et la parabole $p : y = x^2 + 2x - 3$.

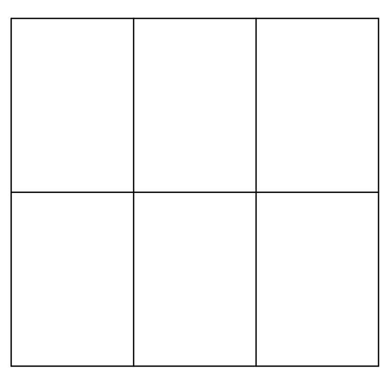
a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection $I_1(x_1; y_1)$ et $I_2(x_2; y_2)$ entre d et p.

b) Trouver la distance verticale maximale entre la parabole et la droite dans l'intervalle $[x_1; x_2]$.

Exercice 6.16. Une plaque de métal rectangulaire longue de 4 mètres et large de 40 centimètres est pliée de sorte à former une gouttière en forme de parallélépipède rectangle. Quelles dimensions faut-il donner à cette gouttière pour qu'elle ait un volume maximal ?

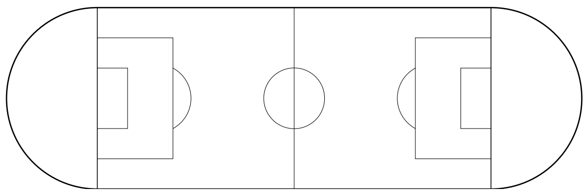


Exercice 6.17. On dispose de 288 mètres de clôture grillagée pour construire 6 enclos identiques pour un zoo selon le plan ci-dessous. Quelles dimensions faut-il donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol ?



Exercice 6.18. Une société immobilière possède 180 studios qui sont tous occupés quand le loyer est de 300 francs par mois. La société estime qu'à chaque augmentation de loyer de 10 francs, 5 studios sont libérés. Quel devrait être le loyer pour que la société ait un revenu mensuel maximal ?

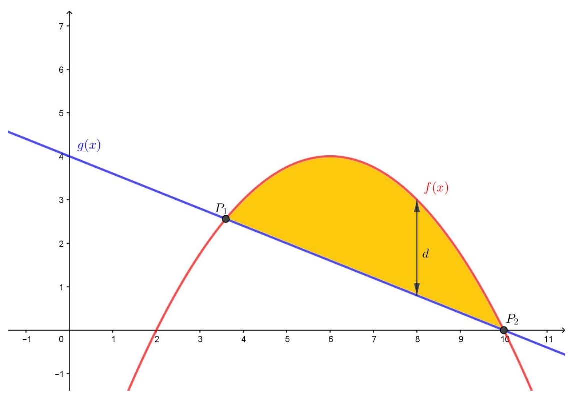
Exercice 6.19. Une piste d'athlétisme de 400 m est formée par deux demi-disques en ses extrêmités, à l'image de ce qui apparaît ci-dessous. Déterminer la longeur et la largeur du terrain de football d'aire maximale.
Rappel : Le périmètre P d'un cercle est donné par $P = 2\pi r$.



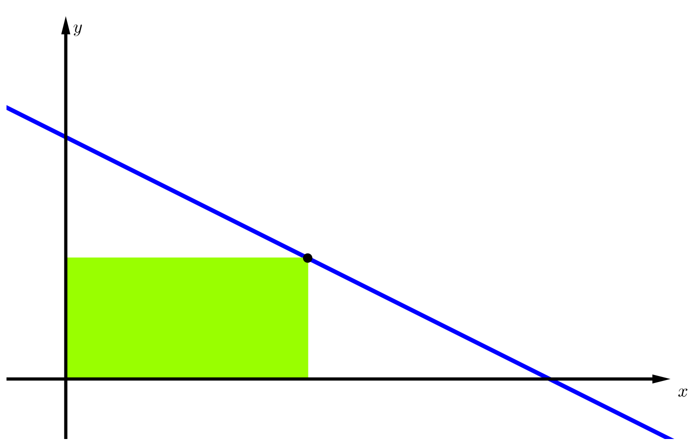
Exercice 6.20. On donne l'équation d'une parabole $f(x) = -0,25x^2 + 3x - 5$ ainsi que l'équation d'une droite $g(x) = -0,4x + 4$.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection P_1 et P_2 entre la droite et la parabole.

b) Déterminer la distance maximale d entre la parabole et la droite dans la région hachurée.



Exercice 6.21. Soit le rectangle coloré ci-dessous, limité par l'axe O_x, l'axe O_y et la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Quelles sont les dimensions de ce rectangle, sachant qu'il est d'aire maximale ?



Exercice 6.22. Lorsque les places pour un match de football sont de 40 francs, il y a 14'000 spectateurs. Chaque augmentation de 1 franc fait perdre 280 spectateurs. Quel prix d'entrée doit-on fixer pour maximiser la recette du club ?

Exercice 6.23. Un parking d'une capacité totale de 600 places loue ses places à 120 francs par mois. Actuellement, 480 places sont occupées. Si on diminuait le prix mensuel de 1 franc, alors 5 places supplémentaires seraient occupées. Quel devrait être le prix mensuel pour maximiser le revenu ?

6.6 Application à l'économie

Maximiser le profit revient à représenter sur un même graphe les fonctions des coûts C et de recettes R en fonction du prix unitaire p d'un bien. Le profit est alors maximal lorsque le bénéfice B égal à la différence entre R et C est maximal.

On sait que le nombre d'unités x d'un bien dépend du prix p de ce dernier. En supposant une dépendance linéaire entre x et p

$$x = mp + h,$$

on peut exprimer à présent les coûts et les recettes directement en fonction du prix p.

Dans ce cas, la recette R devient une fonction du deuxième degré

$$R(p) = px = p(mp + h) = mp^2 + ph.$$

Les coûts restent une fonction du premier degré

$$C(p) = ax + b = a(mp + h) + b.$$

Pour trouver le profit maximal, il suffit de déterminer la valeur de p pour laquelle $B(p) = R(p) - C(p)$ est maximal.

Exemple. Une entreprise fabrique un certain objet dont la demande x est donnée par

$$x = 10200 - 300p.$$

Les frais fixes s'élèvent à 14400 francs et les frais variables à 8 francs par objet.

On détermine les fonctions

— des coûts : $C(p) = 8x + 14400 = 8(10200 - 300p) + 14400 = -2400p + 96000$.
— de la recette : $R(p) = px = -300p^2 + 10200p$.
— du bénéfice : $B(p) = R(p) - C(p) = -300p^2 + 12600p - 96000$.

Le bénéfice maximal est atteint lorsque

$$p = -\frac{b}{2a} = \frac{-12600}{2 \cdot (-300)} = 21.$$

A ce prix, le bénéfice vaut $B(21) = 36300$ francs.

Exercice 6.24. Un auteur de livre de mathématiques souhaite vendre son ouvrage. Une étude de marché lui indique que la demande s'exprime par $x = 1200 - 15p$ où p est le prix de vente du livre. Les coûts de production sont évalués à 9300 francs de frais fixes et 8 francs de frais variables par livre. A quel prix de vente doit-il fixer son ouvrage s'il désire

a) Un revenu maximal ? Quel sera alors ce revenu ?

b) Atteindre le seuil de rentabilité inférieur ?

c) Atteindre le seuil de rentabilité supérieur ?

d) Un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

Exercice 6.25. Une étude de marché a permis d'établir la relation suivante entre le prix p d'une calculatrice et le volume x de calculatrices vendues :

$$x = 3920 - 28p.$$

Le coût de production de x calculatrices (en francs) est donné par

$$C(x) = 30x + 11872.$$

a) Déterminer le revenu $R(p)$ en fonction du prix de vente p des calculatrices.

b) Déterminer le coût de production $C(p)$ en fonction du prix de vente p des calculatrices.

c) Déterminer le profit maximal.

Exercice 6.26. On souhaite mettre sur le marché un nouveau produit dont la demande (nombre d'objets vendus) est donné par

$$D(p) = 660 - 22p$$

avec p le prix de vente. Les coûts de production se montent à 820 francs plus 7 francs de frais variables par objet.

a) Déterminer les fonctions qui donnent le revenu, le coût et le bénéfice en fonction du prix.

b) Déterminer la fourchette de prix qui assure un revenu positif.

c) Calculer le prix et le nombre d'objets qui maximise le revenu. Quel est ce revenu maximal ?

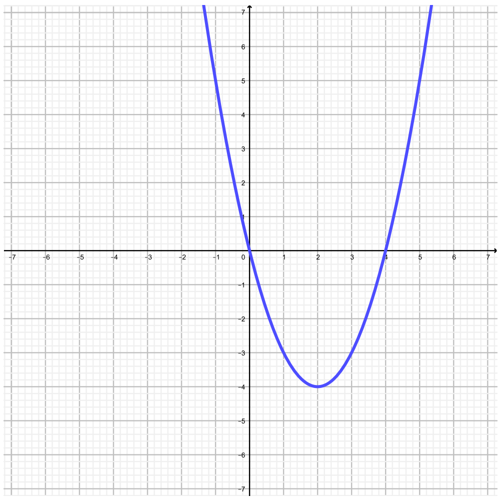
d) Déterminer la fourchette de prix qui permet de réaliser un bénéfice.

e) Calculer le prix et le nombre d'objets qui maximise le bénéfice. Quel est ce bénéfice ?

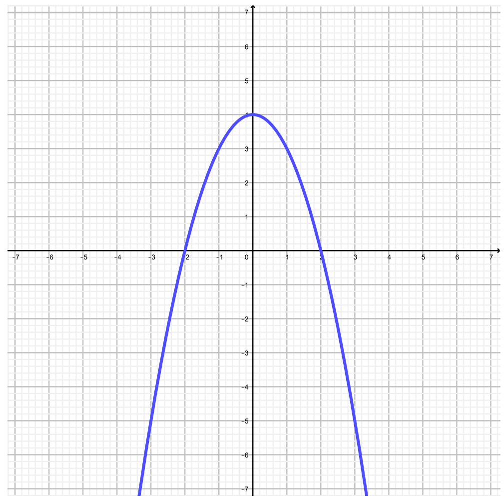
6.7 Solutions

Exercice 6.1.

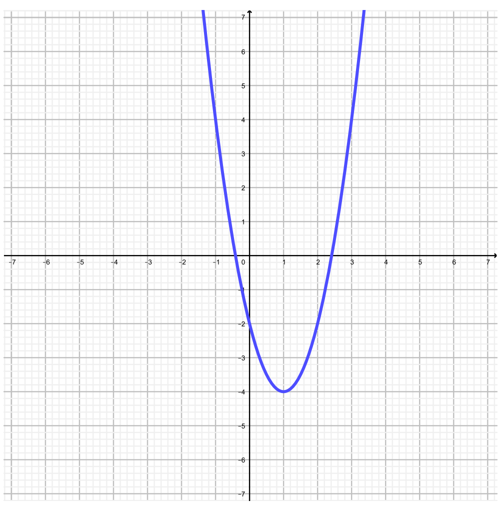
a)



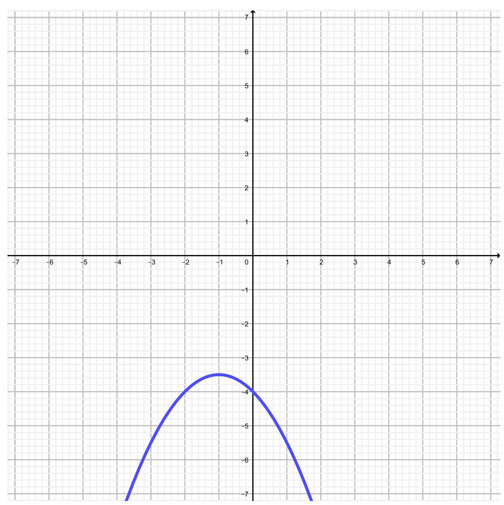
b)



c)



d)



Exercice 6.2.

a) $I_1(-1;0), I_2(3;0), I_3(0;-3)$ et $S(1;-4)$

b) $I_1(0;0), I_2(5;0)$ et $S\left(\frac{5}{2};\frac{25}{4}\right)$

c) $I(0;3)$ et $S(0;3)$

d) $I(0;-4)$ et $S\left(\frac{5}{4};-\frac{7}{8}\right)$

Exercice 6.3.

a) 5 m.

b) 3 m.

c) 7 m.

d) 3, 4 m.

Exercice 6.4.

a) A $3,13$ m.

b) 5 m.

c) $a \cong 6,87$ m.

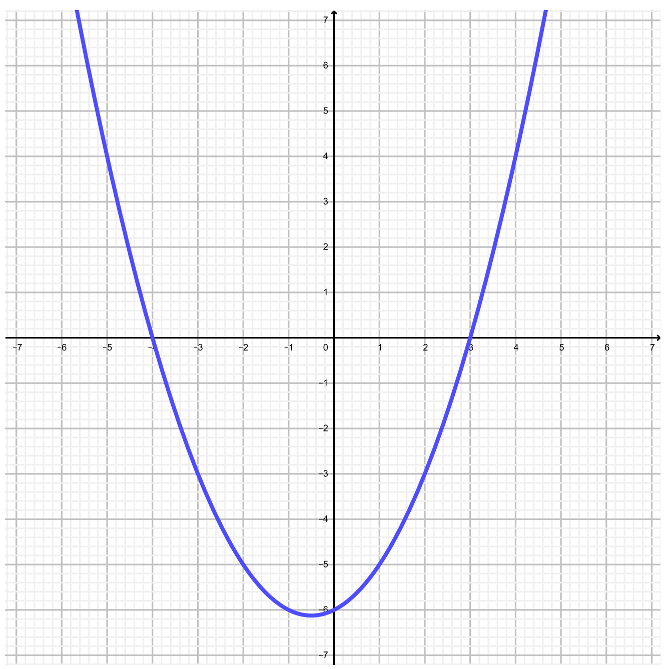
Exercice 6.5. $2,39$ m.

Exercice 6.6.

a) $I_1(-4;0)$, $I_2(3;0)$ et $I_3(0;-6)$.

b) $S\left(-\frac{1}{2};-\frac{49}{8}\right)$.

c)



Exercice 6.7.

a) $S\,(4;-3)$

b) $S\,(1;2)$

c) $S\,(-3;0)$

d) $S\,(0;-5)$

e) $S\,(0;7)$

f) $S\,(10;0)$

g) $S\left(\frac{1}{2};-\frac{245}{4}\right)$

h) $S\,(0;-1)$

i) $S\left(\frac{1}{2};\frac{49}{2}\right)$

j) $S\,(2;0)$

k) $S\left(-\frac{5}{2};-\frac{75}{4}\right)$

l) $S\left(5;\frac{25}{2}\right)$

Exercice 6.8.

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 14.$

$g(x) = -2x^2 - 2.$

$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 10.$

$i(x) = x^2 - 3x.$

$j(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{34}{3}.$

Exercice 6.9. $f(x) = \frac{15}{16}(x+7)^2 - 8.$

Exercice 6.10.

a) $I_1(2; 13)$ et $I_2(-5; -15)$.

b) $I\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

c) Pas d'intersection.

Exercice 6.11. $I_1(-7; 12)$ et $I_2(1; 4)$.

Exercice 6.12.

a) $\mathcal{P} : y = 3(x-2)^2 - 1$ et $d : y = \frac{1}{3}x + 1$.

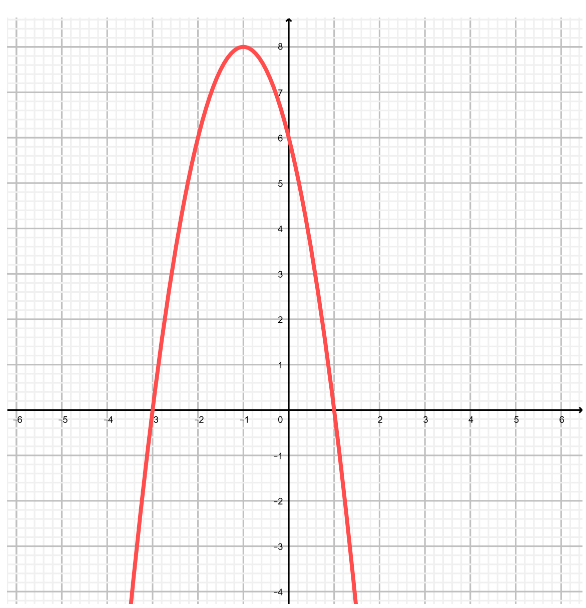
b) $I_1\left(\frac{10}{9}; \frac{37}{27}\right)$ et $I_2\,(3; 2)$.

Exercice 6.13.

a) a) $S(-1; 8)$.

   b) $I_1(-3; 0)$, $I_2(1; 0)$ et $I_3(0; 6)$.

   c)



b) a) 0 solution.
   b) 2 solutions.
   c) 1 solution.
   d) 2 solutions.

Exercice 6.14. Un carré de côté $2,5$ et d'aire $6,25$.

Exercice 6.15.

a) $I_1(-4;5)$ et $I_2(1;0)$.

b) $\frac{25}{4}$.

Exercice 6.16. $x = 20$ cm et $h = 10$ cm.

Exercice 6.17. 16 m sur 18 m.

Exercice 6.18. 330 francs par mois.

Exercice 6.19. 100 m sur $\frac{200}{\pi} \cong 63,66$ m.

Exercice 6.20.

a) $(3,6;2,56)$ et $(10;0)$.

b) $2,56$.

Exercice 6.21. 3 sur $\frac{3}{2}$.

Exercice 6.22. Le prix d'entrée doit être de 45 francs.

Exercice 6.23. 108 francs.

Exercice 6.24.

a) 40 francs, 24000 francs.

b) 18 francs.

c) 70 francs.

d) 44 francs, 10'140 francs de bénéfice.

Exercice 6.25.

a) $R(p) = 3920p - 28p^2$.

b) $C(p) = 129472 - 840p$.

c) 72828 francs.

Exercice 6.26.

a) $R(p) = 660p - 22p^2$, $C(p) = 5440 - 154p$ et $B(p) = -22p^2 + 814p - 5440$.

b) Entre 0 et 30 francs.

c) 330 objets au prix de 15 francs. Le revenu sera alors de 4950 francs.

d) Entre environ $8,75$ francs et $28,25$ francs.

e) 253 objets au prix de $18,5$ francs. Le bénéfice sera de $2089,5$ francs.

6.8 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

6.1 ☐ Représenter le graphe d'une fonction du deuxième degré.

6.2 ☐ Calculer les coordonnées du sommet d'une parabole et préciser la nature de celui-ci.

6.3 ☐ Calculer les coordonnées des intersections d'une parabole avec les axes.

6.4 ☐ Déterminer l'expression fonctionnelle d'une parabole (sous forme polynomiale, standard ou factorisée) à partir de son graphe et d'un point et son sommet ou de ses intersections avec l'axe O_x.

6.5 ☐ Calculer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection d'une parabole et d'une parabole ou d'une autre droite.

6.6 ☐ Résoudre un problème d'optimisation débouchant sur une fonction du deuxième degré.

6.7 ☐ Calculer le bénéfice maximal relatif à un problème d'économie.

Chapitre 7

Fonctions exponentielles et logarithmes

7.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous étudiions des fonctions dont l'expression fonctionnelle était de la forme

$$y = \text{variable}^{\text{constante}},$$

comme par exemple $f(x) = x^2$ ou $f(x) = 2x + 3$.

Ces fonctions étudiées jusqu'ici permettent de modéliser des phénomènes relativement simples comme les mouvements uniformes en physique ou l'intérêt simple en économie. Des processus plus sophistiqués, tels que l'intérêt composé (finance), la radioactivité (datation au carbone 14, déchets radioactifs, ...) ou l'évolution de populations (humaine, bactériologique, proies-prédateurs, ...) pour ne citer que quelques exemples, font appel à des fonctions d'un genre différent : *les fonctions exponentielles et logarithmes.* En plus de cet aspect pratique, les fonctions exponentielles et logarithmes présentent des propriétés mathématiques remarquables.

Définition. Une *fonction exponentielle* est une fonction de la forme

$$y = \text{base constante}^{\text{variable}}.$$

avec a strictement positif.

Exemple. $f(x) = 2^x$ ou $f(x) = 0.5^x$.

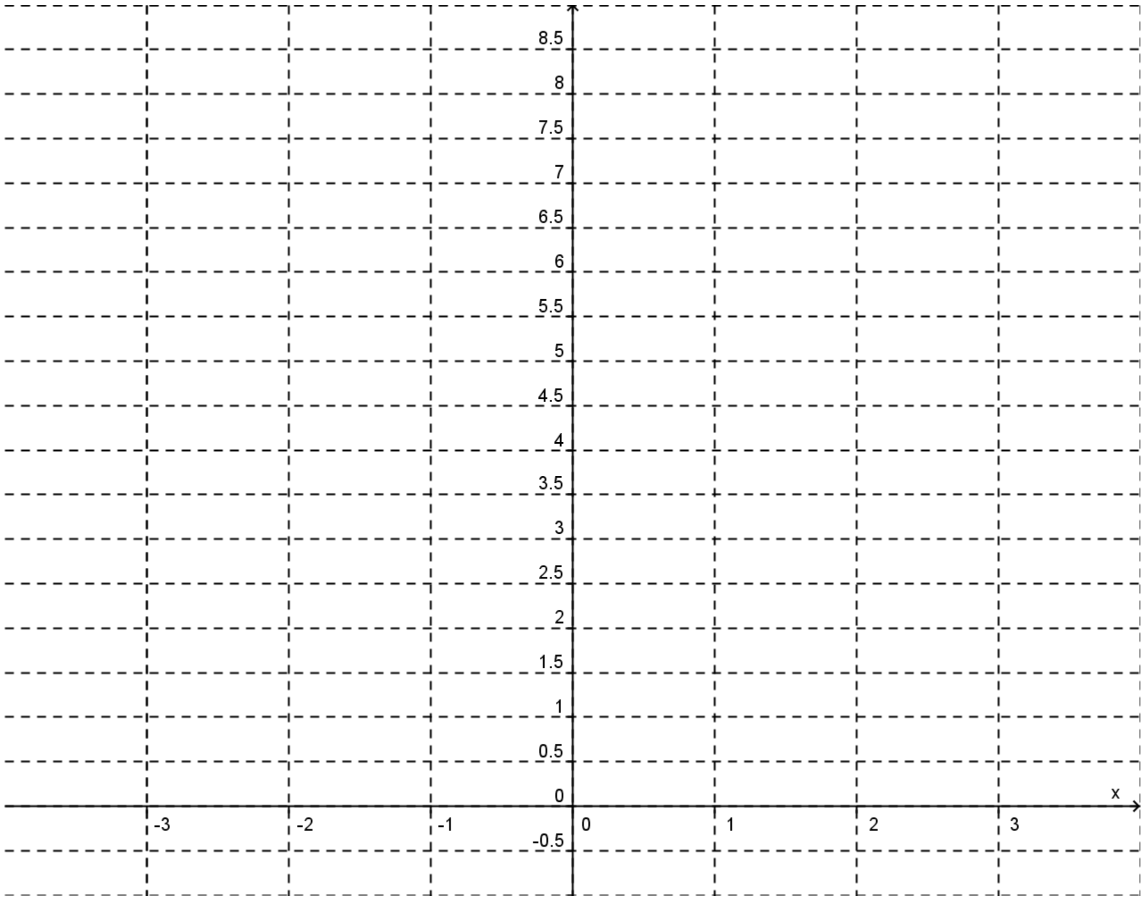
On dit que $f(x) = 2^x$ est une *fonction exponentielle de base 2.*

Exemple. Soient $f(x) = 2^x$ et $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Remplissons les tableaux de valeurs ci-dessous afin de pouvoir tracer les fonctions f et g.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							



Exercice 7.1. Représenter graphiquement les fonctions f ci-dessous.

a) $f(x) = 5^x$ b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$

c) $f(x) = 10^x$ d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{10}\right)^x$

Pour quelles valeurs de a la fonction $f(x) = a^x$ est-elle croissante ? Décroissante ?

7.2 Equations exponentielles

Tout d'abord, procédons à un rappel des propriétés des puissances :

1. $a^0 = 1$.
2. $a^1 = a$.
3. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
4. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
5. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
6. $(a^n)^m = a^{mn}$.
7. $(a \cdot b)^n = a^n b^n$.
8. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Nous commencerons par traiter deux cas précis :

Exemple (mêmes bases). Résoudre l'équation $5^{2x-3} = 5^{x+7}$.

$$\begin{array}{rcl|l} 5^{2x-3} & = & 5^{x+7} & \\ 2x-3 & = & x+7 & -x+3 \\ x & = & 10. & \end{array}$$

Exemple (bases presque différentes). Résoudre l'équation $3^{5x-8} = 9^{x+2}$.

$$\begin{array}{rcl|l} 3^{5x-8} & = & 9^{x+2} & \text{On exprime avec la même base} \\ 3^{5x-8} & = & (3^2)^{x+2} & \text{Propriété des puissances de puissances} \\ 3^{5x-8} & = & 3^{2(x+2)} & \\ 3^{5x-8} & = & 3^{2x+4} & \\ 5x-8 & = & 2x+4 & -2x+8 \\ 3x & = & 12 & :3 \\ x & = & 4. & \end{array}$$

Exercice 7.2. Résoudre les équations suivantes.

a) $2^x = 8$	b) $3^{4x} = 9^{x+5}$
c) $3^{5x-8} = 9^{x+2}$	d) $7^{x+6} = 7^{3x-4}$
e) $6^{7-x} = 6^{2x+1}$	f) $3^{2x+3} = 3^{(x^2)}$
g) $9^{(x^2)} = 3^{3x+2}$	h) $2^{-100x} = 0,5^{x-4}$
i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} = 2$	j) $4^{x-3} = 8^{4-x}$
k) $27^{x-1} = 9^{2x-3}$	l) $5^{x+2} \cdot 25^{-x} = 625$

7.3 Application des fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont très utilisées lorsque l'on décrit l'évolution de différentes populations (animales, bactéries, etc.), l'évolution d'un prix (maison, voiture, etc.) ou encore pour le calcul d'intérêts composés.

Ces derniers illustrent parfaitement une croissance exponentielle.

Si l'on place 1000 francs sur un compte en banque à un taux annuel de 9%, nous aurons après un an la somme de

$$C_1 = 1000 + 1000 \cdot 0,09 = 1090 \text{ francs.}$$

L'année suivante, nous n'aurons pas une augmentation de 90 francs, car nous calculons le 9% sur le capital en place, soit 1090 francs.

Ainsi,

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot 9\% = 1090 + 1090 \cdot 0,09 = 1188,10 \text{ francs.}$$

De manière générale, si l'on place une somme C_0 sur un compte en banque à un taux de t (en code décimal), on peut calculer les différents capitaux de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & C_0 + C_0 \cdot t = C_0 \cdot (1+t) \\ C_2 & = & C_1 + C_1 \cdot t = C_1 \cdot (1+t) = C_0 \cdot (1+t) \cdot (1+t) = C_0 \cdot (1+t)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_n & = & C_0 \cdot (1+t)^n. \end{array}$$

Ici, n représente la durée, qui peut être exprimée en heures, jours, semaines, mois, années, etc. selon le contexte.

Théorème. *La formule des intérêts composés est*

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1+t)^n.}$$

où

$$\begin{array}{rcl} C_n & = & \textit{Capital final (après n années, n jours etc.).} \\ t & = & \textit{Le taux d'intérêt (ATTENTION, à noter en code décimal!).} \\ n & = & \textit{La durée.} \\ C_0 & = & \textit{Le capital initial.} \end{array}$$

Remarque. En cas d'amortissement ou si la valeur diminue au fil du temps, t est négatif.

Exemple.

1. On place 1000 francs sur un compte en banque à un taux de $3,5\%$ annuel. A combien se montera le capital dans 7 ans ?

   On sait que $C_0 = 1000$, $t = 0,035$ et $n = 7$. On cherche C_7.

   $$C_7 = 1000(1+0,035)^7 \cong 1272,30 \text{ francs.}$$

2. On amortit l'achat d'une voiture au taux annuel de t. Sachant que son prix initial était de 40'000 francs, déterminer le taux t pour qu'il ne reste plus que 10'000 francs à rembourser après 9 ans.

   On sait que $n = 9$, $C_0 = 40000$ et $C_9 = 10'000$. On cherche t.

   $$\begin{array}{rcl|l} 10'000 & = & 40000(1+t)^9 & : 40'000 \\ 0,25 & = & (1+t)^9 & \sqrt[9]{\ } \\ 0,857 & \cong & 1+t & -1 \\ t & \cong & -0,143. & \end{array}$$

   Donc $t \cong -14,3\%$.

Exercice 7.3. Un capital placé au taux d'intérêt de 5% vaut aujourd'hui 1'000 francs.

a) Quelle sera sa valeur dans 6 ans ?

b) Quelle était sa valeur il y a 4 ans ?

c) A quel taux faudrait-il le placer pour qu'il double en 11 ans ?

Exercice 7.4. Une maladie est observée dans un pays et on désire étudier la vitesse de sa propagation. On dénombre aujourd'hui 1000 personnes atteintes, et on a constaté qu'en un mois, la quantité de malades augmente de 14% par rapport au mois précédent.

a) Déterminer la fonction $M(t)$ qui évalue le nombre de malades en fonction du nombre t de mois écoulés depuis aujourd'hui.

b) Combien y aura-t-il de malades dans trois mois ?

c) Combien y avait-il de malades il y a deux mois ?

Exercice 7.5. Une population de 350 élans, tous âgés d'un an, est introduite dans une réserve naturelle. Chaque année, 8% de l'effectif disparaît. Donner le nombre approximatif d'animaux survivant après 5, 8 et 12 ans.

Exercice 7.6. Une forêt s'étend exponentiellement. Elle occupe aujourd'hui $72'515$ m^3. Il y a 12 ans, elle occupait $47'228,5$ m^3.

a) Quel est, en %, le taux d'accroissement annuel de cette forêt ?

b) Quel volume occupait-elle il y a 5 ans ?

c) Quel volume occupera-t-elle dans 7 ans ?

7.4 Logarithmes

Exemple. Après combien d'années est-ce que 1000 francs placés sur un compte à 2% atteindront la somme de 1'268,24 francs ?

Pour répondre à une telle question, il s'agit de résoudre l'équation

$$1'268,24 = 1000(1 + 0,02)^n.$$

Or nous ne disposons pas d'outil pour résoudre une équation dans laquelle l'inconnue est un exposant.

Ce qui suit va nous aider à palier à ce problème.

Définition. Une *fonction logarithmique* de base a est définie comme la fonction inverse de l'exponentielle de base a. Nous avons la relation

$$\boxed{y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y.}$$

Où a est un nombre positif différent de 1, $x > 0$ et un nombre réel.

En d'autres termes, le logarithme répond à la question suivante :

$$\boxed{\text{"}a \text{ puissance combien donne } x\text{ ?"}}$$

Exemple.

1. $\log_2(8) = 3$ car $2^3 = 8$.
2. $\log_3(27) = 3$ car $3^3 = 27$.
3. $\log_4(2) = \frac{1}{2}$ car $4^{\frac{1}{2}} = 2$.
4. $\log_{10}(10) = 1$ car $10^1 = 10$.
5. $\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$ car $10^{-2} = \frac{1}{100}$.
6. $\log_3(1) = 0$ car $3^0 = 1$.
7. $\log_2(-4)$ n'existe pas. En effet, il n'est pas possible d'obtenir un nombre négatif par n'importe quelle puissance de 2.
8. Il en est de même pour $\log_a(0)$.

Remarque.

1. Il est impossible de calculer le logarithme d'un nombre négatif ou nul.
2. Lorsqu'aucune base n'est précisée, on considère qu'il s'agit d'une base 10. Autrement dit, $\log(x) = \log_{10}(x)$.

3. On appelle *logarithme naturel* ou *logarithme népérien* le logarithme défini en base e. On le note $\ln(x)$. Le nombre e est une constante mathématique appelée *nombre d'Euler*, d'après le nom de ce mathématicien bâlois (1707-1783). Elle est utilisée dans beaucoup de domaines comme l'évolution de population ou encore le calcul différentiel et intégral.

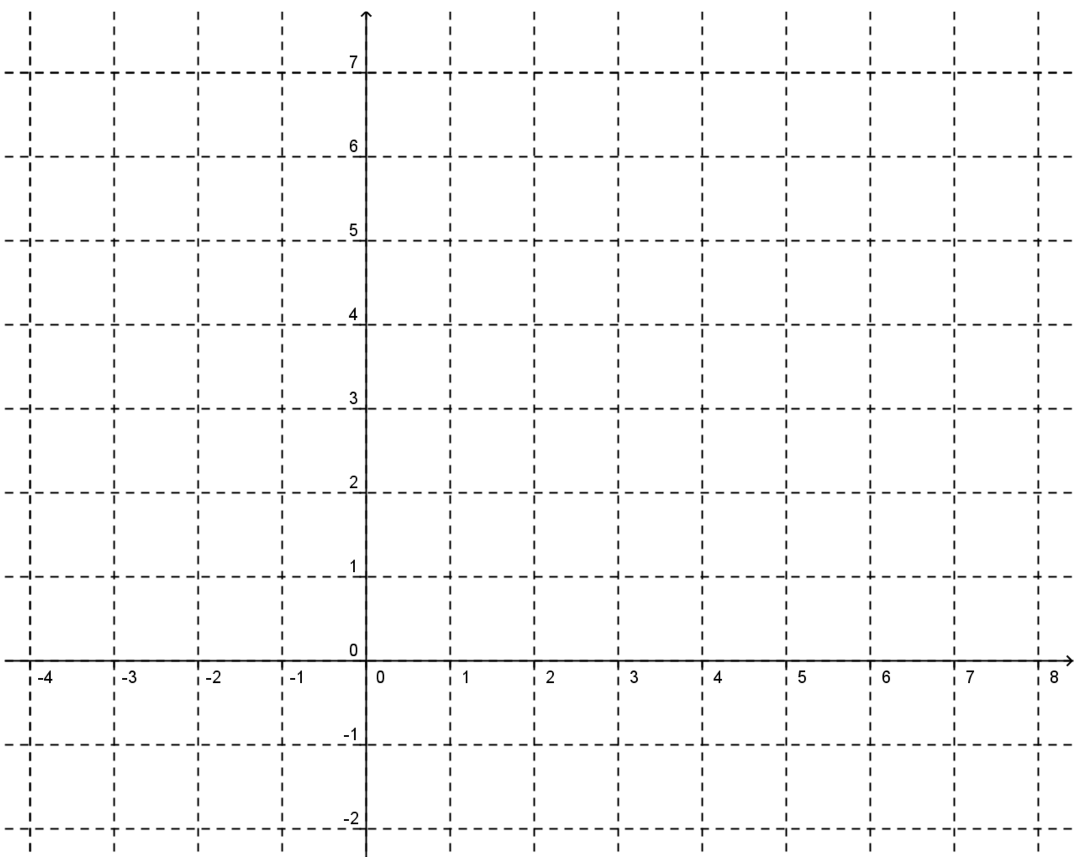
Exemple. Soient les fonctions

$$f(x) = 2^x \text{ et } g(x) = \log_2(x).$$

Remplissons ces tableaux de valeurs et traçons les fonctions.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

x	-1	0	$0,25$	$0,5$	1	2	4	8
$g(x)$								



Traçons maintenant la droite d'équation $y = x$.

Comme la fonction $g(x) = \log_2(x)$ est l'inverse de la fonction $f(x) = 2^x$, on remarque qu'elles sont parfaitement symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exercice 7.7. Calculer les logarithmes suivants.

a) $\log_{10}(1000)$ b) $\log_{10}(10^7)$

c) $\log_2(64)$ d) $\log_2(8)$

e) $\log_5(1)$ f) $\log_9\left(\dfrac{1}{81}\right)$

g) $\log_3(3)$ h) $\log_3(27)$

Exercice 7.8. Trouver, si elle existe, la valeur de x qui vérifie les égalités suivantes.

a) $\log_2(x) = 4$	b) $\log_3(x) = 5$
c) $\log_4(x) = 3$	d) $\log_x(256) = 4$
e) $\log_x(125) = 3$	f) $\log_x(1000) = 3$

7.5 Equations logarithmiques

Nous allons traiter deux cas de figure.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl|l} \log_6(4x-5) & = & \log_6(2x+1) & \\ 4x-5 & = & 2x+1 & -2x+5 \\ 2x & = & 6 & :2 \\ x & = & 3. & \end{array}$$

Il convient de vérifier qu'en remplaçant x par 3 dans l'équation de départ, on ne soit pas amené à calculer le logarithme de 0 ou d'un nombre négatif. Ici, on obtient bien le logarithme de 7 des deux côtés de l'équation de départ.

Ainsi, $x = 3$ est bien solution.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl|l} \log_4(5+x) & = & 3 & \text{Ecriture exponentielle} \\ 5+x & = & 4^3 & \\ 5+x & = & 64 & -5 \\ x & = & 59. & \end{array}$$

Après vérification, $x = 59$ est bien solution de l'équation.

Exercice 7.9. Résoudre.

a) $\log_4(x) = \log_4(8-x)$	b) $\log_3(x-4) = 2$
c) $\log_4(x+4) = \log_4(1-x)$	d) $\log_9(x) = \dfrac{3}{2}$
e) $\log_5(x-2) = \log_5(3x+7)$	f) $\log_2(x-5) = 4$

7.6 Propriétés des logarithmes

Théorème. *Pour toute base a, on a*

1. $\log_a(1) = 0$.
2. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
3. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
4. $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$

Preuve. Nous ne prouverons que la quatrième propriété.

Posons $m = \log_a(x)$.

Sous forme exponentielle, on a

$$\begin{array}{rcl|l} x & = & a^m & (...)^n \\ x^n & = & (a^m)^n & \\ x^n & = & a^{mn}. & \end{array}$$

Si on retourne sous écriture logarithmique, nous obtenons

$$\log_a(x^n) = mn.$$

Comme $m = \log_a(x)$, on a bien

$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x).$$

□

Exercice 7.10. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $17^x = 4913$ b) $10^x = 350$

c) $100 \cdot 9^x = 6561$ d) $3 \cdot 5^x - 250 = 1625$

7.7 Changement de base

Calculer $\log_3(9)$ ne nécessite pas de calculatrice, on peut trouver facilement le résultat. Or, cela se complique si l'on cherche un logarithme moins évident comme $\log_5(8)$. Bien que la calculatrice possède une touche LOG, celle-ci est définie en base 10. Pour réussir à calculer une approximation de $\log_5(8)$, nous devons effectuer un changement de base.

Théorème (Formule du changement de base).

$$\boxed{\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)}}$$

où b et x sont des nombres strictement positifs ; b différent de 1.

Preuve. Posons $m = \log_b(x)$.

Sous forme exponentielle, cette dernière relation s'écrit

$$b^m = x.$$

Si l'on applique le logarithme en base 10 des deux côtés de l'égalité, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl|l} \log(b^m) & = & \log(x) & \text{Propriété 4} \\ m \cdot \log(b) & = & \log(x) & : \log(b) \\ m & = & \dfrac{\log(x)}{\log(b)}. & \end{array}$$

□

Exercice 7.11. Calculer les logarithmes ci-dessous.

a) $\log_7(200)$ b) $\log_{5,1}(34,7)$

c) $\log_{25}(125)$ d) $\log_{49}(2401)$

7.8 Application du logarithme

Le logarithme est très utile lorsqu'on souhaite résoudre une équation où l'inconnue se trouve en exposant.

Exemple. Reprenons l'exemple précédent.

Après combien d'années est-ce que 1000 francs placés sur un compte à 2% atteindront la somme de 1'268,24 francs ?

$$\begin{array}{rcl|l} 1'268,24 & = & 1000\cdot(1+0,02)^n & :1000 \\ 1,26824 & = & 1,02^n & \text{On passe sous forme logarithmique} \\ \log_{1,02}(1,26824) & = & n & \text{Formule du changement de base} \\ n & = & \dfrac{\log(1,26824)}{\log(1,02)} & \\ n & = & 12 \text{ ans.} & \end{array}$$

Il est également possible de résoudre cette équation comme suit :

$$\begin{array}{rcl|l} 1'268,24 & = & 1000\cdot(1+0,02)^n & :1000 \\ 1,26824 & = & 1,02^n & \text{On passe sous forme logarithmique} \\ \log(1,26824) & = & \log(1,02^n) & \text{Propriété 4} \\ \log(1,26824) & = & n\cdot\log(1,02) & :\log(1,02) \\ n & = & \dfrac{\log(1,26824)}{\log(1,02)} & \\ n & = & 12 \text{ ans.} & \end{array}$$

Exercice 7.12. Un capital de 2'500 francs est placé à la banque en 2014. Sachant que le taux d'intérêt est de $2,25\%$, en quelle année le capital dépassera-t-il 7'500 francs ?

Exercice 7.13. Un capital C_0 est placé à la banque à un taux d'intérêt de 5%.

a) Quelle sera sa valeur après t années ?

b) Après combien d'années aura-t-il doublé ? Triplé ?

Exercice 7.14. 1 franc est placé à la banque en 1900 au taux annuel de 4%.

a) Quel capital y aura-t-il un siècle plus tard, c'est-à-dire en l'an 2000 ?

b) Après combien d'années le capital aura atteint 1000 francs ?

Exercice 7.15. Combien d'années doit-on placer un capital de 3000 francs au taux de 5% pour obtenir une somme de 5000 francs ?

Exercice 7.16. L'île de Manhattan a été vendue 24 francs en 1626. A combien se monterait cette somme en 1996 si elle avait été investie à 6% par an ?

Exercice 7.17. On place 40'000 francs sur un compte le 1er janvier 2003 à un taux d'intérêt annuel de 5%. En janvier 2009, on retire de ce capital une certaine somme pour financer un projet. Puis on retire l'entier du compte en janvier 2013, compte qui s'élève à 34'768,15 francs. Quel était le montant du retrait de 2009 ?

Exercice 7.18. Après combien d'années, un capital de 125'000 francs placé au taux de 4% dépasse celui de 250'000 francs placé au taux de 2% ?

Exercice 7.19. Entre 1990 et 2000, la population de la ville A a passé de 3000 à 5000 habitants. Durant la même période, celle de la ville B a passé de 6000 à 4000 habitants. On se fonde sur l'hypothèse que l'évolution démographique de ces deux villes est exponentielle.

a) Déterminer, en %, les taux de variation annuels de ces deux populations.

b) En quelle année, la population de la ville A a-t-elle dépassé celle de la ville B ?

Exercice 7.20. Comme le montre le tableau ci-dessous, pour le même assuré-modèle, les primes de l'assurance-maladie auprès des deux caisses Assurmed et Visante ont évolué de manière exponentielle entre 2000 et 2011.

	2000	2011
Assurmed	172,00	264,80
Visante	131,00	236,05

Les primes mensuelles sont exprimées en francs.

a) Quels ont été, sur cette période, les taux de croissance annuels respectifs des primes de cet assurémodèle auprès des deux caisses ?

b) Quels étaient les montants respectifs des primes en 2008 ?

c) A partir de quelle année la caisse Assurmed sera-t-elle la plus avantageuse ?

Exercice 7.21 (La mémoire humaine). Des étudiants en mathématiques ont passé un test sur un sujet et le refont chaque mois avec un test similaire. Le score moyen $f(t)$ pour la classe est donné par le modèle suivant :

$$f(t) = 80 - 17\log_{10}(t+1), 0 \leq t \leq 12$$

où t est le temps en mois.

a) Quel était le score moyen pour le tout premier test ?

b) Quel est le score moyen après 6 mois ?

c) Déterminer le nombre de mois passés si le score moyen est de $61,5$

Exercice 7.22 (Croissance de la population des USA). La population $N(t)$ (en millions) des USA t années après 1980 peut être représenté par la formule :

$$N(t) = 227 \cdot 10^{0,0009t}.$$

En quelle année est-ce que la population vaudra le double de celle de 1980 ?

Exercice 7.23. Un médicament est éliminé du corps par l'urine. On sait que, pour une dose de 10 milligrammes, la quantié A restante dans le corps n heures après la prise est donnée par la relation

$$A = 10 \cdot 0,8^n.$$

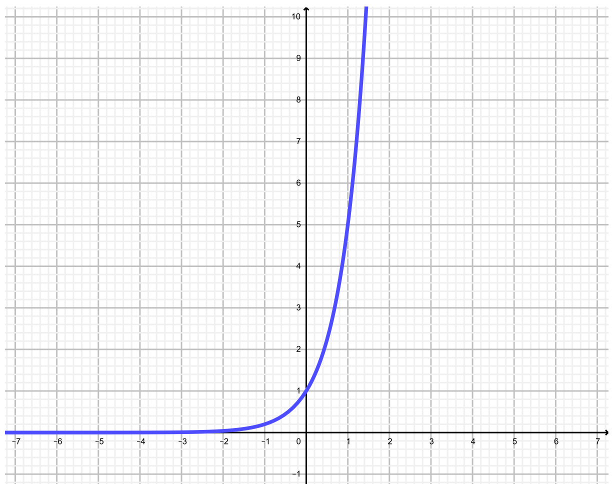
a) Quelle est la quantité restante de ce médicament après trois heures ?

b) Après combien de temps reste-il 2 mg de ce médicament dans le corps ?

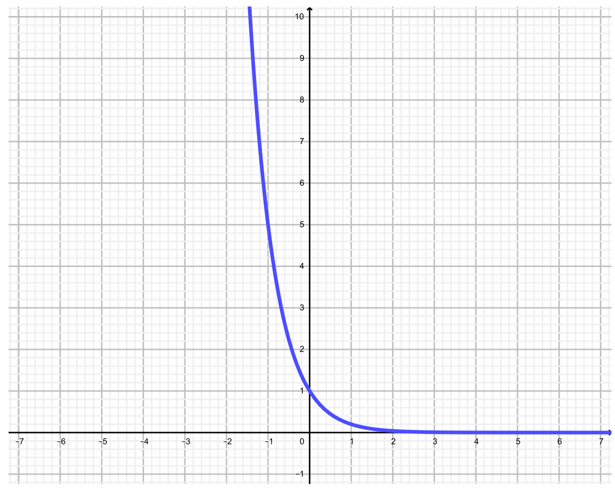
7.9 Solutions

Exercice 7.1.

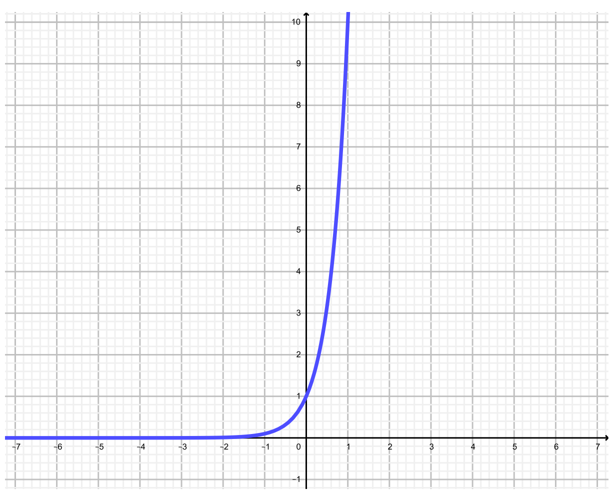
a)



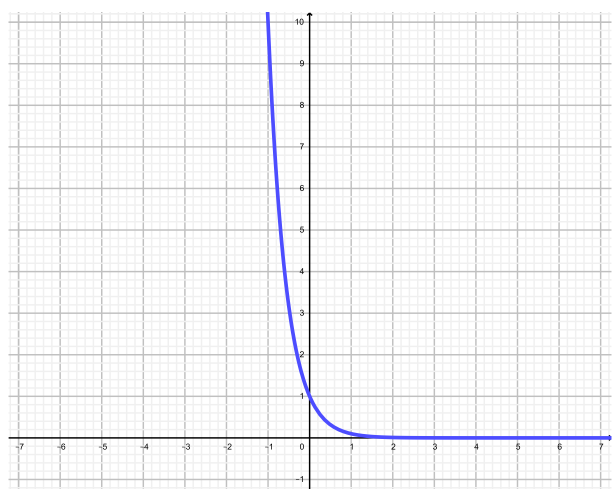
b)



c)



d)



f est croissante si $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$.

Exercice 7.2.

a) $x = 3$	b) $x = 5$
c) $x = 4$	d) $x = 5$
e) $x = 2$	f) $x = 3$, $x = -1$
g) $x = 2$, $x = -\dfrac{1}{2}$	h) $x = -\dfrac{4}{99}$
i) $x = 7$	j) $x = \dfrac{18}{5}$
k) $x = 3$	l) $x = -2$

Exercice 7.3.

a) $\sim 1340,10$ francs.

b) $\sim 822,70$ francs.

c) $6,5\%$.

Exercice 7.4.

a) $M(t) = 1000 \cdot 1,14^t$.

b) Environ 1482 malades.

c) Environ 769 malades.

Exercice 7.5. $E(5) \cong 231, E(8) \cong 180, E(12) \cong 129$.

Exercice 7.6.

a) $\sim 3,64\%$.

b) $\sim 60'650,54$ m^3.

c) $\sim 93'123,29$ m^3.

Exercice 7.7.

a) 3	b) 7
c) 6	d) 3
e) 0	f) -2
g) 1	h) 3

Exercice 7.8.

a) 16	b) 243
c) 64	d) 4
e) 5	f) 10

Exercice 7.9.

a) $x = 4$	b) $x = 13$
c) $x = -\dfrac{3}{2}$	d) $x = 27$
e) Pas de solution	f) $x = 21$

Exercice 7.10.

a) $x = 3$	b) $x \cong 2,544$
c) $x \cong 1,904$	d) $x = 4$

Exercice 7.11.

a) $\sim 2,723$	b) $\sim 2,177$
c) $\dfrac{3}{2}$	d) 2

Exercice 7.12. Le capital dépassera 7'500 francs en 2064.

Exercice 7.13.

a) $C(n) = C_0 \cdot 1,05^n$.

b) Il aura doublé après 15 ans et triplé après 23 ans.

Exercice 7.14.

a) 50,50 francs.

b) Après 177 ans.

Exercice 7.15. 11 ans.

Exercice 7.16. $5,54 \cdot 10^{10}$ francs.

Exercice 7.17. 25'000 francs.

Exercice 7.18. 36 ans.

Exercice 7.19.

a) La ville A connaît un taux de croissance de $5,2\%$ et la ville B un taux de décroissance de 4%.

b) En 1998.

Exercice 7.20.

a) 4% pour Assurmed et $5,5\%$ pour Visante.

b) $235,4$ francs pour Assurmed et $201,05$ francs pour Visante.

c) à partir de 2020.

Exercice 7.21.

a) 80 points.

b) 65,63 points.

c) 11,25 points.

Exercice 7.22. En 2315.

Exercice 7.23.

a) $5,12$ mg.

b) Après 8 heures.

7.10 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

7.1 ☐ Représenter le graphe d'une fonction exponentielle.
7.2 ☐ Résoudre une équation exponentielle simple.
7.3 ☐ Calculer des logarithmes simples
7.4 ☐ Représenter le graphe d'une fonction logarithme.
7.5 ☐ Résoudre une équation logarithmique simple.
7.6 ☐ Résoudre une équation dans laquelle l'inconnue est un exposant.
7.7 ☐ Calculer un logarithme à l'aide de la formule du changement de base.
7.8 ☐ Résoudre un problème faisant intervenir la formule des intérêts composée.

Chapitre 8

Inéquations

8.1 Introduction

Définition. Une *inéquation* est une inégalité ($<$, $\leq$, $>$ ou $\geq$) entre deux expressions algébriques.

Exemple. Un étudiant a obtenu les notes de 3, 4 et $3,5$ à ses trois premiers travaux écrits. Quelle note devrait-il obtenir au minimum au quatrième (et dernier) travail écrit pour que sa moyenne soit suffisante ?

Résolution. Soit x la dernière note du travail écrit.
La moyenne finale est donnée par

$$\frac{3+4+3,5+x}{4} = \frac{10,5+x}{4}.$$

Pour que l'étudiant obtienne une moyenne finale suffisante, il faut qu'elle soit supérieure ou égale à $3,75$.
Cette condition se traduit par *l'inéquation du premier degré à une inconnue*

$$\frac{10,5+x}{4} \geq 3,75.$$

Une *solution* de cette inéquation est un nombre x pour lesquel l'inéquation est verifiée. Ainsi, $x = 6$ est solution de cette inéquation, car

$$\frac{10,5+6}{4} = \frac{16,5}{4} = 4,125 \geq 3,75.$$

Il en est de même pour $x = 5,5$, car

$$\frac{10,5+5,5}{4} = \frac{16}{4} = 4 \geq 3,75.$$

En revanche, $x = 1$ n'est pas solution de cette inéquation, car

$$\frac{10,5+1}{4} = \frac{11,5}{4} = 2,875 < 3,75.$$

Résoudre une inéquation consiste à trouver tous les nombres qui vérifient l'inégalité :

$$\begin{array}{rcl|l} \dfrac{10,5+x}{4} & \geq & 3,75 & \cdot 4 \\ 10,5+x & \geq & 15 & -10,5 \\ x & \geq & 4,5. & \end{array}$$

Ainsi, cet étudiant devra obtenir au moins 4,5 afin de terminer son semestre avec une moyenne suffisante. L'ensemble S_i des solutions de l'inéquation s'écrit également

$$S_i = [4,5; +\infty[.$$

Remarque. $[4,5;+\infty[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation. Etant donné que la note maximale que l'on puisse obtenir est 6, il convient de rejetter toutes les solutions strictement supérieures à 6. Ainsi, l'ensemble S_p des solutions du problème (mais pas de l'inéquation !) est donné par

$$S_p = [4,5; 6].$$

8.2 Inéquations du premier degré à une inconnue

Une inéquation est comme une équation dans laquelle on remplace le signe "=" par un signe *d'inégalité*. Il en existe 4 :

— $>$: *plus grand que*
— $<$: *plus petit que*
— $\geq$: *plus grand ou égal à*
— $\leq$: *plus petit ou égal à*

Résoudre une inéquation est similaire à résoudre une équation. A une exception.

$$\boxed{\text{Lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif, le signe d'inégalité change.}}$$

En effet,

$$\begin{array}{rcl|l} 3 & \geq & 2 & \cdot(-2) \\ -6 & \leq & -4. & \end{array}$$

Exemple.

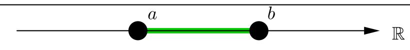
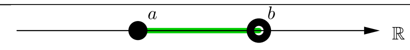
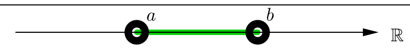
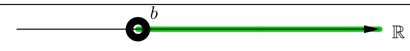
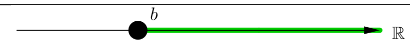
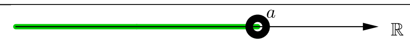
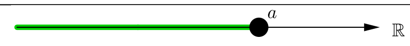
1.
$$\begin{array}{rcl|l} 5(x-2)-4(2x-3) & \geq & 40 & \\ 5x-10-8x+12 & \geq & 40 & \\ -3x+2 & \geq & 40 & -2 \\ -3x & \geq & 38 & :(-3) \\ x & \leq & -\dfrac{38}{3}. & \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcccl|l} -6 & < & 2x-3 & \leq & 5 & +3 \\ -3 & < & 2x & \leq & 8 & :2 \\ -\dfrac{3}{2} & < & x & \leq & 4. & \end{array}$$

8.3 Intervalles

Les *intervalles* sont des notations simples pour décrire certains sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On les utilise notamment pour donner les ensembles des solutions d'une inéquation.

Dans le tableau ci-dessous, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, chacune des lignes décrit le même sous ensemble de $\mathbb{R}$ de trois manières équivalentes.

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$	
$a \leq x < b$	$[a;b[$	
$a < x \leq b$	$]a;b]$	
$a < x < b$	$]a;b[$	
$x > b$	$]b;+\infty[$	
$x \geq b$	$[b;+\infty[$	
$x < a$	$]-\infty;a[$	
$x \leq a$	$]-\infty;a]$	

Exercice 8.1. Ecrire les ensembles suivants sous forme d'intervalle.

a) L'ensemble des nombres plus grands ou égaux à -3 et plus petits ou égaux à 5.
b) L'ensemble des nombres plus grands ou égaux à 4 et plus strictement petits que 5.
c) L'ensemble des nombres strictement plus petits que 1.
d) L'ensemble des nombres plus grands ou égaux à 10.
e) L'ensemble des nombres strictement plus grands que -2 et plus strictement plus petits que 2.
f) L'ensemble des nombres réels strictement positifs.
g) L'ensemble des nombres réels inférieurs ou égaux à 0.
h) L'ensemble des nombres réels.

Exercice 8.2. Vrai ou faux ? Justifier !

a) -4 est solution de l'inéquation $-3x > 7$.
b) 8 est solution de l'inéquation $5x - 3 \leq 37$.
c) 2 est solution de l'inéquation $3x - 2 < -4x + 12$.
d) 5 est solution de l'inéquation $5x - 3 \geq 5x + 2$.

Exercice 8.3. Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

a) $x - 7 > -3x + 1$ b) $3 - 2x > 3x - 5$

c) $\dfrac{3-4x}{2} < \dfrac{x-3}{4}$ d) $\dfrac{2x-3}{3} - \dfrac{x+4}{5} \leq \dfrac{x+2}{4}$

e) $5(1+4x) > 7 + 12x$ f) $-2x + \dfrac{x}{2} + 1 \leq -\dfrac{x}{4}$

g) $7(x-3) > 7x + 5$ h) $4x - 2 < 4(x+10)$

Exercice 8.4. Résoudre les inéquations doubles ci-dessous et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

a) $-3 < 2x - 5 < 7$ b) $3 \leq \dfrac{2-3x}{5} \leq 7$

c) $0 \leq 4 - \dfrac{1}{3}x \leq 2$ d) $-2 < 3 + \dfrac{1}{4}x \leq 5$

Exercice 8.5. Résoudre les systèmes d'inéquations suivants et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

a) $\begin{cases} 5x - 10 < 4x \\ 5 + 2x \geq 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1 - x \geq x - 5 \\ x(2-x) < 4 - x^2 \end{cases}$

8.4 Inéquations linéaires à deux inconnues

Il s'agit d'inéquations de la forme $ax + by > c$, $ax + by < c$, $ax + by \geq c$ ou $ax + by \leq c$. Il est plus délicat d'exprimer les solutions à l'aide d'intervalles car les valeurs que peut prendre x dépendent directement de y (et vice-versa). Afin d'illustrer au mieux l'ensemble des solutions d'une telle inéquation, on colore l'ensemble des points du plan satisfaisant l'inéquation linéaire.

Exemple. Soit l'inéquation

$$3x + 2y < 6.$$

La première chose à faire est d'isoler la variable y afin de pouvoir plus facilement tracer la frontière de la zone colorée.

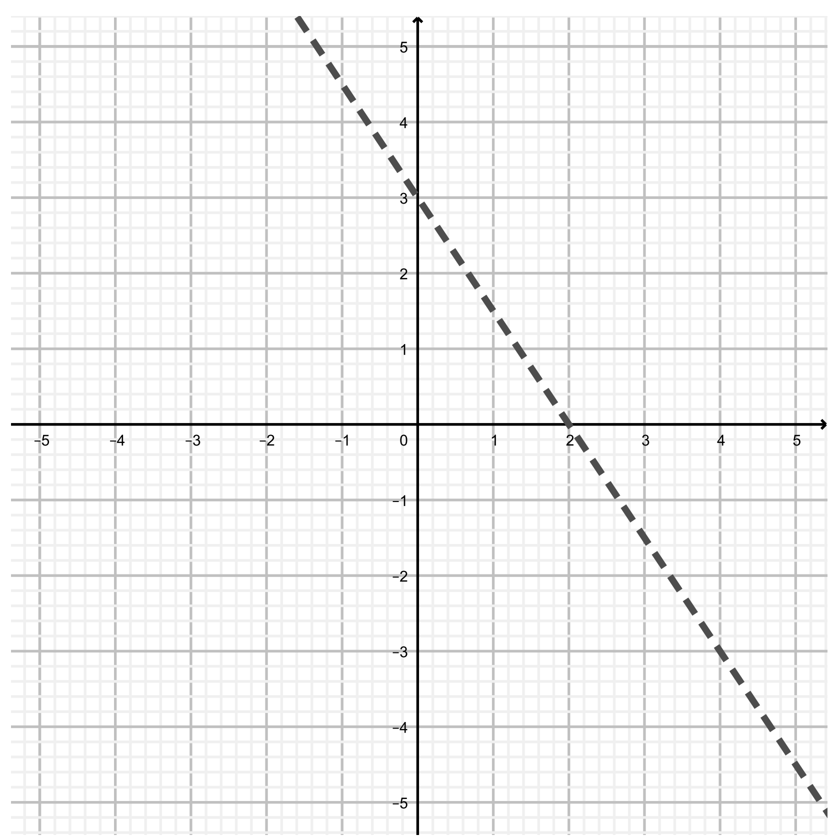
$$\begin{array}{rcl|l} 3x + 2y & < & 6 & -3x \\ 2y & < & 6 - 3x & :2 \\ y & < & -\dfrac{3}{2}x + 3. & \end{array}$$

Reprenons cette inégalité et dessinons la droite que l'on obtient s'il y avait un "=".

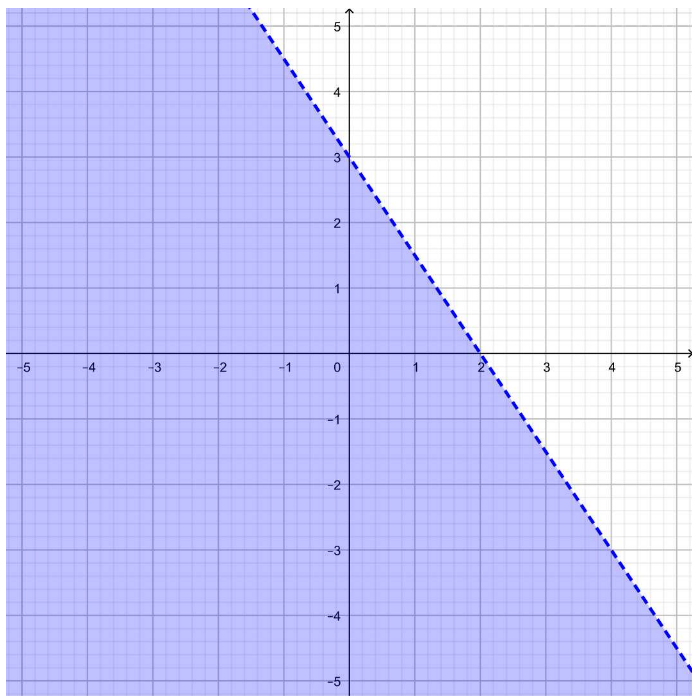
Convention.

— Si le signe d'inégalité est "strictement plus petit" ou "strictement plus grand", c'est-à-dire $>$ ou $<$, alors la droite sera en traitillé.

— Si le signe d'inégalité est "plus petit ou égal à" ou "plus grand ou égal à", c'est-à-dire $\geq$ ou $\leq$, alors on trace la droite en trait plein.



Cette droite est appelée *frontière*. En effet, elle définit la limite entre la zone contenant les solutions et le reste. Comment savoir quelle est la bonne zone ? Il suffit de reprendre l'inéquation $y < -\frac{3}{2}x + 3$. On observe que y doit être plus petit que $-\frac{3}{2}x + 3$. Comme la valeur de y doit être inférieure au reste, alors on colore la zone en dessous de la droite (on aurait coloré en dessus si le signe était $>$ ou $\geq$).



Tous les points que l'on peut trouver dans la zone colorée satisfont donc l'inéquation

$$3x + 2y < 6.$$

La droite en traitillé permet d'illustrer le fait que les points se trouvant sur la droite ne sont pas inclus dans les solutions. Or, si le trait était plein, les points de la droite seraient inclus.

Exercice 8.6. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

a) $x + 3y \geq 15$ b) $2x + 5y < 20$

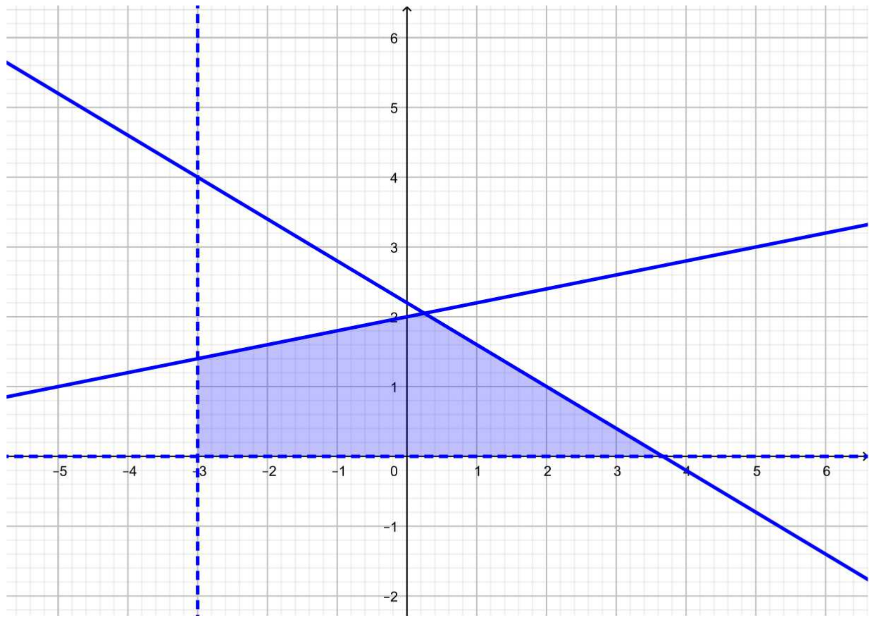
c) $3x + 7y > 63$ d) $6x + 5y \leq 120$

Exercice 8.7. Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivantes.

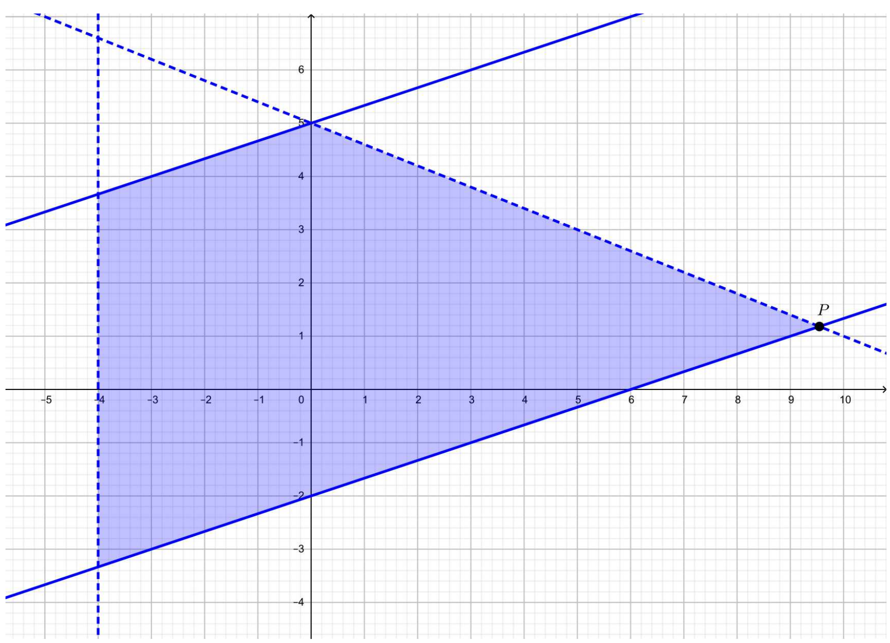
a) $\begin{cases} 12x + 5y \leq 60 \\ 4x + 3y \leq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 7y > 35 \\ 2x + y > 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 9y < 90 \\ 4x + y < 48 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 5y \geq 30 \\ x + y \geq 10 \\ 3x + 2y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Exercice 8.8. Déterminer un système d'inéquations ayant pour solution la zone hachurée ci-dessous.



Exercice 8.9. Déterminer un système d'inéquations ayant pour solution la zone grisée ci-dessous.



Calculer les coordonnées exactes du point P (à deux décimales près) et déterminer si le point P appartient à l'ensemble des solutions (justifier la réponse).

8.5 Solutions

Exercice 8.1.

a) $[-3;5]$ b) $[4;5[$
c) $]-\infty;1[$ d) $[10;+\infty[$
e) $]-2;2[$ f) $]0;+\infty[$
g) $]-\infty;0]$ h) $]-\infty;+\infty[$

Exercice 8.2.

a) Vrai b) Vrai
c) Faux d) Faux

Exercice 8.3.

a) $x\in]2;+\infty[$ b) $x\in\left]-\infty;\dfrac{8}{5}\right[$

c) $x\in]1;\infty[$ d) $x\in\left]-\infty;\dfrac{138}{13}\right]$

e) $x\in\left]\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ f) $x\in\left[\dfrac{4}{5};+\infty\right[$

g) Pas de solution h) $x\in\mathbb{R}$

Exercice 8.4.

a) $x\in\,]1;6[$ b) $x\in\left[-11;-\dfrac{13}{3}\right]$

c) $x\in[6;12]$ d) $x\in]-20;8]$

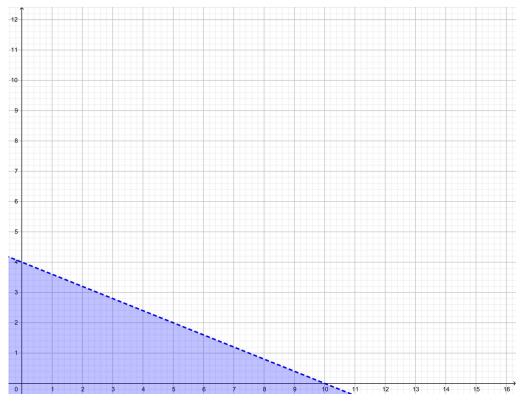
Exercice 8.5.

a) $x\in[1;10[$
b) $x\in\,]-\infty;2[$

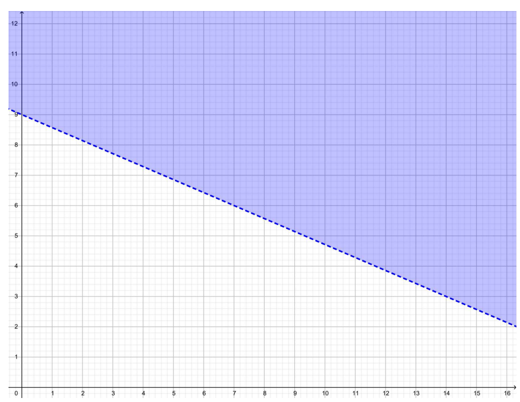
Exercice 8.6.

a)

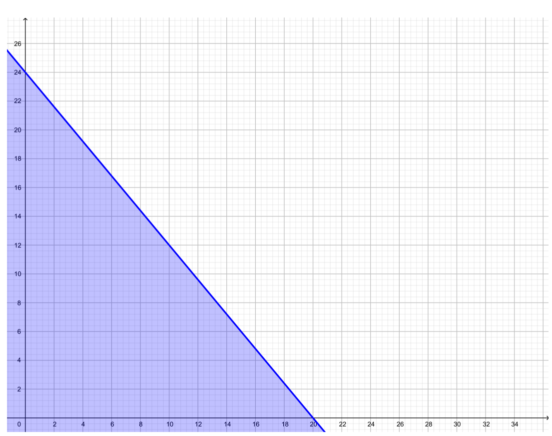
b)



c)

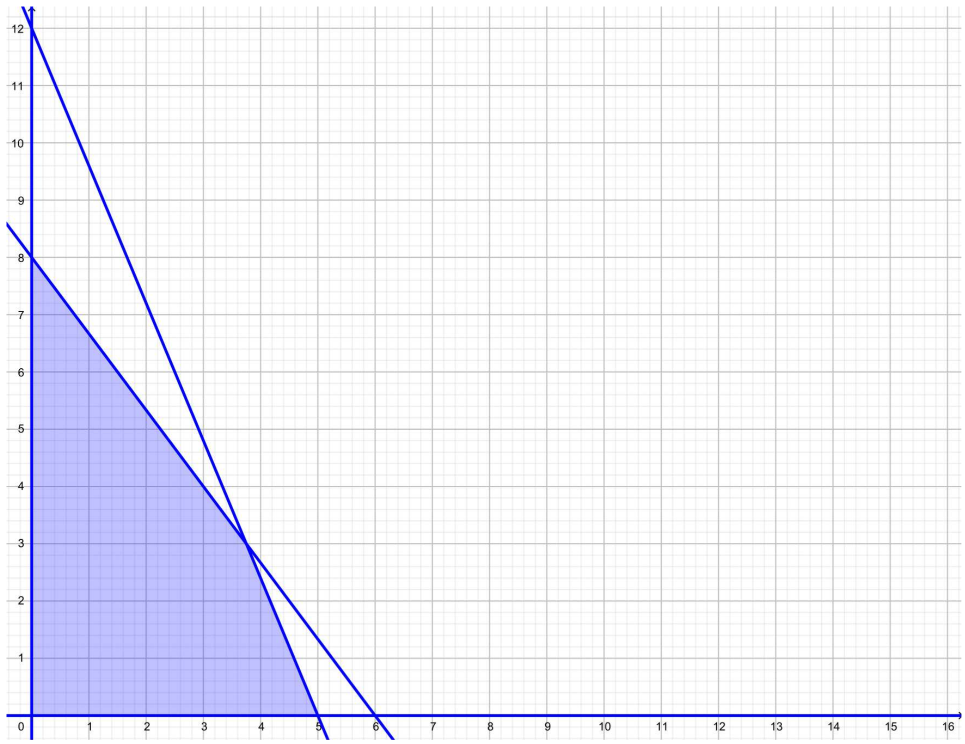


d)



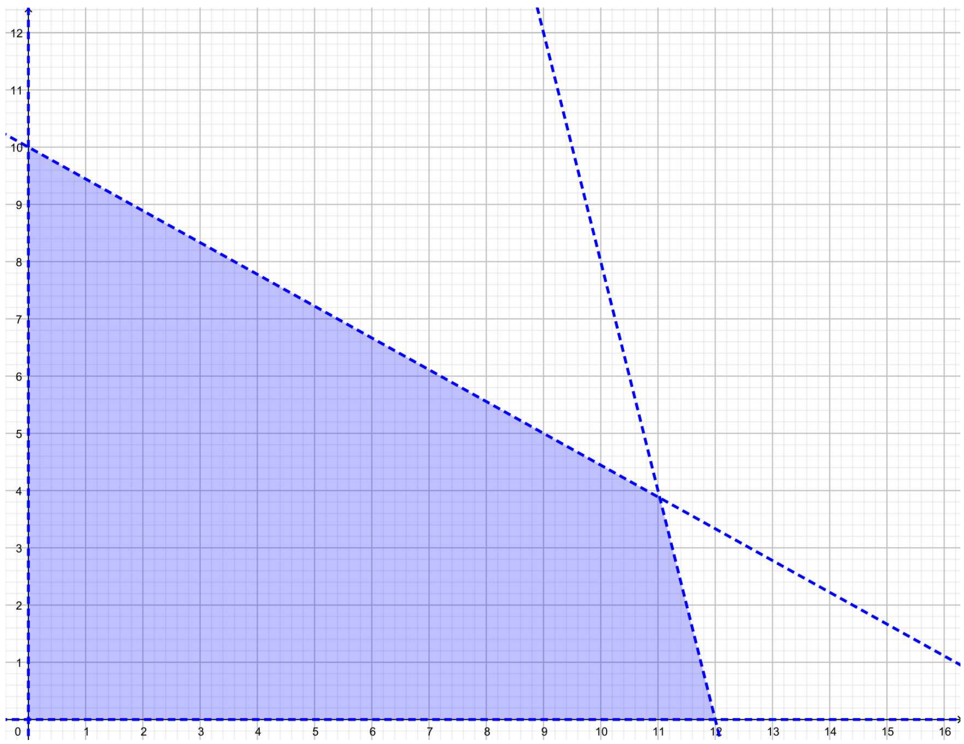
Exercice 8.7.

a)

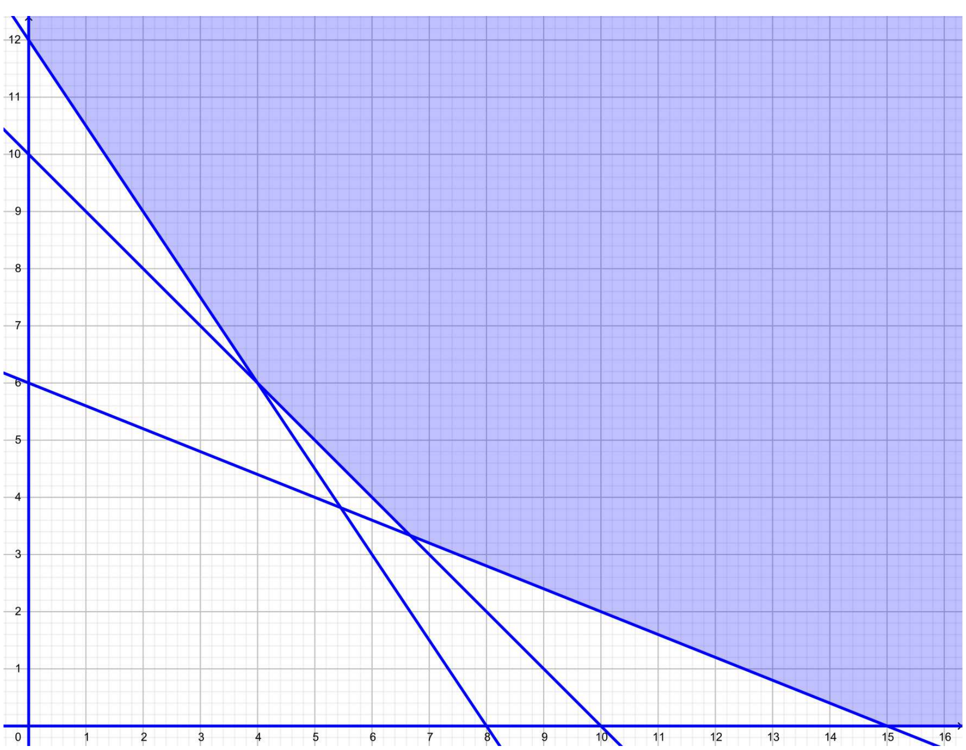


b)

c)



d)



Exercice 8.8.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & > & -3 \\ y & \leq & -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{11}{5} \\ y & \leq & \dfrac{1}{5}x + 2 \\ y & > & 0 \end{array}\right. .$$

Exercice 8.9.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & > & -4 \\ y & \leq & \dfrac{1}{3}x + 5 \\ y & < & -\dfrac{2}{5}x + 5 \\ y & \geq & \dfrac{1}{3}x - 2 \end{array}\right. .$$

$P(9,\overline{54};1,\overline{18})$ n'appartient pas à l'ensemble de solutions, car il se trouve sur une droite pointillée.

8.6 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

8.1 ☐ Résoudre une inéquation simple du premier degré en donnant l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

8.2 ☐ Résoudre graphiquement une inéquation à deux inconnues.

8.3 ☐ Résoudre graphiquement un système de plusieurs inéquations à deux inconnues.

8.4 ☐ Retrouver le système d'inéquations à partir du polygone des solutions.

Chapitre 9

Programmation linéaire

9.1 Introduction

Au cours de la Seconde Guerre mondiale, l'armée de l'air des États-Unis d'Amérique eut de nombreux problèmes concernant l'allocation de ses ressources, tant humaines que matérielles. Naturellement, plusieurs spécialistes se penchèrent sur la question et parmi eux, George Dantzig. Peu après la guerre, en 1946, ce dernier formula de manière plus générale ce genre de problèmes et proposa une méthode de résolution, la *méthode du simplexe*.

Ce problème général peut se formuler ainsi : trouver la *valeur maximale* (ou *minimale*) d'une fonction à plusieurs variables si ces variables sont soumises à des *contraintes*. Par exemple, supposons qu'une compagnie fabrique divers produits et que pour chacun de ces produits il y a des coûts de fabrication différents en main-d'oeuvre et en matières premières. La compagnie connaît le bénéfice qu'elle réalise en vendant chacun de ces produits. La compagnie doit alors se poser la question suivante : quelle quantité de chacun des produits doit-on fabriquer pour obtenir un bénéfice global maximal ? En général, de tels problèmes peuvent être assez complexes. Cependant, dans le cas où la fonction à optimiser, c'est-à-dire à rendre minimum ou maximum, est linéaire et où les contraintes peuvent s'exprimer par des inéquations, on peut développer une théorie assez simple pour résoudre ce genre de problèmes, la *programmation linéaire*. Nous nous limiterons à des problèmes comportant seulement deux variables. Ceci nous permettra d'illustrer la solution par une représentation graphique simple.

9.2 Optimisation linéaire à deux variables

Exemple. Une entreprise fabrique deux types de boîtes en métal. La fabrication d'une boîte de type A demande 1 heure de travail et 3 kg de métal alors que le type B demande 2 heures de travail et 2 kg de métal. L'entreprise dispose de 80 heures de temps de travail et 120 kg de métal. Sachant que, pour une boîte, le profit est de 50 francs pour le type A et de 20 francs pour le type B, comment organiser la production afin de maximiser le profit ?

Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Travail	Métal	Profit
Type A	1 h	3 kg	50 frs
Type B	2 h	2 kg	20 frs
Total	$\leq$ 80 h	$\leq$ 120 kg	P

Si x désigne le nombre de boîtes de type A et y le nombre de boîtes du type B, le problème revient à trouver la valeur maximale de l'expression

$$P = 50x + 20y$$

avec les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & \leq & 80 \\ 3x + 2y & \leq & 120 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Représentons alors les droites $x + 2y = 80$, $3x + 2y = 120$, $x = 0$ et $y = 0$. A cet effet, il convient de calculer deux points par droite.

1. Points de $x + 2y = 80$:

   — Pour le premier point, on pose $x = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl} 0 + 2y & = & 80 \\ 2y & = & 80 \\ y & = & 40. \end{array}$$
   D'où le point $(0; 40)$.

   — Pour le deuxième point, on pose $y = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl} x + 2 \cdot 0 & = & 80 \\ x & = & 80. \end{array}$$
   D'où le point $(80; 0)$.

   Ainsi, la droite $x + 2y = 80$ passe par $(0; 40)$ et $(80; 0)$.

2. Points de $3x + 2y = 120$:

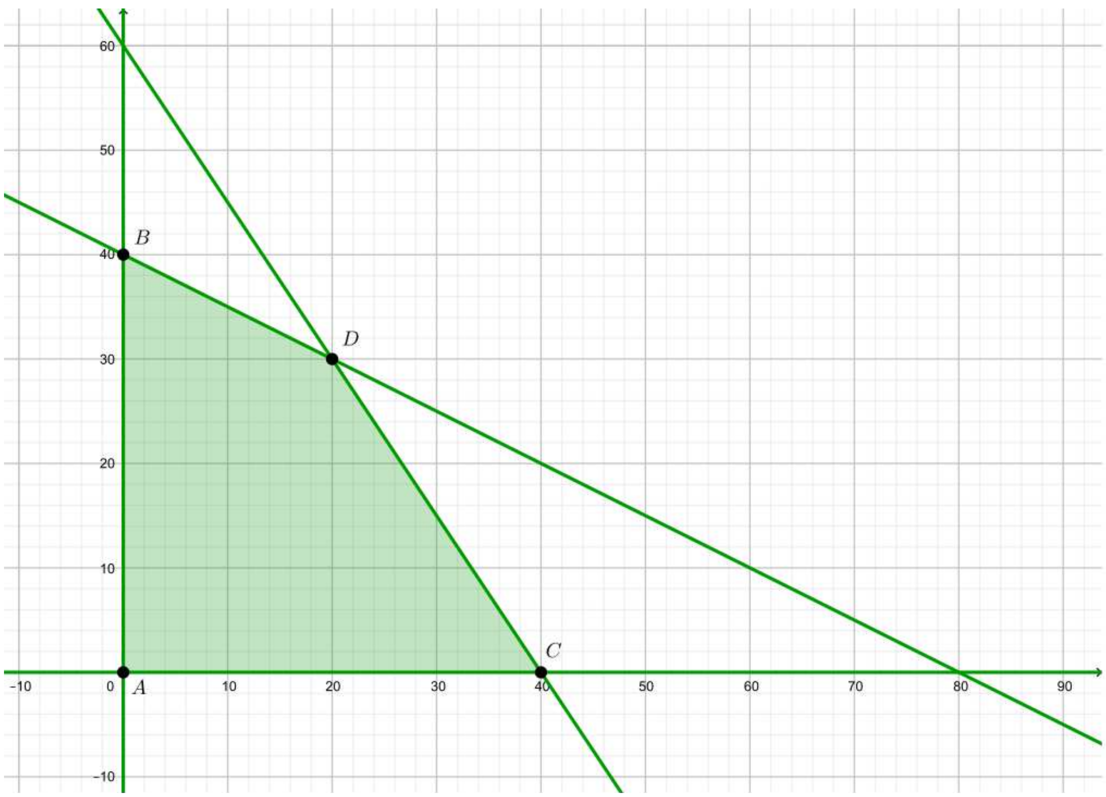
   — Pour le premier point, on pose $x = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl} 3 \cdot 0 + 2y & = & 120 \\ 2y & = & 120 \\ y & = & 60. \end{array}$$
   D'où le point $(0; 60)$.

   — Pour le deuxième point, on pose $y = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl} 3x + 2 \cdot 0 & = & 120 \\ 3x & = & 120 \\ x & = & 40. \end{array}$$
   D'où le point $(40; 0)$.

Ainsi, la droite $3x + 2y = 120$ passe par $(0; 60)$ et $(40; 0)$.

3. Points de $x = 0$ et de $y = 0$:

   La droite $x = 0$, respectivement $y = 0$ est verticale passant par l'origine, respectivement horizontale passant pas l'origine.



Le domaine défini par les contraintes est le quadrilatère coloré ci-dessus.

On observe alors que le maximum cherché est forcément atteint sur un sommet du quadrilatère.

Déterminons alors les coordonnées de ces sommets :

Il est clair que les points $A(0; 0)$, $B(0; 40)$ et $C(40; 0)$ sont des sommets du quadrilatère.

Reste à déterminer les coordonnées du dernier sommet D.

A cet effet, on résout

$$\begin{array}{rrcl} & 3x + 2y & = & 120 \\ - & x + 2y & = & 80 \\ \hline & 2x & = & 40 \\ & x & = & 20. \end{array}$$

Il s'ensuit la valeur de y en résolvant

$$\begin{array}{rcl|l} 20+2y & = & 80 & -20 \\ 2y & = & 60 & :2 \\ y & = & 30. & \end{array}$$

D'où le sommet $D(20;30)$.

Pour trouver le maximum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du quadrilatère. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x;y)$	Valeur de $P = 50x + 20y$
$A(0;0)$	$50 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 0$
$B(0;40)$	$50 \cdot 0 + 20 \cdot 40 = 800$
$C(40;0)$	$50 \cdot 40 + 20 \cdot 0 = 2000$
$D(20;30)$	$50 \cdot 20 + 20 \cdot 30 = 1600$

Ainsi, la valeur maximale $P = 2000$ est atteinte pour $x = 40$ et $y = 0$. Le profit maximal de 2000 francs est donc réalisé avec 40 boîtes de type A et 0 de type B.

Exemple. Une entreprise fabrique et des assiettes et des vases décorés à la main. Le temps de fabrication est de 2 heures par assiette et de 3 heures par vase. Le temps de décoration est d'une demi-heure pour une assiette et de 2 heures pour un vase. La production journalière d'assiettes est limitée à 30 unités. L'atelier de fabrication comporte 12 ouvriers qui travaillent 8 heures par jour. Celui consacré à la décoration est composé de 7 ouvriers travaillant 7 heures par jour.

Sachant que le bénéfice net est de 70 francs par assiette et de 160 francs par vase, déterminer la production assurant le bénéfice maximal.

Il est possible de résumer les informations ci-dessus par le tableau ci-dessous.

	Fabrication	Décoration	Production	Profit
Assiettes	2 h	$0,5$ h	≤ 30	70 frs
Vases	3 h	2 h		160 frs
Total	$\leq 12 \cdot 8 = 96$ h	$\leq 7 \cdot 7 = 49$ h		P

Si x désigne le nombre d'assiettes et y le nombre de vases, le problème consiste à trouver la valeur maximale de l'expression

$$P = 70x + 160y.$$

avec les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & \leq & 96 \\ 0,5x + 2y & \leq & 49 \\ x & \leq & 30 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array} \right. .$$

Représentons alors les droites $2x + 3y = 96$, $0,5x + 2y = 49$, $x = 30$, $x = 0$ et $y = 0$. Calculons donc deux points par droite.

1. Points de $2x + 3y = 96$:

   — Pour le premier point, on pose $x = 0$:
   On a
   $$\left.\begin{array}{rcl} 2 \cdot 0 + 3y & = & 96 \\ 3y & = & 96 \\ y & = & 32. \end{array}\right| : 3$$
   D'où le point $(0; 32)$.

   — Pour le deuxième point, on pose $y = 0$:

   On a
   $$\left.\begin{array}{rcl} 2x + 3 \cdot 0 & = & 96 \\ 2x & = & 96 \\ x & = & 48. \end{array}\right| : 2$$
   D'où le point $(48; 0)$.

   Ainsi, la droite $2x + 3y = 96$ passe par $(0; 32)$ et $(48; 0)$.
2. Points de $0,5x + 2y = 49$:

   — Pour le premier point, on pose $x = 0$:

   On a
   $$\left.\begin{array}{rcl} 0,5 \cdot 0 + 2y & = & 49 \\ 2y & = & 49 \\ y & = & 24,5. \end{array}\right| : 2$$
   D'où le point $(0; 24,5)$.

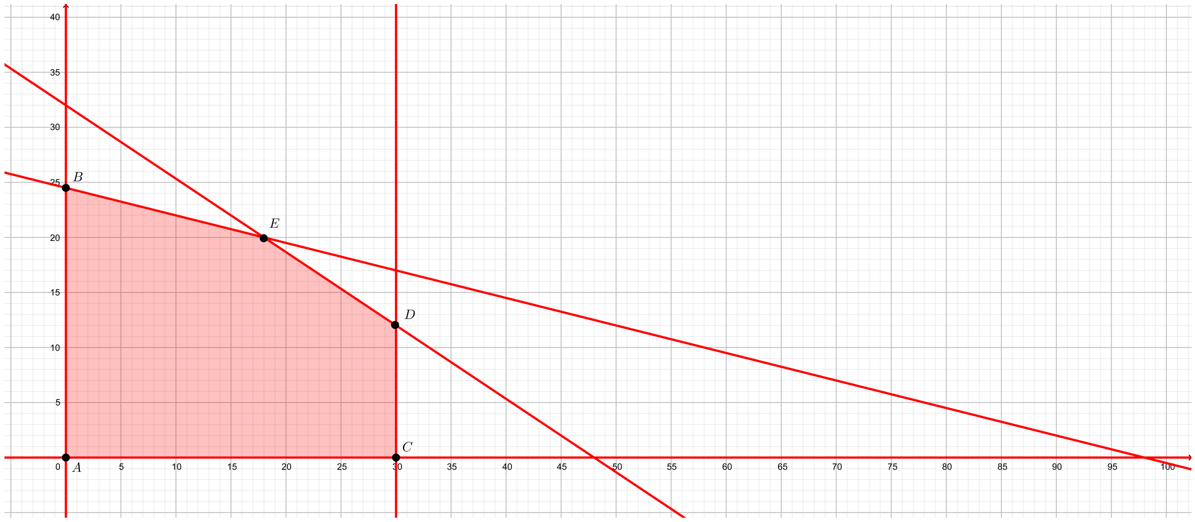
   — Pour le deuxième point, on pose $y = 0$:

   On a
   $$\left.\begin{array}{rcl} 0,5x + 2 \cdot 0 & = & 49 \\ 0,5x & = & 49 \\ x & = & 98. \end{array}\right| \cdot 2$$
   D'où le point $(98; 0)$.

   Ainsi, la droite $0,5x + 2y = 49$ passe par $(0; 24,5)$ et $(98; 0)$.
3. Points de $x = 30$:

   Cette droite passe par le point $(30; 0)$ et est verticale.
4. Points de $x = 0$ et de $y = 0$:

   La droite $x = 0$, respectivement $y = 0$ est verticale passant par l'origine, respectivement horizontale passant par l'origine.



Le domaine défini par les contraintes est représenté ci-dessus.

Comme à l'exemple précédent, le maximum cherché est forcément atteint sur un sommet du quadrilatère.

Déterminons alors les coordonnées de ces sommets :

Il est clair que les points $A(0;0)$, $B(0;24,5)$ et $C(30;0)$ sont des sommets du quadrilatère.

Reste à déterminer les coordonnées des derniers sommets D et E.

Pour déterminer les coordonnées de D, on pose $x = 30$ et on résout

$$\begin{array}{rcl|l} 2\cdot 30 + 3y & = & 96 & \\ 60 + 3y & = & 96 & -60 \\ 3y & = & 36 & :3 \\ y & = & 12. & \end{array}$$

D'où le sommet $D(30;12)$.

Déterminons enfin les coordonnées de E.
On résout donc

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} 2x + 3y & = & 96 & \\ 0,5x + 2y & = & 49 & \cdot 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 96 \\ x + 4y & = & 98 \end{array}\right. .$$

En isolant x de la deuxième équation, on a

$$x = 98 - 4y.$$

On substitue alors dans l'autre équation :

$$\begin{array}{rcl|l} 2(98-4y)+3y & = & 96 & \\ 196-8y+3y & = & 96 & -196 \\ -5y & = & -100 & :(-5) \\ y & = & 20. & \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$x = 98 - 4 \cdot 20 = 98 - 80 = 18.$$

D'où le sommet $E(18;20)$.

Pour trouver le maximum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du quadrilatère. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x;y)$	Valeur de $P = 70x + 160y$
$A(0;0)$	$70 \cdot 0 + 160 \cdot 0 = 0$
$B(0;24,5)$	$70 \cdot 0 + 160 \cdot 24,5 = 3920$
$C(30;0)$	$70 \cdot 30 + 160 \cdot 0 = 2100$
$D(30;12)$	$70 \cdot 30 + 160 \cdot 12 = 4020$
$E(18;20)$	$70 \cdot 18 + 160 \cdot 20 = 4460$

Ainsi, le profit maximal de 4460 francs sera réalisé en produisant 18 assiettes et 20 vases.

Exemple. On désire préparer des rations alimentaires contenant au moins 90 g de protéines, 120 g d'hydrates de carbone et 2400 calories à partir de deux produits A et B. Une dose du produit A coûte 1 franc et contient 15 g de protéines, 20 g d'hydrates de carbone et 300 calories. Une dose du produit B coûte 1 franc et contient 10 g de protéines, 30 g d'hydrates de carbone et 400 calories. Quelle est la composition de la ration alimentaire la plus économique ?

On regroupe les informations ci-dessus dans le tableau suivant.

	Protéines	Hydrates de carbone	Calories	Prix
Produit A	15 g	20 g	300 g	1 fr
Produit B	20 g	30 g	400 g	1 fr
Total	≥ 90	≥ 120	≥ 2400	P

Si x désigne le nombre de doses du produit A et y le nombre de doses du produit B, le problème ci-dessus consiste à trouver la valeur minimale de l'expression

$$P = x + y$$

avec les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 15x + 10y & \geq & 90 \\ 20x + 30y & \geq & 120 \\ 300x + 400y & \geq & 2400 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array} \right. .$$

Représentons alors les droites $15x + 10y = 90$, $20x + 30x = 120$, $300x + 400 = 2400$, $x = 0$ et $y = 0$.

Calculons donc deux points par droite.

1. Points de $15x + 10y = 90$:

   — Pour le premier point, on pose $x = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl|l} 15 \cdot 0 + 10y & = & 90 & \\ 10y & = & 90 & : 10 \\ y & = & 9. & \end{array}$$
   D'où le point $(0; 9)$.

   — Pour le deuxième point, on pose $y = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl|l} 15x + 10 \cdot 0 & = & 90 & \\ 15x & = & 90 & : 15 \\ x & = & 6. & \end{array}$$
   D'où le point $(6; 0)$.

   Ainsi, la droite $15x + 10y = 90$ passe par $(0; 9)$ et $(6; 0)$.

2. Points de $20x + 30y = 120$:

   — Pour le premier point, on pose $x = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl|l} 20 \cdot 0 + 30y & = & 120 & \\ 30y & = & 120 & : 30 \\ y & = & 4. & \end{array}$$
   D'où le point $(0; 4)$.

   — Pour le deuxième point, on pose $y = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl|l} 20x + 30 \cdot 0 & = & 120 & \\ 20x & = & 120 & : 20 \\ x & = & 6. & \end{array}$$
   D'où le point $(6; 0)$.

   Ainsi, la droite $20x + 30y = 120$ passe par $(0; 4)$ et $(6; 0)$.

3. Points de $300x + 400y = 2400$:

   — Pour le premier point, on pose $x = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl|l} 300 \cdot 0 + 400y & = & 2400 & \\ 400y & = & 2400 & : 400 \\ y & = & 6. & \end{array}$$

D'où le point $(0;6)$.

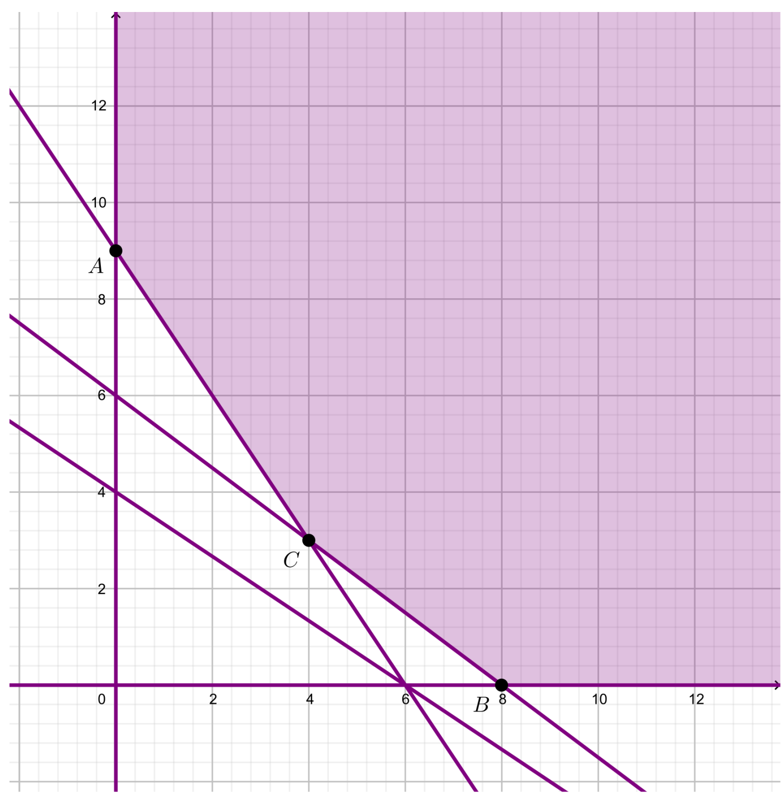
— Pour le deuxième point, on pose $y = 0$:
On a

$$\begin{array}{rcl|l} 300x + 400 \cdot 0 & = & 2400 & \\ 300x & = & 2400 & : 300 \\ x & = & 8. & \end{array}$$

D'où le point $(8;0)$.

Ainsi, la droite $300x + 400y = 2400$ passe par $(0;6)$ et $(8;0)$.

4. Points de $x = 0$ et de $y = 0$:
La droite $x = 0$, respectivement $y = 0$ est verticale passant par l'origine, respectivement horizontale passant par l'origine.



Le domaine défini par les contraintes est représenté ci-dessus. On remarque que la contrainte $20x + 30y \geq 120$ est satisfaite si les autres le sont.

Le minimum cherché est forcément atteint sur un sommet du quadrilatère.

Déterminons alors les coordonnées de ces sommets :

Il est clair que les points $A(0;9)$ et $B(8;0)$ sont des sommets du quadrilatère.

Reste à déterminer les coordonnées du dernier sommet C.

A cet effet, on résout

$$\left\{\begin{array}{lcl|l} 15x+10y & = & 90 & :5 \\ 300x+400y & = & 2400 & :100 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} 3x+2y & = & 18 \\ -\quad 3x+4y & = & 24 \\ \hline -2y & = & -6 \\ y & = & 3. \end{array}$$

Il s'ensuit la valeur de x en résolvant

$$\begin{array}{rcl|l} 3x+2\cdot 3 & = & 18 & \\ 3x+6 & = & 18 & -6 \\ 3x & = & 12 & :3 \\ x & = & 4. & \end{array}$$

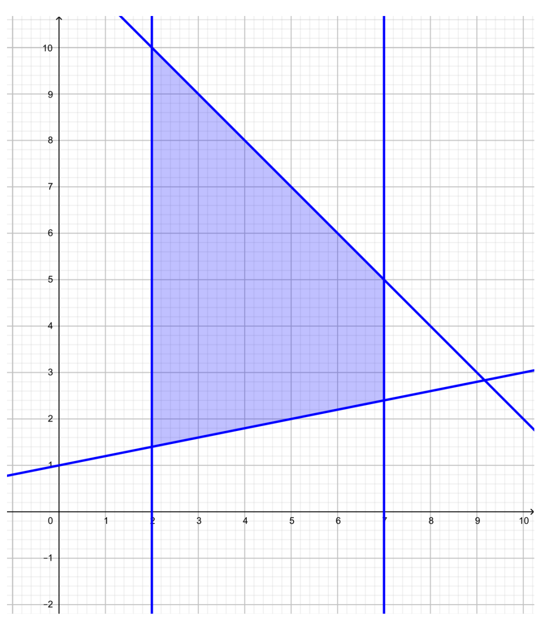
D'où le sommet $C(4;3)$.

Pour trouver le minimum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du quadrilatère. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x;y)$	Valeur de $P=x+y$
$A(0;9)$	$0+9=9$
$B(8;0)$	$8+0=8$
$C(4;3)$	$4+3=7$

Ainsi, le coût minimal $P=7$ francs est atteint pour $x=4$ et $y=3$. Cette ration contient $4\cdot 15+3\cdot 10=90$ g de protéines, $4\cdot 20+3\cdot 30=170$ g d'hydrates de carbone et $4\cdot 300+3\cdot 400=2400$ calories.

Exercice 9.1. La zone hachurée est solution d'un système d'inéquations.

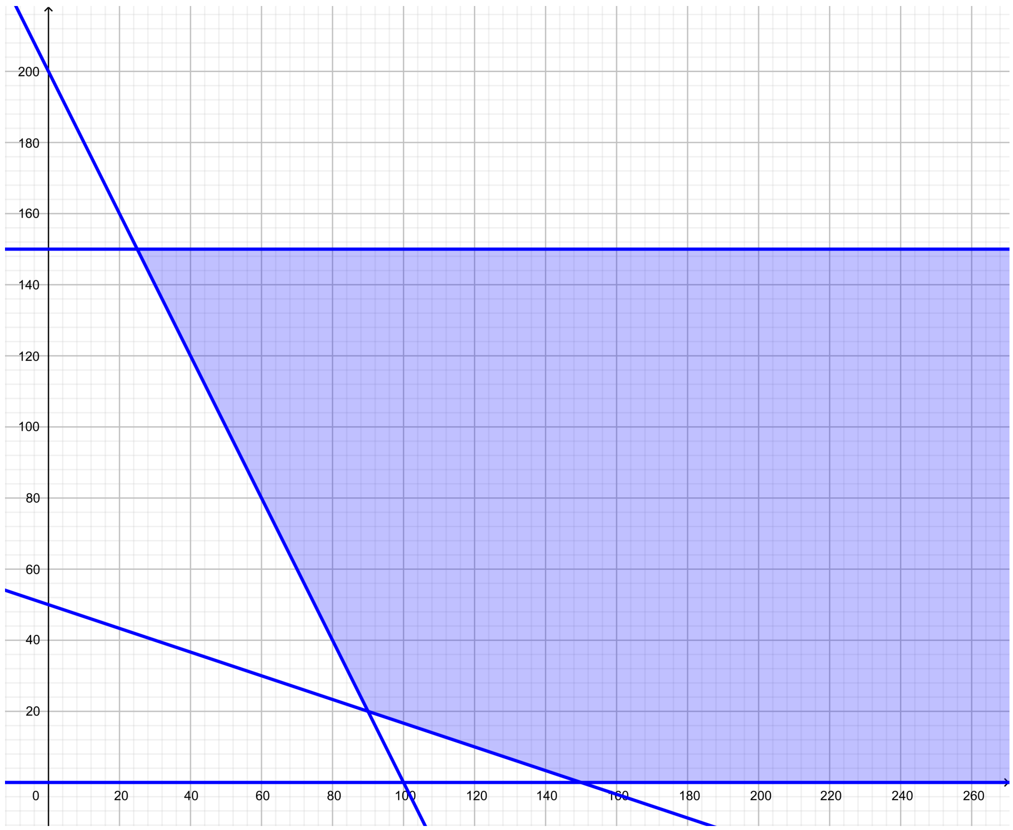


a) Donner ce système.

b) Maximiser la fonction objectif : $R=100x-50y+2500$.

c) Minimiser la fonction objectif : $E=2x+y-100$.

Exercice 9.2. La zone grisée est solution d'un système d'inéquations.



Répondre aux questions suivantes et justifier

a) $(50; 100)$ est une solution ?

b) $(140; 60)$ pourrait être une solution optimale ?

c) $(100; 0)$ pourrait être une solution optimale ?

d) Soit $x = 150$. Est-ce une équation d'une frontière ?

e) Soit $2x + y = 200$. Est-ce une équation d'une frontière ?

Exercice 9.3. Le chef d'une cafeteria doit acquérir au moins 70 assiettes et 40 bols. Il existe deux packs :

— Pack A : 10 assiettes et 10 bols pour 15 francs.

— Pack B : 20 assiettes et 10 bols pour 18.75 francs.

Déterminer le nombre de pack A et B que le chef doit choisir pour minimiser ses dépenses

Exercice 9.4. Une usine fabrique des écrans noir/blanc et des écrans couleur. L'atelier de montage, qui possède une capacité de 3600 heures par mois, met 8 heures pour assembler un écran noir/blanc et 12 heures pour un écran couleur. Un écran noir/blanc a besoin d'un tube noir/blanc et d'un transformateur alors qu'un écran couleur nécessite un tube couleur et un transformateur. L'usine dispose chaque mois de 400 transformateurs valables pour les deux modèles, de 350 tubes noir/blanc et de 250 tubes couleur. Sachant que la vente de chaque écran rapporte, respectivement, 100 francs pour les écrans noir/blanc et 250 francs pour les écrans couleur, déterminer la production qui assurera un bénéfice maximal.

Exercice 9.5. Pour équiper des ordinateurs, une entreprise fabrique des cartes de deux types : A et B, qui utilisent deux types de mémoires : M1 et M2. La carte A nécessite 4 mémoires M1 et 3 mémoires M2 ; la carte B nécessite 2 mémoires M1 et 3 mémoires M2. L'entreprise ne peut disposer par jour que de 240 mémoires M1 et 270 mémoires M2. De plus, sa capacité de production quotidienne est limitée à 80 cartes de type A et 70 cartes de type B. Toute la production est vendue et amène un bénéfice de 45 francs pour la carte A et de 30 francs pour la carte B. Avec ces contraintes, quelle est la production quotidienne qui conduit l'entreprise à réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors le montant de ce bénéfice ?

Exercice 9.6. Pour fleurir un parc, il faut au minimum 1200 jacinthes, 3200 tulipes et 3000 narcisses. Deux pépiniéristes proposent leurs lots :

— Lot A : 30 jacinthes, 40 tulipes et 30 narcisses pour 75 francs ;

— Lot B : 10 jacinthes, 40 tulipes et 50 narcisses pour 60 francs.

Déterminer le nombre de lots de chaque sorte que l'on doit acheter pour fleurir le parc avec une dépense minimale. Reste-t-il des fleurs pour le jardinier ?

Exercice 9.7. Un petit magasin vend des ordinateurs et des imprimantes. La place disponible dans le magasin est de 30 machines au maximum. En moyenne, chaque ordinateur coûte 2'000 francs et chaque imprimante 800 francs. Pour des raisons d'assurance, le magasin ne souhaite pas dépasser 40'800 francs pour la valeur du stock. Si son profit est de 200 francs net par ordinateur et de 100 francs par imprimante, combien d'ordinateurs, respectivement d'imprimantes ce magasin doit-il avoir en stock pour maximiser son profit net ?

Exercice 9.8. Une petite entreprise fabrique des perceuses électriques et des visseuses à accumulateur. Pour que toute sa production s'écoule de manière régulière, il faut qu'elle produise au moins 2 fois plus de perceuses que de visseuses. Chaque perceuse nécessite 10 minutes de montage manuel, alors qu'il en faut 15 pour une visseuse. On dispose d'un maximum de 80 heures de main d'oeuvre pour le montage par jour. Le temps d'usinage est de 7 minutes par perceuse, 7 minutes également par visseuse et les capacités sont de 49 heures d'usinage par jour au maximum. Si la fabrique gagne 6 francs par perceuse et 8 francs par visseuse, quelle nombre de perceuses, respectivement de visseuses, l'entreprise doit-elle fabriquer par jour si elle souhaite maximiser son gain ?

Exercice 9.9. Un fabricant de jouets en bois décide de produire des tables pour enfants et des maisons de poupées. Pour fabriquer une table, il faut 6 minutes de sciage, 8 minutes d'assemblage et 8 minutes à l'atelier de peinture. Pour fabriquer une maison, il faut 4 minutes de sciage, 12 minutes d'assemblage et 8 minutes à l'atelier de peinture. Les temps libres actuels par semaine sont de 72 minutes à l'atelier de sciage, 144 minutes à l'atelier d'assemblage et 112 minutes à l'atelier de peinture. La compagnie peut faire un profit de 50 francs par table et 60 francs pour une maison. Combien d'articles faut-il produire pour maximiser le profit de la compagnie ? Quels seront les temps libres dans chaque atelier si le plan de production trouvé est appliqué ?

Exercice 9.10. Un club de tennis souhaite commander auprès de deux fournisseurs des balles ainsi que des raquettes de tennis pour les juniors. Il souhaite utiliser des balles de marque Wilson Junior pour les enfants et des balles de marque Tretorn pour les adultes. Les balles Wilson sont conditionnées dans des tubes contenant 3 balles et les Tretorn dans des tubes contenant 4 balles. Le fournisseur A propose un lot contenant 3 tubes Wilson, 10 tubes Tretorn et une raquette junior au prix de 200 francs. Le fournisseur B propose un lot contenant 4 tubes Wilson, 6 tubes Tretorn et une raquette junior au prix de 150 francs. Le club souhaite donc passer commande d'un certain nombre de lots auprès des deux fournisseurs. Pour ses besoins, le club souhaite disposer au moins du stock utilisé l'an passé, à savoir 117 balles Wilson, 344 balles Tretorn ainsi que 10 raquettes junior. Déterminer le nombre de lots à commander auprès des deux fournisseurs afin de minimiser les coûts.

9.3 Solutions

Exercice 9.1.

a) $\begin{cases} x & \geq & 2 \\ x & \leq & 7 \\ y & \leq & -x+12 \\ y & \geq & \dfrac{1}{5}x+1 \end{cases}$.

b) $R = 3080$ en utilisant $(7; 2, 4)$.

c) $E = -94,6$ en utilisant $(2; 1, 4)$.

Exercice 9.2.

a) Oui.

b) Non.

c) Non.

d) Non.

e) Oui.

Exercice 9.3. 1 pack A et 3 pack B.

Exercice 9.4. 75 écrans N/B et 250 écrans C.

Exercice 9.5. 30 cartes A et 60 cartes B. Bénéfice de 3150 francs.

Exercice 9.6. il faut 20 lots A et 60 lots B. Il reste alors 600 narcisses.

Exercice 9.7. 14 ordinateurs et 16 imprimantes.

Exercice 9.8. 300 perceuses et 120 visseuses.

Exercice 9.9. 6 tables et 8 maisons de poupées. 4 minutes de temps libre pour l'atelier de sciage et 0 pour les autres ateliers.

Exercice 9.10. 5 lots A et 6 lots B.

9.4 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

9.1 ☐ Résoudre un problème de programmation linéaire.

Chapitre 10

Introduction à la statistique descriptive

10.1 Introduction

Statistique vient du mot latin *status* qui signifie état, situation. Les premières ébauches de la statistique remontent aux recensements qui furent mis sur pied dès les premiers siècles de notre ère. Ce n'est pourtant qu'au $18^{\text{ème}}$ siècle qu'elle se constitue comme une discipline scientifique autonome. Aujourd'hui, la statistique est une branche des mathématiques appliquées en liaison avec le calcul des probabilités mais qui, à la différence de ce dernier, est basée sur des observations d'événements réels (*statistique descriptive*) à partir desquelles on cherche à établir des hypothèses plausibles en vue de prévisions (*statistique inférentielle*) concernant des circonstances analogues. Les statistiques interviennent dans divers domaines de la pensée humaine tels que la démographie, l'économie, la médecine, l'agronomie ou encore l'industrie.

Ce chapitre se borne à une introduction à la statistique descriptive en présentant, sur la base d'un exemple illustratif, les quelques mesures qui caractérisent un ensemble fini de données.

10.2 Définitions

Définition.

1. On appelle *population* l'ensemble de référence sur lequel vont porter les observations. Il est d'usage de désigner par la lettre N la taille d'une population.
2. On appelle *échantillon* une partie de la population que l'on détermine par sondage lorsque la population est trop nombreuse à étudier ou impossible à observer dans sa totalité.
3. On appelle *individu* tout élément de la population.
4. Le nombre d'individus est appelé *l'effectif*.
5. Lorsque l'on peut ainsi étudier une caractéristique que possède chacun des individus, on appelle cela une *variable statistique* ou *caractère*.
6. Les différentes valeurs que peut prendre une variable statistique sont les *modalités* de cette variable.
7. La *fréquence* d'une modalité est le rapport entre l'effectif et le nombre d'observations. On l'exprime souvent en pourcent.

Exemple. On fait une étude auprès des élèves de l'EPC. On aimerait connaître le sexe, l'âge au 1er janvier, la taille et la voie (CFC ou Maturité) de chaque élève.

La population considérée est "les élèves de l'EPC".

Variable statistique	Modalités
Sexe	homme, femme
Age	15, 16, ..., 20
Taille	$[150; 200]$
Voie	CFC, Maturité

Exercice 10.1. Les voitures particulières neuves immatriculées en 2015 sont réparties dans le tableau ci-dessous selon le type d'énergie consommée.

Type d'énergie	Milliers de voitures
Essence	1450
Diesel	630
Hybrides	32
Autres	9

a) Quelle est la population étudiée ?

b) Quel est le caractère étudié ?

Définition.

1. Une variable statistique est dite *quantitative*, respectivement *qualitative* si ses valeurs peuvent être comptées, respectivement qu'elles ne peuvent pas l'être.
2. On dit d'une variable statistique qualitative X qu'elle est *nominale*, respectivement *ordinale*, si ses valeurs ne possèdent pas d'ordre, respectivement si ses valeurs possèdent une certain ordre.
3. On dit d'une variable statiatique quantitative X qu'elle est *discrète*, respectivement *continue*, si l'ensemble des valeurs de celle-ci est fini, respectivement infini.

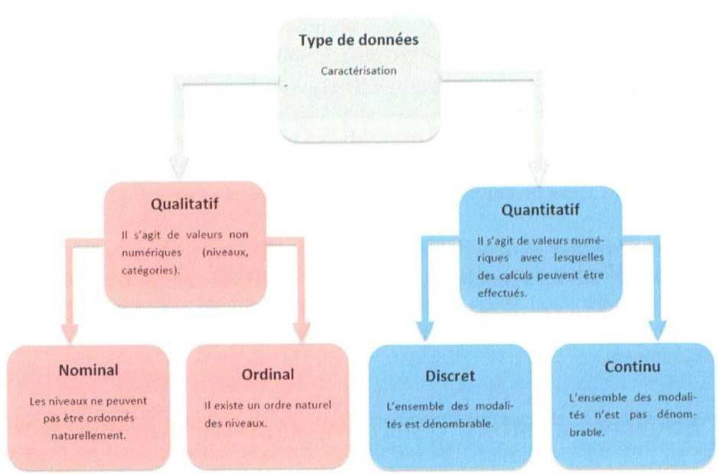


FIGURE 10.1 – Caractérisation des différentes variables statistiques.

Exemple. Dans notre exemple précédent, "Sexe" est une variable statistique qualitative nominale, "Age" est une une variable statistique quantitative discrète, "Taille" est une une variable statistique quantitative continue et "Voie" est une une variable statistique qualitative ordinale.

Exemple. Un quartier est composé de 50 ménages. On considère la variable statistique quantitative discrète X représentant le nombre de personnes par ménage. Les valeurs de la variable sont :

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\
5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 8 & 8
\end{array}$$

La liste ci-dessus n'étant pas commode à lire, il convient de regrouper les données dans le tableau ci-dessous.

Modalités x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i
1	5	10%
2	9	18%
3	15	30%
4	10	20%
5	6	12%
6	3	6%
7	0	0%
8	2	4%

Dans le tableau ci-dessus, on a $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, etc. Les x_i représentent le nombre de personnes par ménage. On a de plus $n_1 = 5$, $n_2 = 9$, etc. Les n_i indiquent le nombre de ménages comportant x_i personnes. Ainsi, on a par exemple 10 ménages comportant 4 personnes.

Remarquons de plus que l'avant-dernière ligne dénombrant les 0 ménage de 7 personnes est superflue.

Exercice 10.2. Classer chacune de des variables suivantes selon qu'elles sont qualitatives, quantitatives discrètes ou quantitatives continues.

a) Profession.

b) Pointure de chaussures.

c) Revenu annuel.

d) Couleur des yeux.

e) Lieu de résidence.

f) Coordonnées GPS.

g) Nationalité.

h) Nombre de langues parlées.

i) Age.

j) Langues parlées.

k) Vitesse du vent.

l) Propriétaire ou locataire d'une maison.

Exercice 10.3. On a demandé aux employés d'une entreprise pour quel parti politique ils avaient voté lors des dernières élections. Voici les données brutes obtenues :

PS	PLR	PS	PDC	PS	UDC
PS	UDC	PLR	PS	verts	PDC
UDC	PLR	verts	UDC	UDC	UDC
PLR	PS	PLR	PDC	PLR	PDC
UDC	PDC	PS	UDC	UDC	UDC

a) Identifier la population ainsi que la variable statistique.

b) Donner l'ensemble des modalités.

c) De quel type est cette variable statistique ?

Exercice 10.4. Un professeur de l'Uni a noté le nombre de points obtenus par 80 étudiants lors d'un test de statistiques.

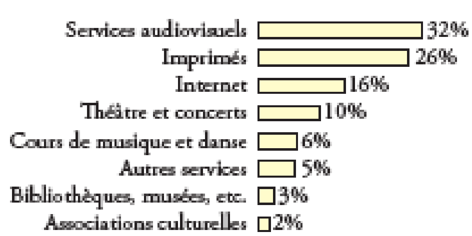
2	3	5	5	4	6	6	5	4	3
7	7	7	6	2	7	7	9	8	10
5	6	6	8	6	6	3	7	3	5
9	7	6	4	7	5	9	9	6	9
6	3	9	8	8	7	5	6	10	6
9	7	7	7	4	7	10	8	7	10
3	5	8	5	8	7	4	8	10	7
4	6	6	8	7	7	7	8	8	9

a) Identifier la population ainsi que la variable statistique.

b) Donner l'ensemble des modalités.

c) De quel type est cette variable statistique ?

Exercice 10.5. De 2009 à 2011, les dépenses culturelles ont représenté 5% de la dépense totale de consommation des ménages suisses. Leur répartition est donnée par le graphique ci-dessous.



Déterminer si les affirmations sont vraies ou fausses et justifier.

a) La population étudiée est "les ménages suisses".

b) Le caractère étudié est "les catégories de dépenses culturelles".

c) La nature du caractère est qualitatif discret.

d) Ce diagramme est faux, car la somme des pourcentages devrait être de 5%.

10.3 Représentation des données à l'intérieur des classes

Souvent, lors d'une étude statistique portant sur une variable statistique quantitative discrète ou continue, les données recueillies diffèrent à peu près toutes les unes des autres et sont étalées sur un large intervalle de valeurs. L'objectif de la statistique descriptive étant de résumer de la façon la plus adéquate possible cet ensemble de données, nous procédons alors à un regroupement de ces dernières à l'intérieur de *classes*, c'est-à-dire de sous-intervalles de valeurs. Les règles suivantes permettent de choisir judicieusement ces classes :

— On fixe un nombre de classes entre 5 et 15. Le nombre de classes dépend de la taille de la population et il faut éviter, si possible, des fréquences de classes trop petites.

— Les intervalles sont du type $[b_{i-1}; b_i[$.

b_{i-1} est la *borne inférieure* de la classe i ;

b_i est la *borne supérieure* de la classe i ;

$c_i = \dfrac{b_{i-1} + b_1}{2}$ est le *centre* de la classe i ;

$L_i = b_i - b_{i-1}$ est la *largeur* (ou *étendue*, *amplitude*) de la classe i.

— En principe, on fixe les bornes des intervalles de telle sorte que ces derniers soient d'égales largeurs. Les bornes doivent permettre des calculs simples.

— Si on doit vraiment utiliser des classes de largeurs inégales, on place les classes de largeur égale au centre de la distribution.

Exemple. Le tableau ci-dessous recense les cinq cents exploitations agricoles d'une région française, en fonction de leur superficie exprimée en hectares.

Superfice en ha	Nombre d'exploitations
jusqu'à 10	48
plus de 10 jusqu'à 15	62
plus de 15 jusqu'à 20	107
plus de 20 jusqu'à 25	133
plus de 25 jusqu'à 30	84
plus de 30	66

Dans cet exemple, la population est l'ensemble des exploitations agricoles d'une région française, tandis qu'un individu est ici une exploitation agricole donnée. La population étant définie, elle est observée selon certains critères. Le critère retenu, c'est-à-dire le caractère, est ici la superficie.

Les résultats que l'on détient sur une population sont généralement inutilisables sous leur forme brute. En vue de synthétiser l'information, on procède à des regroupements, à des classements et à l'établissement de tableaux statistiques. Le tableau ci-dessus constitue déjà une première simplification de l'information complète contenue dans un registre officiel comportant une ligne pour chacune des 500 exploitations.

Les individus étant rassemblés par *classes*, on dit qu'on a affaire à un ensemble de données *groupées*. Ce qu'on gagne en simplicité par ce regroupement, on le perd en information. On sait par exemple que la classe $20-25$ comporte 133 exploitations dont les superficies appartiennent à l'intervalle $]20; 25]$, mais on ne connaît rien de la répartition de ces 133 individus à l'intérieur de leur classe. Il est alors commode de formuler l'hypothèse d'une répartition uniforme au sein de chaque classe.

Si l'on observe la dernière classe, on constate que les données sont lacunaires. En effet, on ne connaît pas la superficie de l'exploitation la plus vaste. Dans ce cas, on convient d'attribuer à cette dernière classe, la même largeur que celle de la première classe, à savoir 10. Ainsi, on admettra que les exploitations les plus vastes ont une superficie variant dans l'intervalle $]30;40]$.

Avec ces différentes conventions, on peut alors présenter les données sous la forme du tableau suivant.

Superfice en ha	Nombre d'exploitations	Fréquences en %
$]0;10]$	48	$9,6$
$]10;15]$	62	$12,4$
$]15;20]$	107	$21,4$
$]20;25]$	133	$26,6$
$]25;30]$	84	$16,8$
$]30;40]$	66	$13,2$

10.4 Représentations graphiques

10.4.1 Diagramme en secteurs

La répartition d'une population et sa distribution de fréquences sont parfois plus expressives sur le plan visuel lorsqu'on les représente à l'aide d'un *diagramme circulaire*. Un diagramme circulaire consiste à représenter la population totale par un cercle et à la diviser en tranches, de façon proportionnelle aux effectifs de la variable statistique considérée. On obtient ainsi une représentation graphique de la répartition relative de la population, autrement dit de la distribution de fréquences.

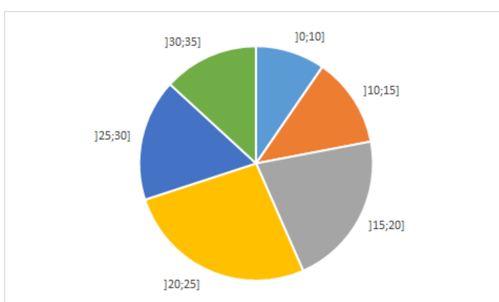


FIGURE 10.2 – Diagramme en secteurs de l'exemple relatif aux exploitations agricoles.

Exercice 10.6. Lors d'un sondage, avant une votation populaire, on a obtenu les indications suivantes :

Avis	Nombre
Oui	1240
Plutôt oui	350
Indécis	780
Plutôt non	410
Non	1120

a) Déterminer en % les fréquences relatives.

b) Dessiner un diagramme circulaire.

Exercice 10.7. Un sondage effectué sur 1400 adolescentes ayant assisté à un concert du groupe *One Direction* a été réalisé. La question posée était "Quel est votre chanteur favori du groupe ?" Les réponses ont été rassemblées au sein du tableau ci-dessous.

Chanteur	Effectifs	Fréquences (en %)	Angle en degrés
Liam Payne	350		
Niall Horan	210		
Zayn Malik	140		
Harry Styles	560		
Louis Tomlinson	140		

a) Compléter le tableau ci-dessus.

b) Construire le diagramme en secteurs à la main.

10.4.2 Diagramme en bâtons

Lorque la variable statistique est quantitative discrète, la distribution des effectifs peut être représentée visuellement par un *diagramme en bâtons*.

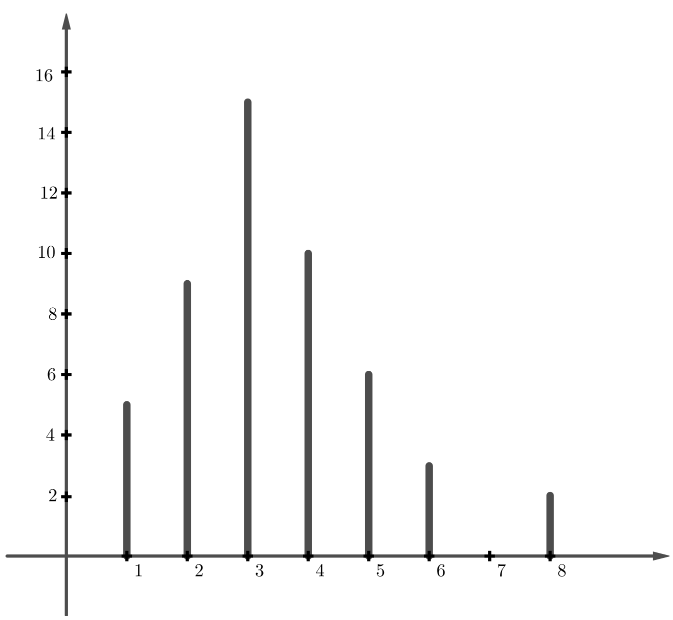


FIGURE 10.3 – Diagramme en bâtons de l'exemple relatif aux nombre de personnes par ménage.

Exercice 10.8. Reprendre les données de l'exercice 10.4 afin d'en proposer

a) Le tableau de distribution des effectifs et des fréquences ;

b) Un diagramme en bâtons puis un diagramme en secteurs.

Exercice 10.9. On étudie l'état civil des 30 employés (numérotés de 1 à 30) d'une petite entreprise.

1	Marié	11	Marié	21	Célibataire
2	Mariée	12	Célibataire	22	Marié
3	Célibataire	13	Marié	23	Veuf
4	Divorcé	14	Veuve	24	Célibataire
5	Marié	15	Marié	25	Divorcée
6	Célibataire	16	Divorcé	26	Divorcé
7	Célibataire	17	Célibataire	27	Marié
8	Mariée	18	Mariée	28	Marié
9	Mariée	19	Marié	29	Marié
10	Divorcée	20	Marié	30	Marié

a) Identifier la population.
b) Caractériser la variable statistique.
c) Donner l'ensemble des modalités.
d) Le tableau des distributions des effectifs et des fréquences.
e) Proposer le diagramme en bâtons des effectifs de cette variable statistique.
f) Proposer le diagramme en bâtons des fréquences de cette variable statistique.
g) Comparer ces deux représentations graphiques.

10.4.3 Histogramme

Lorsque la variable statistique est quantitative continue, la distribution peut être représentée visuellement par un *histogramme*, qui est un diagramme en colonnes où les rectangles sont juxtaposés. En effet, les modalités sont ici remplacées par des classes et celles-ci sont formées d'intervalles successifs de sorte qu'il n'y a plus lieu de séparer ces rectangles.

Dans notre exemple des exploitations agricoles, les classes de superficie n'ont pas toutes la même *amplitude*. Certaines classes ont une amplitude de 10 ha, d'autres 5 ha. Pour être fidèle, une représentation graphique doit tenir compte de ces différences. Si, dans un *histogramme*, on représente les classes par des rectangles, alors, la surface totale représentant l'ensemble de la population, il faut que chaque rectangle ait une aire proportionnelle à l'effectif de la classe que ce dernier représente.

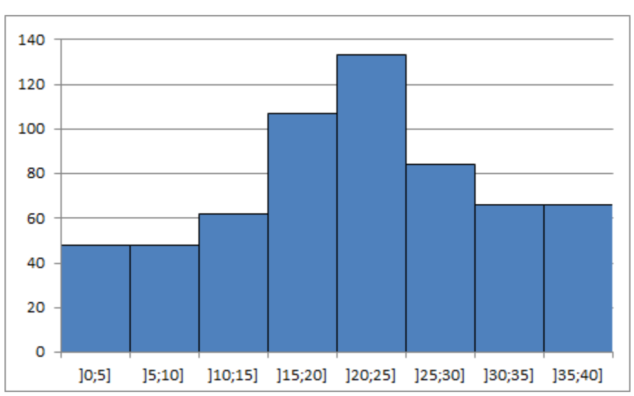


FIGURE 10.4 – Histogramme trompeur.

L'histogramme représenté ci-dessus est trompeur dans la mesure où il donne l'impression erronée que la classe initiale $[0; 10[$ contient 96 exploitations : 48 d'une surface de 0 à 5 ha et le même nombre d'une surface de 5 à 10 ha. Pour éviter cette déformation, il y a lieu de choisir une amplitude de référence (par exemple 5 ha) et de procéder à une correction des effectifs.

Avec cette correction, on obtient alors le tableau et l'histogramme correspondant suivants.

Superfice en ha	Nombre d'exploitations
$]0; 5]$	$\boxed{24}$
$]5; 10]$	$\boxed{24}$
$]10; 15]$	62
$]15; 20]$	107
$]20; 25]$	133
$]25; 30]$	84
$]30; 35]$	$\boxed{33}$
$]35; 40]$	$\boxed{33}$

FIGURE 10.5 – Effectifs corrigés.

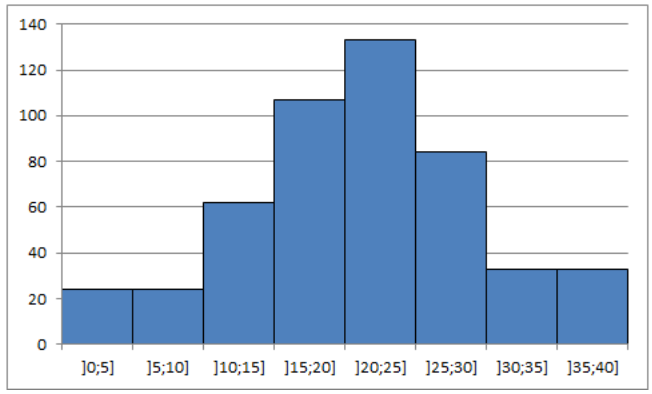


FIGURE 10.6 – Histogramme correct.

Exercice 10.10. Construire correctement l'histogramme correspondant à partir des classes et effectifs suivants.

Classes	Effectifs
$[50; 100[$	3
$[100; 125[$	5
$[125; 150[$	4
$[150; 175[$	6
$[175; 200[$	5
$[200; 300[$	2

Exercice 10.11. Un recensement agricole en 2015 a permis de classer les exploitations agricoles selon la surface agricole utilisée. Les résultats sont présentés ci-dessous

Taille de l'exploitation en ha	Effectifs
$[0; 20[$	125'000
$[20; 50[$	44'000
$[50; 100[$	62'000
$[100; 200[$	35'000
$[200; 1000[$	12'000

a) Déterminer la population ainsi que le caractère étudié.

b) Comment appelle-t-on les intervalles de la première colonne ?

c) Pourquoi a-t-on fait un regroupement ?

d) Quel est le type de cette variable statistique ?

e) Par quel type de diagramme peut-on représenter ce tableau ?

10.4.4 Polygone des effectifs

A l'histogramme, on associe souvent le *polygone des effectifs*. Il s'agit d'une courbe polygonale telle que la surface comprise entre cette courbe et l'axe des abscisses soit égale à la surface de l'histogramme. Elle est obtenue en joignant les milieux des sommets des rectangles de l'histogramme. Pour la première et la dernière classe, on crée à cet effet deux classes fictives d'effectifs nuls.

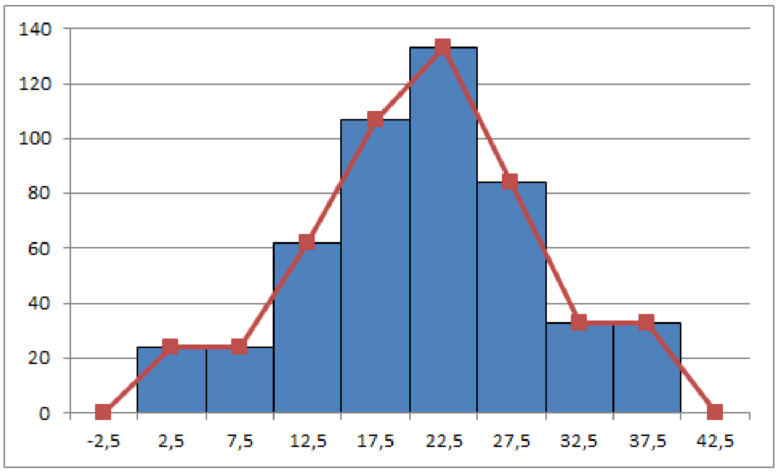


FIGURE 10.7 – Polygone des effectifs.

Exercice 10.12. Une entreprise a enregistré le salaire de tous ses vendeurs pour l'année dernière. Voici les données rangées :

Classes (salaires)	x_i	n_i	f_i
$[10000; 15000[$	12500	2	
$[15000; 20000[$		8	10%
$[20000; 25000[$	22500	14	
$[25000; 30000[$	27500	21	$26,25\%$
$[30000; 35000[$			20%
$[35000; 40000[$	37500	12	15%
$[40000; 45000[$	42500	5	$6,25\%$
$[45000; 50000[$	47500		$2,5\%$
Total		80	100

a) Compléter le tableau des distributions des effectifs et des fréquences.

b) Faire un histogramme.

c) Construire le polygone des effectifs.

10.4.5 Polygone des effectifs cumulés

Aux données de départ, on associe le tableau des effectifs cumulés croissants et cumulés décroissants. On interprète les données de ce tableau comme suit. On peut affirmer, par exemple, que 350 exploitations agricoles ont une superficie d'au plus 25 ha. Par ailleurs, 283 exploitations ont une superficie supérieure à 20 ha.

Classes	Effectifs	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
$]0; 10]$	48	48	500
$]10; 15]$	62	110	452
$]15; 20]$	107	217	390
$]20; 25]$	133	350	283
$]25; 30]$	84	434	150
$]30; 40]$	66	500	66

Les données contenues dans ce tableau peuvent être représentées par deux courbes : *le polygone des effectifs cumulés croissants* et le *polygone des effectifs cumulés décroissants*. Dans la représentation de ces courbes, on ne se préoccupe pas des différences d'amplitude des classes. Notons qu'il est également possible de réaliser un polygone des effectifs à partir des fréquences.

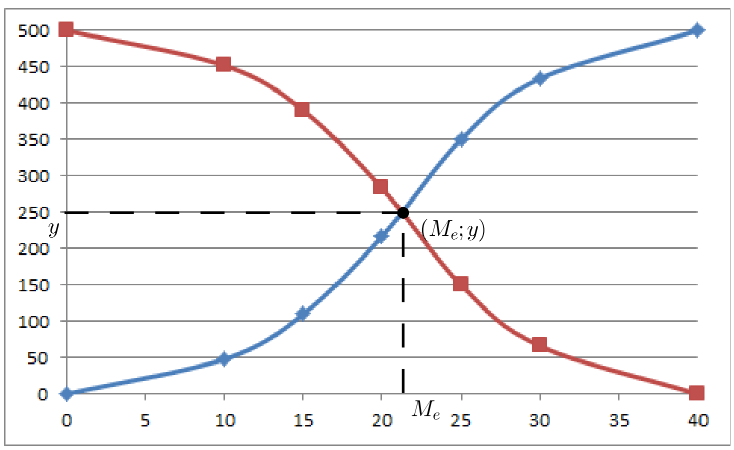


FIGURE 10.8 – Polygones des effectifs cumulés.

Remarque. L'intersection de ces deux polygones est un point $(M_e; y)$, dont la premiere coordonnee est appelée *médiane* M_e de la population. Nous reviendrons sur cette notion ultérieurement. On observe, dans notre exemple, que $M_e \cong 21$. Cette valeur divise la population en deux parties d'effectifs egaux. En effet, soit y la seconde coordonnée du point d'intersection. Comme ce point est sur le polygone des effectifs cumulés croissants, on peut affirmer que y exploitations ont une superficie inferieure à M_e ; le reste, c'est-a-dire $500-y$, ont une superficie superieure à M_e. Ce point étant également sur le polygone des effectifs cumulés décroissants, y decrit le nombre d'exploitations ayant une superficie superieure à M_e. On en deduit que $y = 500 - y$ et donc, que $y = \dfrac{500}{2} = 250$. Ainsi la moitié des exploitations ont une superficie supérieure (respectivement inférieure) à $M_e \cong 21$ ha.

Remarque. Dans une étude statistique, si on souhaite connaître la proportion de chaque valeur que peut prendre la variable statistique étudiée, on regarde sa fréquence f_i.

Si par contre on souhaite connaître la proportion des individus qui présentent des valeurs inférieures à une valeur fixée, on regarde la fréquence cumulée croissante F_i.

Pour visualiser la proportion des individus qui présentent des valeurs supérieures ou égales à une valeur fixée, on étudiera alors la fréquence cumulée décroissante F_i'.

Exercice 10.13. La gendarmerie de Fribourg a relevé sur l'autoroute les vitesses suivantes un samedi soir.

Vitesses (en km/h)	Effectifs
$]80; 100]$	4
$]100; 120]$	34
$]120; 140]$	84
$]140; 160]$	58
$]160; 180]$	20
Total	200

a) Quel est le type de cette variable statistique ?

b) Construire l'histogramme des fréquences, ainsi que le polygone des fréquences.

c) Construire le polygone des fréquences cumulées.

d) Combien d'automobilistes roulaient trop vite ?

e) Combien d'automobilistes seront amendés, sachant qu'une marge de 4% est déduite de la vitesse réelle observée ?

10.5 Valeurs centrales

Une *moyenne* est une valeur caractéristique ou représentative d'un ensemble de données. Si cette valeur caractéristique a tendance à se situer au milieu d'un ensemble de données rangées par ordre de grandeur croissant, alors on dit qu'elle est une *mesure de tendance centrale* ou une *valeur centrale*.

10.5.1 Moyenne arithmétique

Cas discret

Définition. La *moyenne arithmétique* $\overline{x}$ est la valeur centrale la plus connue. Elle est égale au quotient de la somme de toutes les valeurs observées du caractère par l'effectif total. Ainsi

$$\boxed{\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_Nx_N}{N}.}$$

Exemple. Dans notre exemple du nombre de personnes par ménage, la moyenne arithmétique $\overline{x}$ est donnée par

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 15 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 2}{50} = 3,44.$$

Exercice 10.14. Calculer la moyenne arithmétique de l'ensemble des nombres

$$E = \{2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 11, 13\}.$$

Cas continu

Pour des séries de données groupées, se fondant sur une répartition uniforme au sein des classes, on convient d'affecter à tous les individus d'une classe $]b_{i-1}, b_i]$ la valeur centrale $c = \dfrac{b_{i-1} + b_i}{2}$.

Exemple. Pour notre exemple des exploitations agricoles, à l'aide du tableau suivant

Classes x_i	Centres c_i	Effectifs n_i	Produits $n_i \cdot c_i$
$]0;10]$	5	48	240
$]10;15]$	$12,5$	62	775
$]15;20]$	$17,5$	107	$1872,5$
$]20;25]$	$22,5$	133	$2992,5$
$]25;30]$	$27,5$	84	2310
$]30;40]$	35	66	2310
Total		500	10500

on tire la moyenne arithmétique des superficies de ces 500 exploitations agricoles, en calculant

$$\overline{x} = \frac{n_1c_1 + ... + n_6c_6}{N} = \frac{5 \cdot 48 + 12,5 \cdot 62 + 17,5 \cdot 107 + 22,5 \cdot 133 + 27,5 \cdot 84 + 35 \cdot 66}{500} = 21 \text{ ha.}$$

Exercice 10.15. Déterminer la moyenne arithmétique de chacune des populations suivantes.

Ages	Effectifs
$]0;20]$	72
$]20;65]$	180
$]65;100]$	43

Salaire (en Frs)	Nombre de collaborateurs
jusqu'à 80	32
de plus de 80 à 100	48
de plus de 100 à 260	20

10.5.2 Mode

Cas discret

Définition. Le *mode*, noté M_o, est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif le plus grand ou à la fréquence la plus importante. Cette valeur centrale est simple à percevoir, mais elle ne tient pas compte de l'ensemble des valeurs du caractère étudié.

Exemple. Les nombres 3, 5, 7, 7, 7, 9, 9 ont pour mode $M_o = 7$. Remarquons que le mode peut ne pas être unique. Ainsi, l'ensemble 3, 5, 7, 7, 7, 9, 9, 9, qui a deux modes : 7 et 9, est dit *bimodal*.

Exemple. Dans notre exemple du nombre de personnes par ménage, le mode est donné par $M_o = 3$.

Cas continu

Pour des séries de données groupées par classes, nous nous contenterons de déterminer la *classe modale*, qui s'effectue comme suit :

— On détermine les effectifs rectifiés.

— On identifie la classe ayant le plus grand des effectifs rectifiés. Elle porte le nom de *classe modale* et peut ne pas être unique.

Exemple. Dans notre exemple des exploitations agricoles, la classe modale est la quatrième classe. Ainsi

$$M_o \in]20;25].$$

Exercice 10.16. Déterminer la classe modale de la variable statistique continue suivante.

Classes	Effectifs
$[0;2[$	3
$[2;4[$	8
$[4;6[$	15
$[6;8[$	14
$[8;10[$	6
$[10;12[$	2

Exercice 10.17. Calculer les différentes classes modales de cette distribution.

Classes	Effectifs
$[18;20[$	107
$[20;22[$	110
$[22;24[$	91
$[24;28[$	220

10.5.3 Médiane

Cas discret

Définition. La *médiane*, notée M_e, est la valeur du caractère qui partage en deux l'effectif total. C'est la valeur du caractère qui correspond à une fréquence cumulée égale à 50%. Dans une population, il y a ainsi autant d'individus possédant une valeur du caractère inférieure au caractère médian que d'individus possédant une valeur du caractère supérieure à la médiane.

La *classe médiane* d'une variable continue est la première classe où la fréquence cumulée atteint ou dépasse 50%.

Exemple.

1. L'ensemble des nombres 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10 a pour médiane $M_e = 6$.
2. L'effectif de l'ensemble 5, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 18 étant pair, ce dernier a pour médiane $M_e = \dfrac{9+11}{2} = 10$.

Remarque. On constate que la médiane correspond à la valeur du caractère de l'individu occupant le rang $m = \dfrac{N+1}{2}$. Si N est impair, il s'agit d'un individu réel occupant le rang entier m. En revanche, si N est pair, il s'agit d'un individu virtuel placé entre les rangs $N/2$ et $N/2+1$.

Exemple. Reprenons notre exemple du nombre de personnes par ménage. Pour déterminer la valeur de la médiane, il convient de calculer les effectifs cumulés croissants.

Modalités	Effectifs	Effectifs cumulés
1	5	5
2	9	14
3	15	29
4	10	39
5	6	45
6	3	48
8	2	50

La médiane est comprise entre les rangs 25 et 26. Donc, $M_e = 3$.

Exercice 10.18. Que signifie cette affirmation trouvée dans une revue économique : "En France, pour les cadres, le salaire médian proposé à l'embauche se situe aux alentours de 38 K euros" ?

Exercice 10.19. Les valeurs ci-dessous indiquent le nombre de langues parlées par chaque individu sur la base d'un échantillon de 30 salariés d'une compagnie d'assurance.

3	5	2	4	3	4	5	4	3	4
2	1	2	1	3	4	1	2	5	4
1	1	1	1	1	2	4	4	2	2

Calculer la médiane de cette distribution.

Exercice 10.20. Lors d'un loto, on a demandé à 9 grand-mamans le nombre de petits enfants qu'elles avaient. Voici les réponses obtenues : 10, 5, 6, 8, 9, 10, 6 et 12. Malheureusement, la réponse de la dernière s'est perdue.

a) Qu'a-t-elle répondu si la moyenne du nombre de petits-enfants est de 8 ?

b) Qu'a-t-elle pu répondre si la médiane du nombre de petits-enfants est de 8 ?

Exercice 10.21. On a enrengistré au guichet d'une poste (arrondi au kg) de 20 colis envoyés en une heure

3	3	2	3	1	2	1	2	4	4
4	1	1	1	3	1	4	2	4	1

a) Regrouper ces données au sein d'un tableau.

b) Déterminer le poids moyen.

c) Déterminer le mode.

d) Déterminer le poids médian.

Exercice 10.22. Donner une série statistique dont l'effectif total est 3, la médiane 8, la moyenne arithmétique 7 et dont l'une des valeurs est 4.

Exercice 10.23. Calculer la moyenne, la médiane et le mode de la variable statistique suivante.

Modalités	Effectifs
10	2
11	3
12	7
13	9
14	14
15	8
16	3
17	1

Cas continu

Dans le cadre de ce cours, nous nous contenterons de déterminer la classe dans laquelle se trouve la médiane.

Exemple. Dans notre exemple des exploitations agricoles, la superficie médiane est comprise entre celles des 250^e et 251^e individus. Ces deux exploitations appartiennent à la classe $]20;25]$.

Ainsi, $M_e \in]20;25]$.

Exercice 10.24. Dans quelle classe se trouve la médiane de la variable statistique continue suivante ?

Classes	Effectifs
$[0;2[$	3
$[2;4[$	8
$[4;6[$	15
$[6;8[$	14
$[8;10[$	6
$[10;12[$	2

Exercice 10.25. Une entreprise organise un grand tournoi de quilles. Voici le tableau de distribution des scores :

Classes	Effectifs
$[120;140[$	1
$[140;160[$	9
$[160;180[$	22
$[180;200[$	51
$[200;220[$	12
$[220;240[$	5
Total	100

Calculer la moyenne, puis déterminer la classe à laquelle appartient la médiane.

10.5.4 Comparaison entre les valeurs centrales

Nous pouvons maintenant faire quelques comparaisons sommaires entre les trois mesures de tendance centrale.

La moyenne peut être qualifiée de centre de gravité d'une distribution. Elle prend en compte la valeur de chaque score d'une distribution.

Comparée à la moyenne, la médiane est nettement plus "conservatrice". Elle donne une vue plus réaliste d'un centre de la distribution, car la moyenne est fortement influencée par les observations extrêmes. Elle indique un rang.

Le mode ne tient pas compte de toutes les données. Par contre, il n'est pas influencé par les données extrêmes de la distribution. Il indique une seule valeur de la distribution, celle qui a la fréquence la plus élevée.

Exercice 10.26. Soients les échantillons ci-dessous.

Echantillon A	2	9	3	8	3	9	3	2	10	3
Echantillon B	9	2	2	8	3	10	3	9	3	8

a) Quelle est la moyenne arithmétique et la médiane des deux échantillons ?

b) Laquelle de ces deux mesures est la mieux adaptée pour décrire la situation ?

Exercice 10.27. Un contrôle radar a permis de mesurer la vitesse de 10 automobilistes sur une route limitée à 60 km/h.

$$70 \quad 60 \quad 80 \quad 60 \quad 60 \quad 60 \quad 90 \quad 200 \quad 70 \quad 60$$

Quelle mesure de tendance centrale décrit le mieux cette situation ?

Exercice 10.28. Dans notre classe, nous sommes 10 étudiants, au cours de 3 examens différents je n'ai obtenu que 8 points sur 20, ce qui est assez lamentable. À l'aide des indicateurs de tendance centrale, comment vais-je arriver à présenter ces résultats à mon employeur pour que mes résultats ne paraissent pas si mauvais que ça ?

Examen	Moi	Marc	Lili	Jojo	Bob	Fred	Karl	Léa	Luc	Jo
1^{er}	8	2	2	2	9	9	9	9	10	19
2^{er}	8	2	3	4	5	7	9	9	18	19
3^{er}	8	2	7	7	7	10	11	12	18	19

10.6 Mesures de dispersion

Si les valeurs centrales sont généralement nécessaires pour caractériser une série, elles ne sont toutefois pas suffisantes. Deux populations différentes peuvent avoir les mêmes valeurs centrales et différer notablement quant à la dispersion des individus autour de ces valeurs centrales.

Les deux ensembles $A = \{6; 8; 10; 12; 14\}$ et $B = \{2; 6; 10; 14; 18\}$ ont, par exemple, la même moyenne arithmétique et la même médiane, à savoir 10. Pourtant, les individus qui les composent ne sont pas répartis de la même manière autour de cette valeur centrale. L'ensemble B est moins régulier ou plus dispersé que l'ensemble A. On dit que A et B n'ont pas la même dispersion.

Pour comparer deux populations, on considère, outre leurs valeurs centrales, des mesures de leur dispersion. Les mesures classiques de dispersion sont les suivantes : *l'étendue, les quartiles, la variance et l'écart-type.*

10.6.1 Etendue de la série

Il s'agit de la valeur de dispersion la plus simple.

Définition. Aussi appelée *intervalle de variation*, *amplitude de la série* ou *intervalle maximal*, *l'étendue* E est la différence des valeurs extrêmes de la série.

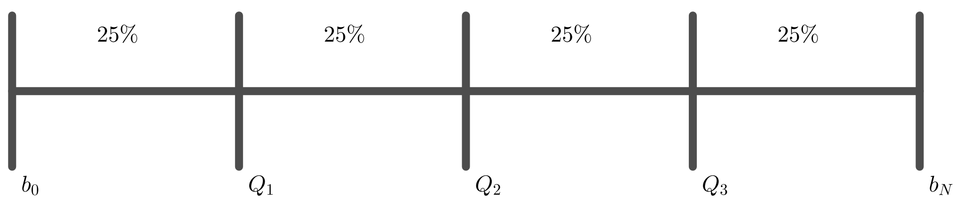
Exemple. Dans notre exemple des exploitations agricoles, l'étendue vaut $E = 40 - 0 = 40$ ha.

Remarque. Simple à calculer, cette mesure de dispersion n'est pas très fiable puisqu'elle ne tient compte que de deux observations marginales et néglige toutes les autres.

10.6.2 Quartiles

Cas discret

Définition. On appelle *quartiles* les valeurs du caractère qui partagent l'effectif total de la série en 4 groupes d'effectifs égaux. On les note Q_1, Q_2 et Q_3. Un quart de l'effectif total possède donc un caractère inférieur à Q_1. Le deuxième quartile $Q_2 = M_e$ n'est autre que la médiane. Enfin, les trois quarts de la population se trouvent en dessous de la valeur définie par le troisième quartile Q_3.



Remarque. La détermination des quartiles est identique à celle de la médiane.

Exemple. Reprenons notre exemple du nombre de personnes par ménage.

Modalités	Effectifs	Effectifs cumulés	Fréquences (en %)	Fréquences cumulées
1	5	5	10	10
2	9	14	18	28
3	15	29	30	58
4	10	39	20	78
5	6	45	12	90
6	3	48	6	96
8	2	50	4	100

On connaît déjà $Q_2 = M_e = 3$. Le quartile Q_1 est la moyenne des observations de rangs 12 et 13, qui sont égales à 2. Donc $Q_1 = 2$. Quant au quartile Q_3, il est égal à la moyenne des observations de rangs 37 et 38. Ceux-ci étant égaux à 4, on a donc $Q_3 = 4$.

Remarque. La plupart du temps, lorsqu'il s'agit par exemple de définir les quartiles, il n'est pas possible de trouver des rangs qui divisent la population en quatre classes d'effectif égal. Dans ce cas, on convertit les effectifs en fréquences et on définit les quartiles Q_1, M_e et Q_3 par les valeurs du caractère associées aux fréquences cumulées 25%, 50% et 75%.

Remarque. Il est possible de généraliser la notion de quartile à celle de *quantile d'ordre n*. Les autres quantiles les plus souvent utilisés sont :

— *Les déciles* D_1, D_2, ..., D_9 partagent l'effectif total en dix groupes égaux. Un dixième de la population a un caractère inférieur à D_1, et neuf dixièmes ont un caractère supérieur à D_1, . . ., et ainsi de suite. Le décile D_5 est égal à la médiane ;

— *Les centiles* C_1, C_2,. . . , C_{99} partagent la population en 100 groupes d'effectifs égaux.

Exercice 10.29. Calculer les trois quartiles de la distribution ci-dessous.

1	1	4	8	8	10	10	10	15	20
1	1	4	8	8	10	10	10	15	20
1	4	8	8	8	10	10	10	15	20
1	4	8	8	8	10	10	10	15	20
1	4	8	8	8	10	10	10	20	20

Cas continu

Dans le cadre de ce cours, nous nous contenterons de déterminer les classes dans lesquelles se trouvent les quartiles Q_1, Q_2 et Q_3.

Exemple. Dans notre exemple des exploitations agricoles, on connait déjà la mediane $Q_2 = M_e \in [20; 25[$.

Le premier quartile Q_1 est la moyenne des superficies des exploitations de rangs 125 et 126. Comme elles se trouvent dans la troisieme classe.
Donc $Q_1 \in [15; 20[$.

Le troisième quartile Q_3 est défini par la moyenne des superficies des exploitations de rangs 375 et 376. Celles-ci se trouvent dans la cinquième classe.
On a donc $Q_3 \in]25; 30]$.

Exercice 10.30. Un échantillon de 200 sportifs est à la base du tableau ci-dessous.

Taille en cm	n_i	F_i
$[150; 160[$		$0,2$
$[160; 170[$	60	
$[170; 180[$		$0,6$
$[180; 190[$	30	
$[190; 200[$		

a) Compléter le tableau ci-dessus.

b) Déterminer la classe dans laquelle se trouve le mode, la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3.

10.6.3 Intervalle interquartile

Définition. *L'intervalle interquartile* I_Q est défini par la différence des quartiles extrêmes. Autrement dit, on a

$$\boxed{I_Q = Q_3 - Q_1.}$$

Définition. *L'intervalle semi-interquartile* Q est défini par la moitié de la différence des quartiles extrêmes. Autrement dit, on a

$$\boxed{Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}.}$$

Exemple. Dans notre exemple du nombre de personnes par ménage, on a

$$I_Q = 4 - 2 = 2$$

et

$$Q = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Remarque. Cette mesure est plus fiable que l'étendue puisqu'elle exclut les 50% des valeurs marginales inférieures et supérieures.

10.6.4 Variance écart-type

Cas discret

Exemple. Deux classes de 20 élèves ont effectué un travail écrit de mathématiques, dont les résultats de ces travaux écrits sont présentés dans les tableaux ci-dessous.

Note x_i	Nombre d'élèves n_i
1	0
$1,5$	0
2	0
$2,5$	0
3	0
$3,5$	3
4	7
$4,5$	8
5	1
$5,5$	1
6	0

TABLE 10.1 – Notes de la première classe.

Note y_i	Nombre d'élèves n_i
1	0
$1,5$	1
2	0
$2,5$	2
3	4
$3,5$	0
4	0
$4,5$	3
5	6
$5,5$	2
6	2

TABLE 10.2 – Notes de la deuxième classe.

Au vu des résultats ci-dessus, il est naturel de se poser la question suivante.

Question : Laquelle de ces deux classes a été la plus performante lors de ce travail écrit ?

Un moyen de répondre à cette question consiste à calculer la moyenne arithmétique de chacune des deux classes :

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{3,5\cdot 3+4\cdot 7+4,5\cdot 8+5\cdot 1+5,5\cdot 1}{20}=4,25 \\
\overline{y} &= \frac{1,5\cdot 1+2,5\cdot 2+3\cdot 4+4,5\cdot 3+5\cdot 6+5,5\cdot 2+6\cdot 2}{20}=4,25.
\end{aligned}$$

Ces deux moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont égales alors que les résultats sont très différents !

La moyenne arithmétique ne donne pas d'informations sur la *dispersion des résultats* autour de la moyenne. Pour l'estimer, on essaie de quantifier la manière dont les notes sont réparties autour de la moyenne.

On obtient :

$x_1 - \overline{x}$	n_i
$-3,25$	0
$-2,75$	0
$-2,25$	0
$-1,75$	0
$-1,25$	0
$-0,75$	3
$-0,25$	7
$0,25$	8
$0,75$	1
$1,25$	1
$1,75$	0

$y_i - \overline{y}$	n_i
$-3,25$	0
$-2,75$	1
$-2,25$	0
$-1,75$	2
$-1,25$	4
$-0,75$	0
$-0,25$	0
$0,25$	3
$0,75$	6
$1,25$	2
$1,75$	2

Le calcul de la moyenne de ces écarts est nul, car les écarts négatifs sont exactement compensés par les écarts positifs, ce qui n'amène aucun renseignement sur la dispersion. On choisit alors de calculer le carré des écarts à la moyenne.

On obtient alors les distributions suivantes :

$(x_i - \overline{x})^2$	n_i
10,5625	0
7,5625	0
5,0625	0
3,0625	0
1,5625	0
0,5625	3
0,0625	7
0,0625	8
0,5625	1
1,5625	1
3,0625	0

$(y_i - \overline{y})^2$	n_i
10,5625	0
7,5625	1
5,0625	0
3,0625	2
1,5625	4
0,5625	0
0,0625	0
0,0625	3
0,5625	6
1,5625	2
3,0625	2

Calculons alors la moyenne arithmétique de $(\overline{x} - x_i)^2$ et $(\overline{y} - y_i)^2$:

$$\begin{aligned}
\overline{(x_i - \overline{x})^2} &= \frac{0,5625 \cdot 3 + 0,0625 \cdot 7 + 0,0625 \cdot 8 + 0,5625 \cdot 1 + 1,5625 \cdot 1}{20} \\
&= 0{,}2375
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{(y_i - \overline{y})^2} &= \frac{7,5625 \cdot 1 + 3,0625 \cdot 2 + 1,5625 \cdot 4 + 0,0625 \cdot 3 + 0,5625 \cdot 6 + 1,5625 \cdot 2 + 3,0625 \cdot 2}{20} \\
&= 1{,}6375.
\end{aligned}$$

Ces nombres ainsi trouvés sont une *mesure de la dispersion* des notes autour de la moyenne arithmétique. On voit ainsi que les notes de la première classe sont plus proches de la moyenne que celles de la deuxième classe.

Définition. On appelle *variance* V d'une série statistique la moyenne des carrés des écarts (et non pas des valeurs absolues) entre toutes les données et leur moyenne arithmétique. On a ainsi

$$\boxed{V = \overline{(\overline{x} - x_i)^2} = \frac{(\overline{x} - x_1)^2 + (\overline{x} - x_2)^2 + ... + (\overline{x} - x_n)^2}{N}.}$$

Définition. On appelle *ecart-type* σ, la racine carrée de la variance. Autrement dit, on a

$$\boxed{\sigma = \sqrt{V}.}$$

Remarque. L'écart-type est une mesure de la dispersion plus significative que la variance. En effet, si les données x_1 représentant une distance exprimée en mètres, V est en m^2 tandis que l'écart-type est exprimé en mètres.

Exemple. Soient les nombres -4, 3, 9, 11 et 17.

La moyenne arithmétique de ces nombres vaut

$$\overline{x} = \frac{-4 + 3 + 9 + 11 + 17}{5} = 7,2.$$

Du tableau suivant

	x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
	-4	$-11,2$	$125,44$
	3	$-4,2$	$17,64$
	9	$1,8$	$3,24$
	11	$3,8$	$14,44$
	17	$9,8$	$96,04$
Total	36	0	$256,8$

on en tire la variance

$$V = \frac{256,8}{5} = 51,36$$

et l'écart-type

$$\sigma = \sqrt{51,36} \cong 7,167.$$

Exemple. Calculons la variance et l'écart-type de notre exemple du nombre de personnes par ménage. A cet effet, il convient de dresser le tableau ci-dessous.

Modalités x_i	Effectifs n_i	Ecarts $x_i - \overline{x}$	Carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$	Produits $n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$
1	5	$-2,44$	$5,9536$	$29,768$
2	9	$-1,44$	$2,0736$	$18,6624$
3	15	$-0,44$	$0,1936$	$2,904$
4	10	$0,56$	$0,3136$	$3,136$
5	6	$1,56$	$2,4336$	$14,6016$
6	3	$2,56$	$6,5536$	$19,6608$
8	2	$4,56$	$20,7936$	$41,5872$
Total	50			130,32

On en tire la variance

$$V = \frac{130,32}{50} = 20,6064$$

et donc

$$\sigma = \sqrt{V} \cong 1,614.$$

Exercice 10.31. Calculer la variance et l'écart-type des nombres suivants : -9, -4, 1, 7, 10, 21.

Cas continu

Comme pour le calcul de la moyenne arithmétique, on affecte à tous les individus d'une classe $]b_{i-1}; b_i]$ la valeur centrale $c = \dfrac{b_{i-1} + b_i}{2}$.

Exemple. Dans notre exemple des exploitations agricoles, cet écart se calcule à l'aide du tableau suivant.

Classes x_i	Centres c_i	Effectifs n_i	Carrés des écarts $(c_i - \overline{x})^2$	Produits $n_i \cdot (c_i - \overline{x})^2$
$]0; 10]$	5	48	256	12288
$]10; 15]$	12,5	62	72,25	4479,5
$]15; 20]$	17,5	107	12,25	1310,75
$]20; 25]$	22,5	133	2,25	299,25
$]25; 30]$	27,5	84	42,25	3549
$]30; 40]$	35	66	196	12936
Total		500	196	34862,5

La variance est donc égale à $V = \dfrac{34862,5}{500} = 69,725 \text{ ha}^2$ et l'écart-type est donné par

$$\sigma = \sqrt{69,725 \text{ ha}^2} \cong 8,35 \text{ ha}.$$

Exercice 10.32. Déterminer la variance et l'écart-type de chacune des populations suivantes.

Ages	Effectifs
$]0; 20]$	72
$]20; 65]$	180
$]65; 100]$	43

Salaire (en Frs)	Nombre de collaborateurs
jusqu'à 80	32
de plus de 80 à 100	48
de plus de 100 à 260	20

Autre méthode de calcul

Le calcul de la variance (et donc de l'écart-type) n'est pas toujours commode. En particulier lorsque la moyenne est un nombre dont on ne donne qu'une approximation avec un développement décimal limité. Les calculs peuvent toutefois être simplifiés de la manière suivante.

Théorème. *La variance V peut être obtenue en calculant la différence entre la moyenne $\overline{x^2}$ des carrés des données x_i et le carré de leur moyenne $\overline{x}^2$. Ainsi, on a*

$$\boxed{V = \overline{x^2} - \overline{x}^2.}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
V &= \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+...+(x_n-\overline{x})^2}{N} \\
&= \frac{(x_1^2-2x_1\overline{x}+\overline{x}^2)+(x_2^2-2x_2\overline{x}+\overline{x}^2)+...+(x_n^2-2x_n\overline{x}+\overline{x}^2)}{N} \\
&= \frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{N}-\frac{2\overline{x}(x_1+x_2+...+x_n)}{N}+\frac{\overline{x}^2+\overline{x}^2+...+\overline{x}^2}{N} \\
&= \overline{x^2}-2\overline{x}\cdot\overline{x}+\overline{x}^2 \\
&= \overline{x^2}-2\overline{x}^2+\overline{x}^2 \\
&= \overline{x^2}-\overline{x}^2.
\end{aligned}$$

□

Remarque. Cette seconde formulation sera préférée à la première chaque fois que les termes $x_i-\overline{x}$ sont plus compliqués que les termes x_i. Ce cas se présente fréquemment lorsque la moyenne n'est pas un nombre entier.

Exemple. Reprenons l'exemple des nombres -4, 3, 9, 11 et 17 de moyenne arithmétique $7,2$.

Du tableau suivant

	x_i	x_i^2
	-4	16
	3	9
	9	81
	11	121
	17	289
Total	36	516

on en tire la variance $V=\dfrac{516}{5}-7,2^2=51,36$ et l'écart-type $\sigma=\sqrt{51,36}\cong 7,167$. On retrouve bien les résultats obtenus plus haut.

Exemple. Reprenons l'exemple des exploitations agricoles.

Classes x_i	Centres c_i	Effectifs n_i	Carrés des centres c_i^2	Produits $n_i\cdot c_i^2$
$]0;10]$	5	48	25	1200
$]10;15]$	$12,5$	62	$156,25$	$9687,5$
$]15;20]$	$17,5$	107	$306,25$	$32768,75$
$]20;25]$	$22,5$	133	$506,25$	$67331,25$
$]25;30]$	$27,5$	84	$756,25$	63525
$]30;40]$	35	66	1225	80850
Total		500		$255362,5$

On en déduit que $\overline{x^2}=\dfrac{255362,5}{500}=510,725$. Comme $\overline{x}=21$, $\overline{x}^2=441$, il suit que

$$V=\overline{x^2}-\overline{x}^2=510,725-441=69,725 \text{ ha}^2$$

et l'écart-type est donc donné par $\sigma=\sqrt{69,725\text{ ha}^2}\cong 8,35$ ha.

Exercice 10.33. Appliquer cette méthode simplificatrice aux exercices 10.31 et 10.32.

Exercice 10.34. On donne la série suivante :

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 5 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 2 \quad 2 \quad 4$$

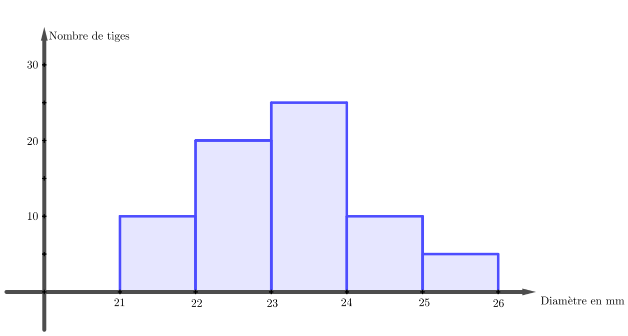
Calculer b_0, b_{10}, Q_1, M_e, Q_3, $\overline{x}$, $\overline{x^2}$, σ_x^2 et σ_x.

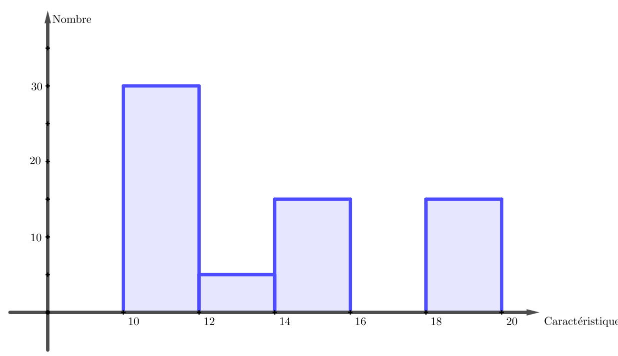
Exercice 10.35. Des mesures de vitesse d'automobiles ont donné les resultats suivants :

Vitesse	Nombre
$]30;35]$	15
$]35;40]$	39
$]40;45]$	65
$]45;50]$	87
$]50;55]$	70
$]55;60]$	22
$]60;65]$	12

Calculer la moyenne arithmétique et l'écart-type.

Exercice 10.36. Dans chacun des cas suivants, déterminer la moyenne et l'écart-type à partir des histogrammes ci-dessous.





10.6.5 Coefficient de variation

Définition. Le *coefficient de variation* C d'une variable statistique est le rapport entre l'écart-type et la moyenne exprimé sous la forme d'un pourcentage :

$$\boxed{C = \frac{\sigma}{\overline{x}}.}$$

Exemple. Dans notre exemple des exploitations agricoles, ce coefficient vaut

$$C = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cong \frac{8,35}{21} \cong 0,398 = 39,8\%.$$

Remarque. Le coefficient de variation est un indicateur de l'homogénéité de la population. On considère qu'un coefficient de variation inférieur à 15% indique que la population est homogène, tandis qu'un coefficient supérieur à 15% indique que les valeurs sont relativement dispersées. Le coefficient de variation est une mesure sans unité et indépendante de l'ordre de grandeur. On peut donc l'utiliser pour comparer la dispersion de variables statistiques avec des ordres de grandeur et des unités différentes.

Exercice 10.37. Les nombres suivants indiquent la masse en grammes de 20 poussins :

$$67; 73; 76; 82; 60; 62; 60; 62; 55; 64; 64; 55; 75; 66; 61; 69; 72; 73; 54; 59.$$

Calculer la moyenne arithmétique, la médiane, l'écart-type et le coefficient de variation.

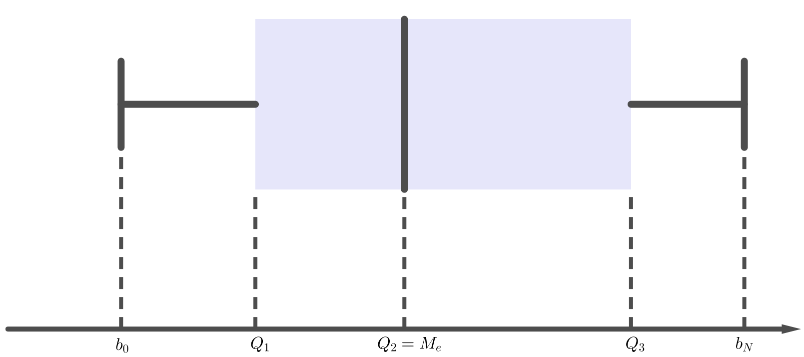
Exercice 10.38. Soit la population ci-dessous.

Somme dépensée en francs	Nombre de clients
$[0; 20[$	141
$[20; 40[$	239
$[40; 60[$	451
$[60; 80[$	578
$[80; 100[$	321
$[100; 200[$	294

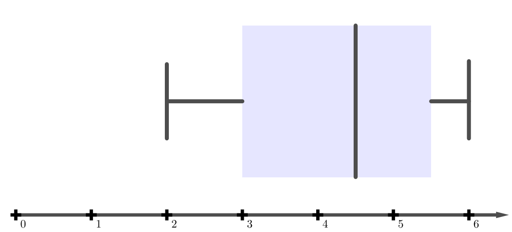
Calculer l'écart-type et le coefficient de variation.

10.6.6 Boîte à moustaches

Définition. Le *diagramme de Tuckey*, plus communément appelé *boîte à moustaches* ou *box plot*, est une représentation codifiée des quantiles Q_1, M_e, Q_3 et des valeurs extrêmes b_0 et b_N de la distribution qui donne une information graphique concernant la symétrie de la distribution.



Exemple. Les notes d'une classe ont été représentées à l'aide de la boîte à moustache ci-dessous.



Cette boîte à moustaches fournit les informations suivantes :

— La moins bonne note est 2 et la meilleure 6.

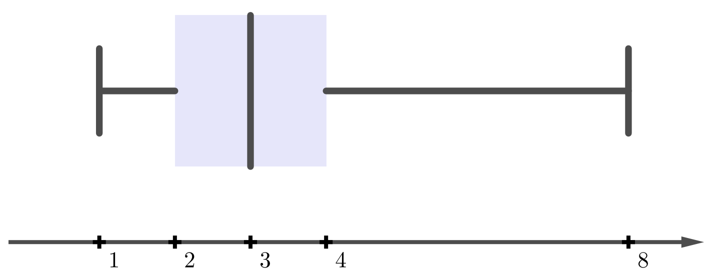
— 25% des élèves ont fait une note égale ou inférieure à 3.

— La moitié des élèves ont fait $4,5$ au moins (et au plus !).

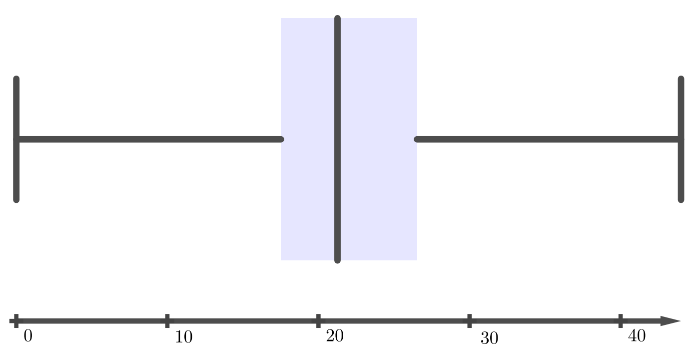
— 75% des élèves ont fait une note inférieure ou égale à $5,5$.

— 50% se tiennent dans un écart de $2,5$.

Exemple. Dans notre exemple du nombre de personnes par ménage, la boîte à moustaches est donnée par



Exemple. Dans notre exemple des exploitations agricoles, la distribution étant presque symétrique, la boîte à moustaches s'étale symétriquement sur l'intervalle $[0; 40]$.



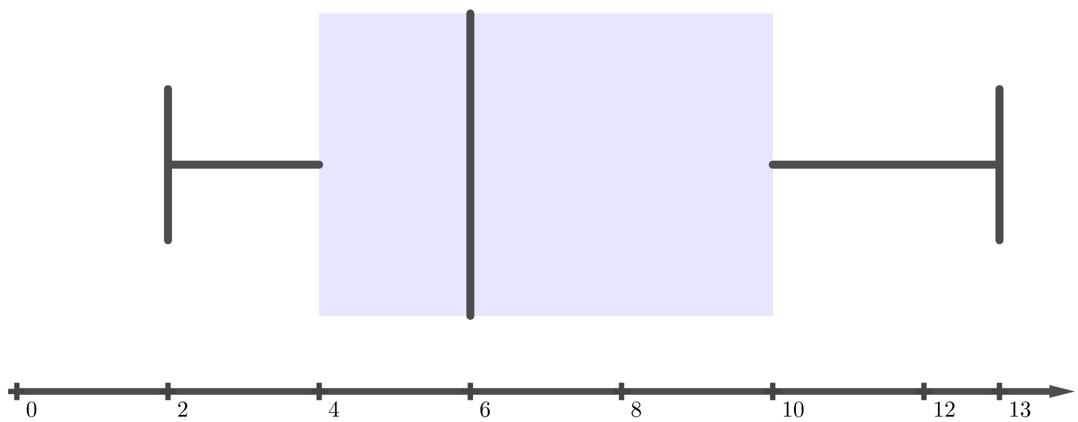
Exercice 10.39. A une station météo, la température extérieure a été mesurée et enrengistrée, chaque jour à midi, durant tout le mois de février. Il en résulte le tableau des températures exprimées en °C.

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Température	7	-2	0	1	-5	-9	-6	-5	-2	4	7	11	12	10

Jour	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Température	10	10	7	4	3	-2	-3	-6	-1	4	7	11	12	10

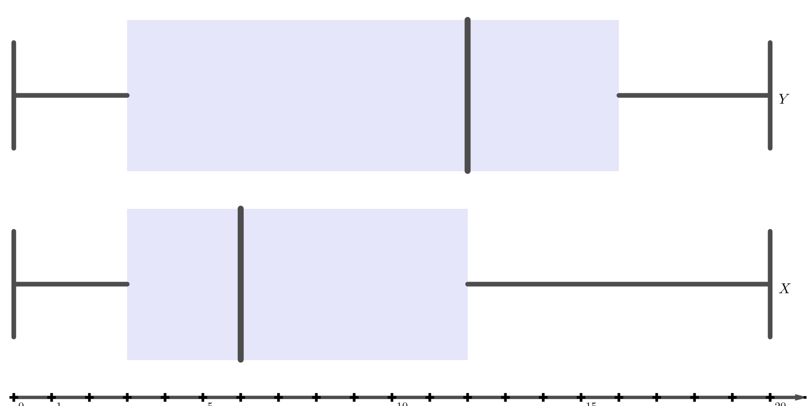
Représenter la boîte à moustaches correspondant à ces mesures.

Exercice 10.40. Dans une entreprise, on interroge un certain nombre d'employés pour savoir combien de mails ils ont envoyé durant une journée. Les résultats sont synthétisés par la boîte à moustaches ci-dessous.



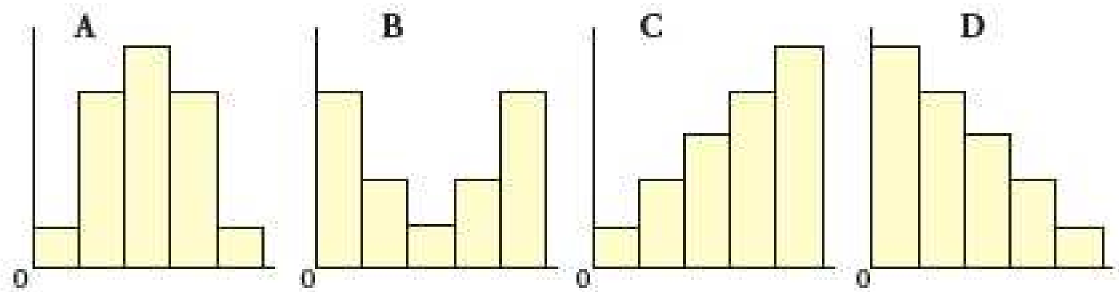
a) Déterminer l'étendue, les trois quartiles et l'intervalle interquartile.
b) Entre combien et combien de mails les employés ont-ils envoyé ?
c) La moitié des employés interrogés ont envoyé plus de combien de mails ?
d) Quel pourcentage d'employés interrogés a envoyé entre 4 et 10 mails ?

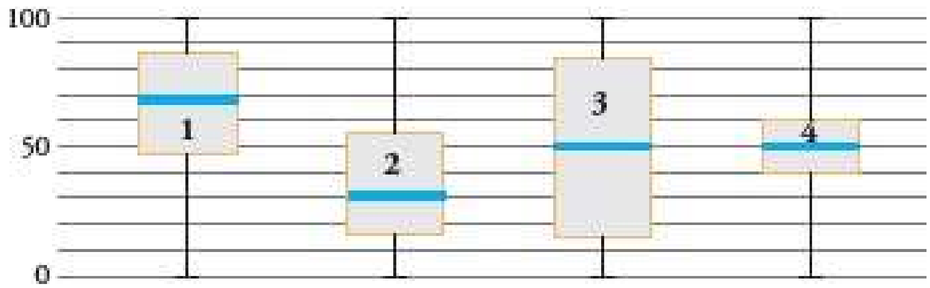
Exercice 10.41. Dans deux villes X et Y, on a sélectionné un échantillon de 1000 personnes à qui on a demandé combien de cigarettes ils fumaient quotidiennement. Les résultats sont présentés au sein des boîtes à moustache ci-dessous.



a) Quelle est la valeur des quartiles Q_1, Q_2 et Q_3 pour les deux villes ?
b) Quelle est la ville la plus consommatrice de cigarettes ?
c) Peut-on affirmer qu'un quart de la population de la ville X fume plus de 3 cigarettes par jour ?
d) Peut-on affirmer que la moitié des habitants de la ville Y fume moins de 11 cigarettes par jour ?

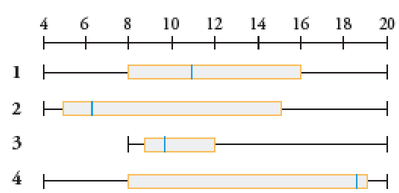
Exercice 10.42. Associer chacun des quatre histogrammes ci-dessous aux boîtes à moustaches correspondantes.





Exercice 10.43. Associer les quatre distributions suivantes au boîtes à moustaches ci-dessous.

X	4	5	8	9	18	19	19	19	19	20
Y	8	9	9	9	9	10	11	12	18	20
Z	4	4	5	5	6	7	10	15	18	20
U	4	6	8	8	10	12	16	16	16	20



10.7 Solutions

Exercice 10.1.

a) La population étudiée est "les voitures particulières neuves immatriculées en 2015".

b) Le caractère étudié est "type d'énergie consommée par ces voitures".

Exercice 10.2.

a) Qualitative.

b) Quantitative discrète.

c) Quantitative discrète.

d) Qualitative.

e) Qualitative.

f) Quantitative continue.

g) Qualitative.

h) Quantitative discrète.

i) Quantitative discrète.

j) Qualitative.

k) Quantitative continue.

l) Qualitative.

Exercice 10.3.

a) La population : les employés d'une entreprise. La v.s : le parti politique pour lequel ils ont voté.

b) Les modalités : $\{\text{PS}; \text{PLR}; \text{PDC}; \text{UDC}; \text{verts}\}$.

c) Cette variable statistique est qualitative.

Exercice 10.4.

a) La population : les 80 étudiants du professeur de l'Uni. La v.s : le nombre de points obtenus lors d'un test statistique.

b) Les modalités : $\{2; 3; ...; 10\}$.

c) Elle est du type quantitative discrète.

Exercice 10.5.

a) Faux, ce sont les "dépenses culturelles".

b) Vrai.

c) Faux. Cela n'a pas de sens.

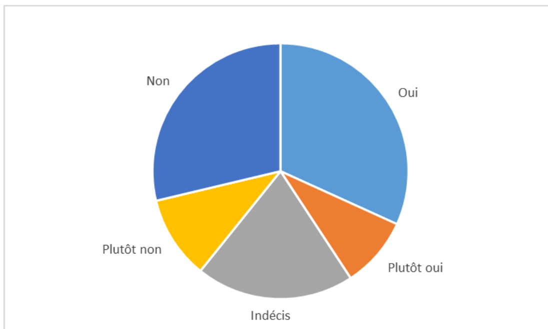
d) Faux. Le total être de 100%.

Exercice 10.6.

a)

Avis	Fréquences
Oui	$31,79\%$
Plutôt oui	$8,97\%$
Indécis	20%
Plutôt non	$10,51\%$
Non	$28,71\%$

b)

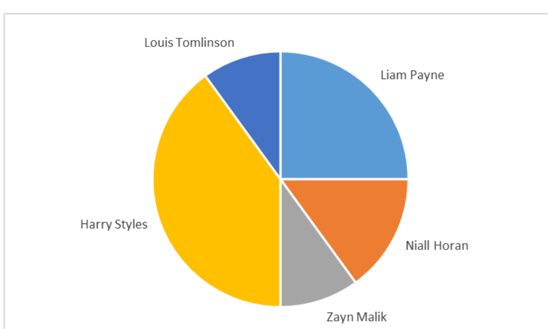


Exercice 10.7.

a)

Chanteur	Effectifs	Fréquences (en %)	Angle en degrés
Liam Payne	350	25	$90°$
Niall Horan	210	15	$54°$
Zayn Malik	140	10	$36°$
Harry Styles	560	40	$144°$
Louis Tomlinson	140	10	$36°$

b)

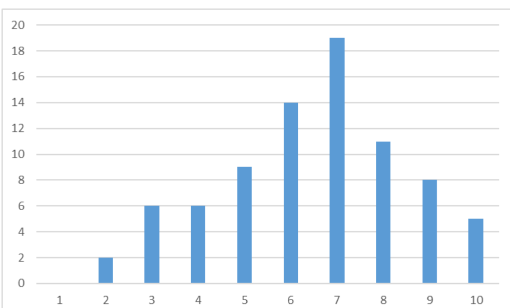


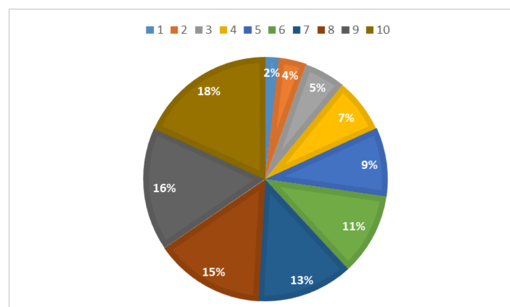
Exercice 10.8.

a)

x_i	n_i	f_i
1	0	0%
2	2	2,5%
3	6	7,5%
4	6	7,5%
5	9	11,25%
6	14	17,5%
7	19	23,75%
8	11	13,75%
9	8	10%
10	5	6,25%
Total	80	100%

b)





Exercice 10.9.

a) 30 employés d'une petite entreprise.

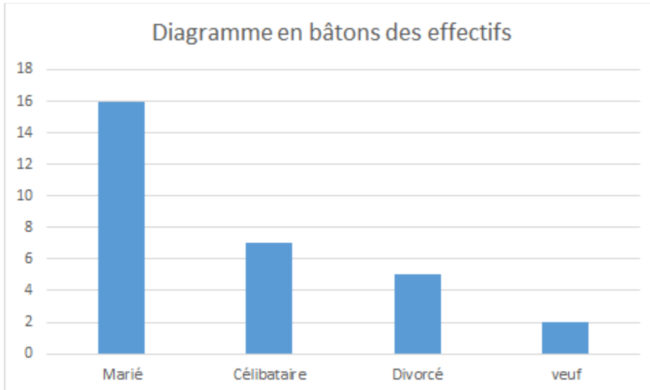
b) Leur état civil

c) {Marié, Célibataire, Divorcé, Veuf}.

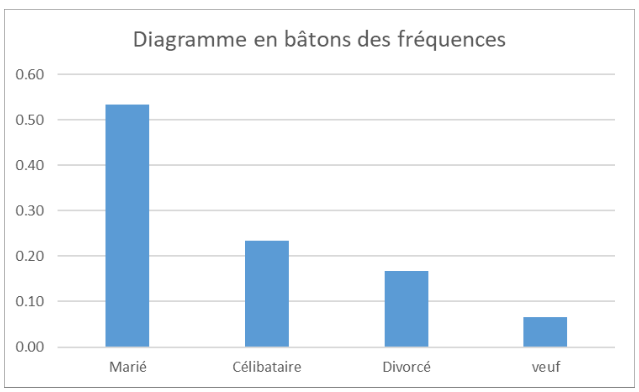
d)

x_i	n_i	f_i
Marié	16	0,53
Célibataire	7	0,22
Divorcé	5	0,17
Veuf	2	0,07
Total	30	1

e)

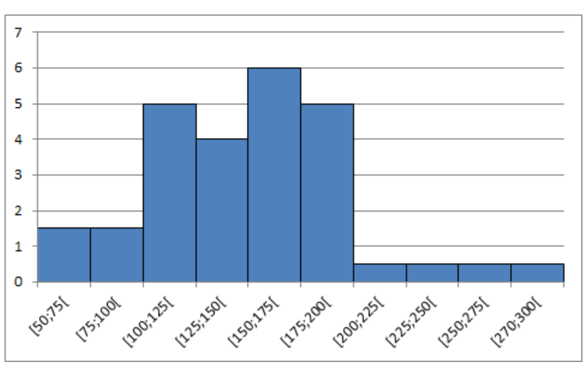


f)



g) Ils sont semblables.

Exercice 10.10.



Exercice 10.11.

a) La population est "les exploitations agricoles en 2015" et leur surface est le caractère.

b) Des classes.

c) Car il y a beaucoup de valeurs différentes du caractère. Cela facilite la lecture.

d) Quantitative continue.

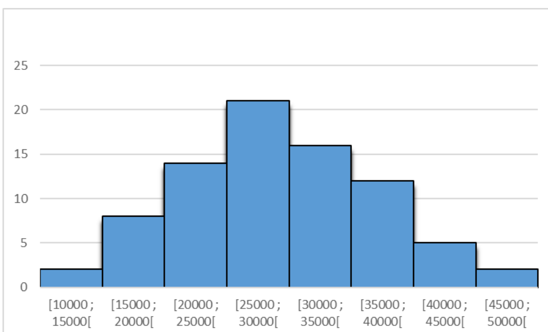
e) Par exemple un histogramme.

Exercice 10.12.

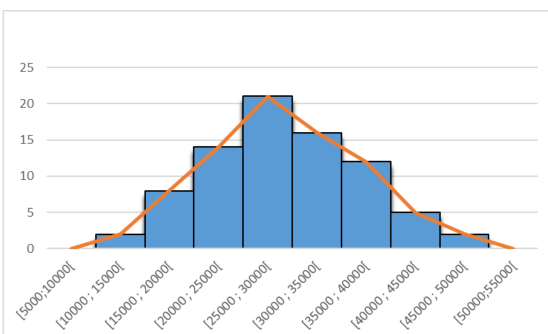
a)

Classes (salaires)	x_i	n_i	f_i
$[10000; 15000[$	12500	2	$2,5\%$
$[15000; 20000[$	17500	8	10%
$[20000; 25000[$	22500	14	$17,5\%$
$[25000; 30000[$	27500	21	$26,25\%$
$[30000; 35000[$	32500	16	20%
$[35000; 40000[$	37500	12	15%
$[40000; 45000[$	42500	5	$6,25\%$
$[45000; 50000[$	47500	2	$2,5\%$
Total		80	100

b)



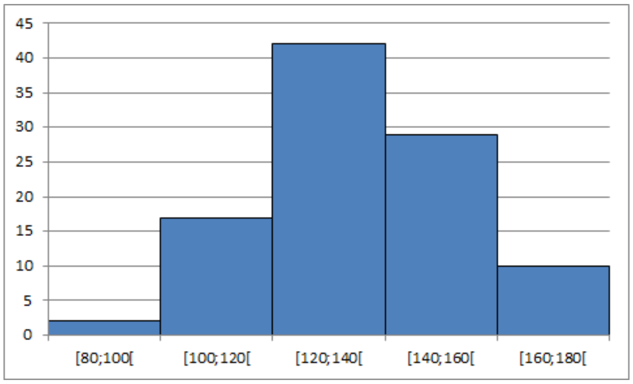
c)

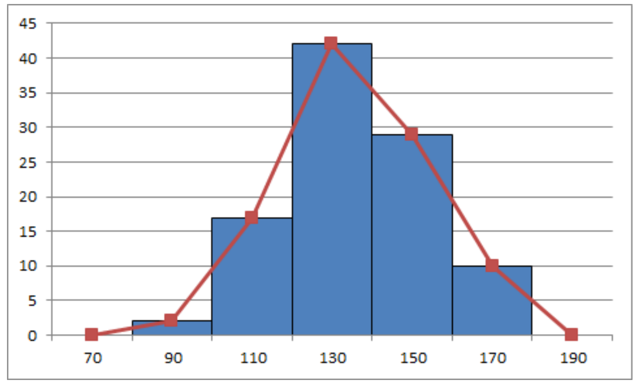


Exercice 10.13.

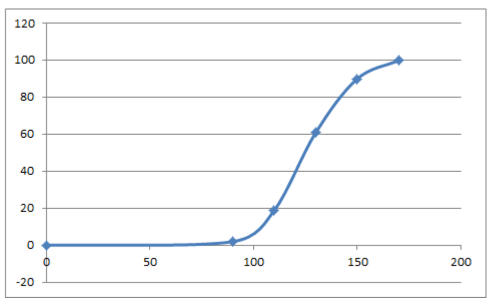
a) Quantitative continue.

b)





c)



d) 162.

e) 141.

Exercice 10.14. $\overline{x} \cong 6,46$.

Exercice 10.15. $\overline{x} = 40,4$, $\overline{x} = 92$.

Exercice 10.16. $M_o \in [4;6[$.

Exercice 10.17. Les classes modales sont $[20;22[$, $[24;26[$ et $[26;28[$.

Exercice 10.18. Cela signifie qu'il y a autant de cadres français qui, à l'embauche, gagnent plus de 38'000 euros que de cadres qui gagnent moins de 38'000 euros.

Exercice 10.19. $M_e = 2,5$.

Exercice 10.20.

a) 6.

b) Elle a pu repondre n'importe quel nombre inférieur ou égal à 8.

Exercice 10.21.

a)

Poids	Effectifs	Effectifs cumulés
1	7	7
2	4	11
3	4	15
4	5	20

b) $\overline{x} = 2,35$ kg.

c) $M_o = 1$ kg.

d) $M_e = 2$ kg.

Exercice 10.22. 4, 8 et 9.

Exercice 10.23. $\overline{x} \cong 13,51$, $M_e = 14$ et $M_o = 14$.

Exercice 10.24. $M_e \in [4;6[$.

Exercice 10.25. $\overline{x} = 185,8$ et $M_e \in [180;200[$.

Exercice 10.26.

a) Echantillon A : $\overline{x} = 5,2$ et $M_e = 3$
Echantillon B : $\overline{x} = 5,7$ et $M_e = 5,5$.

b) La moyenne arithmétique.

Exercice 10.27. La médiane, éventuellement le mode, mais surtout pas la moyenne.

Exercice 10.28. Au premier examen, je suis en dessus de la moyenne. Au deuxième, j'ai fait mieux que la moitié des étudiants. Au troisième, j'ai obtenu plus que le nombre de points le plus fréquent de 7.

Exercice 10.29. $Q_1 = 8$, $Q_2 = 9$ et $Q_3 = 10$.

Exercice 10.30. a)

Taille en cm	n_i	F_i
$[150;160[$	40	0,2
$[160;170[$	60	0,5
$[170;180[$	20	0,6
$[180;190[$	30	0,75
$[190;200[$	50	1

b) $M_o \in [160;170[$, $M_e = 170$, $Q_1 \in [160;170[$ et $Q_3 = 190$.

Exercice 10.31. $V = 95,\overline{8}$ et $\sigma \cong 9,79$.

Exercice 10.32.

a) $V \cong 486,6$ et $\sigma \cong 22,059$.

b) $V = 2416$ et $\sigma \cong 49,15$.

Exercice 10.33.

Exercice 10.34. $b_0 = 2$, $b_{10} = 5$, $Q_1 = 2$, $M_e = 4$, $Q_3 = 5$, $\overline{x} = 3,6$, $\overline{x^2} = 14,4$, $\sigma_x^2 = 1,44$ et $\sigma_x = 1,2$.

Exercice 10.35. $\overline{x} = 46,887$ km/h et $\sigma \cong 7,056$ km/h.

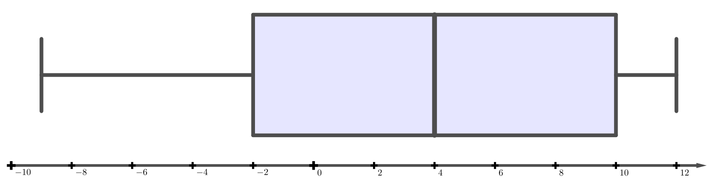
Exercice 10.36.

1. $\overline{x} \cong 23,214$ mm, $\sigma \cong 1,097$ mm.
2. $\overline{x} \cong 13,923$ mm, $\sigma \cong 3,198$ mm.

Exercice 10.37. $\overline{x} = 65,4$ g, $M_e = 64$ g, $\sigma \cong 7,645$ g et $C \cong 11,69\%$.

Exercice 10.38. $\sigma \cong 38,99$ et $C \cong 54,6\%$.

Exercice 10.39.



Exercice 10.40.

a) $E = 11$, $Q_1 = 4$, $M_e = 6$, $Q_3 = 10$ et $I_Q = 6$.

b) Entre 2 et 13 mails.

c) Plus de 6 mails.

d) 50%.

Exercice 10.41.

a) Pour X : $Q_1 = 3$, $Q_2 = 6$ et $Q_3 = 12$.
Pour Y : $Q_1 = 3$, $Q_2 = 12$ et $Q_3 = 16$.

b) La ville Y.

c) Non.

d) Non.

Exercice 10.42.

$A \leftrightarrow 4$.

$B \leftrightarrow 3$.

$C \leftrightarrow 1$.

$D \leftrightarrow 2$.

Exercice 10.43.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & U \\ 2 & \leftrightarrow & Z \\ 3 & \leftrightarrow & Y \\ 4 & \leftrightarrow & X \end{array}$$

10.8 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

10.1 ☐ Connaître de vocabulaire des statistiques.
10.2 ☐ Donner le type d'une variable statistique.
10.3 ☐ Calculer les fréquences d'un ensemble de données.
10.4 ☐ Construire le diagramme en secteurs d'un ensemble de données.
10.5 ☐ Construire le diagramme en bâtons d'un ensemble de données.
10.6 ☐ Construire l'histogramme d'un ensemble de données.
10.7 ☐ Construire le polygone des effectifs d'un ensemble de données.
10.8 ☐ Calculer les effectifs cumulés croissants et décroissants d'un ensemble de données.
10.9 ☐ Construire le polygone des effectifs cumulés d'un ensemble de données.
10.10 ☐ Calculer la moyenne arithmétique d'un ensemble de données (cas discret et continu).
10.11 ☐ Calculer le mode d'un ensemble de données (cas discret).
10.12 ☐ Donner la classe modale d'un ensemble de données (cas continu).
10.13 ☐ Calculer la médiane d'un ensemble de données (cas discret).
10.14 ☐ Donner la classe à laquelle appartient la médiane d'un ensemble de données (cas continu).
10.15 ☐ Calculer l'étendue d'une série (cas discret et continu).
10.16 ☐ Calculer les quartiles d'un ensemble de données (cas discret).
10.17 ☐ Donner les classes auquels appartiennent la quartiles d'un ensemble de données (cas continu).
10.18 ☐ Calculer l'intervalle interquartile d'un ensemble de données (cas discret).
10.19 ☐ Calculer l'intervalle semi-interquartile d'un ensemble de données (cas discret).
10.20 ☐ Calculer la variance et l'écart-type d'un ensemble de données (cas discret et continu).
10.21 ☐ Calculer le coefficient de variation d'un ensemble de données (cas discret et continu).
10.22 ☐ Construire la boîte à moustaches d'un ensemble de données (cas discret).

Bibliographie

[1] CRM, *Notions élémentaires*, Editions du Tricorne, 2005.

[2] Yadolah Dodge, *Premiers pas en statistiques*, Springer, 1999.

[3] Jean-Pierre Favre, *Mathématiques pour la maturité professionnelle*, Editions Digilex, 2016.

[4] Peter Frommenwiler, Kurt Studer, *Algèbre et analyse de données*, Cornelsen, 2014.

[5] Olivier Grandjean, *Supports de cours*, CIFOM-ET.

[6] Sylvie Guillod, *Supports de cours*, CIFOM-ET.

[7] Caroline Jacot, *Supports de cours*, CPLN-ET.

[8] Jean-Philippe Javet, *Supports de cours*, Gymnase de Morges.

[9] Juan Perreira, *Supports de cours*, CIFOM-ET.

[10] Stephane Perret, *Supports de cours*, Lycée Cantonal de Porrentruy.

[11] Violaine Sabah, *Supports de cours*, Lycée Jean Piaget

[12] E. W. Swokowski, J. A. Cole, *Algèbre*, Editions LEP, 2006.

[13] Maxime Zuber, *Supports de cours*, Gymnase Français de Bienne.

Index