Fonctions du deuxième degré

Karim Saïd

Ecole Technique, Novembre 2019

1 Définition

Définition. On appelle *fonction du deuxième degré* la fonction f définie par

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. Son graphe est une *parabole*. c est l'ordonnée à l'origine.

Exemple.

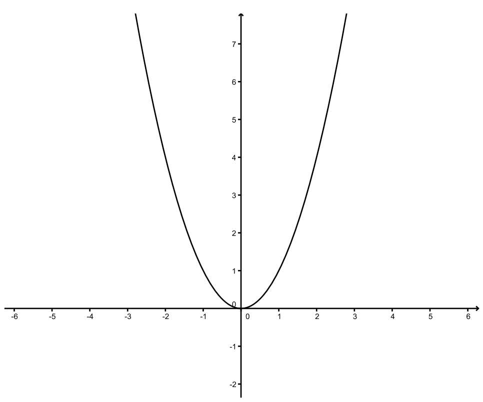


FIGURE 1 – Graphe de $f(x) = x^2$.

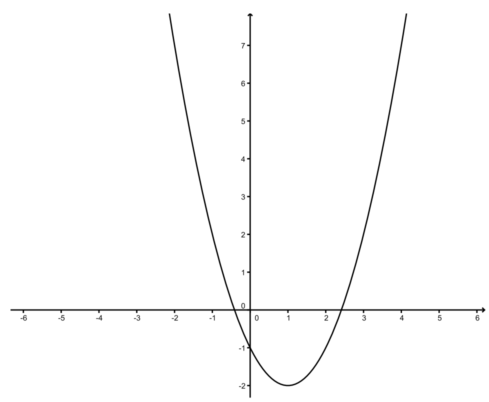


FIGURE 2 – Graphe de $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

Exercice 1. Représenter graphiquement les fonctions f ci-dessous.

a) $f(x) = x^2 - 4x$

b) $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$

c) $f(x) = -x^2 + 4$

d) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - x + 4$

2 Propriétés de la parabole

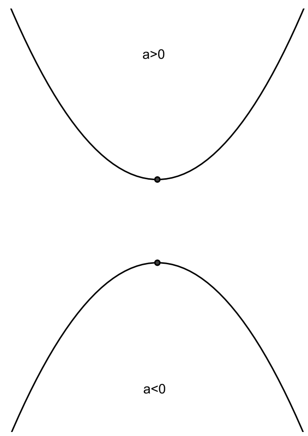
Soit la *parabole* $\mathcal{P}$ d'équation

$$\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Orientation

Son *sommet* est un *minimum* (situé en bas) si $a > 0$ et un *maximum* (situé en haut) si $a < 0$.



Exemple. On constate que la fonction $g(x) = -x^2$ s'obtient en multipliant $f(x)$ par -1. Ainsi, le graphe de g peut s'obtenir par symétrie d'axe O_x de f.

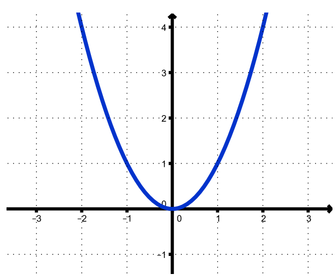


FIGURE 3 – Graphe de $f(x) = x^2$.

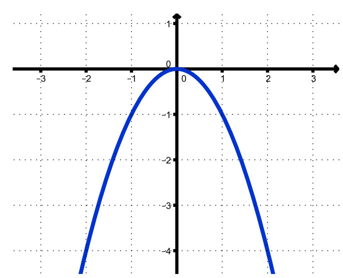


FIGURE 4 – Graphe de $f(x) = -x^2$.

Courbure

Sa courbure est d'autant plus forte (la courbe est d'autant plus resserrée) que $|a|$ est grand.

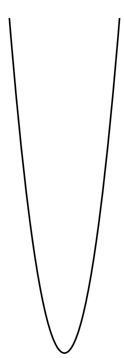


FIGURE 5 – $|a|$ grand.

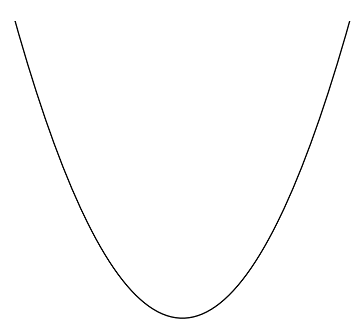


FIGURE 6 – $|a|$ petit.

Exemple. On remarque que les ordonnées des points de g s'obtiennent en multipliant celles de f par 2 et qu'on obtient celles de h en multipliant celles de f par $\frac{1}{2}$ (ce qui revient à les diviser par 2).

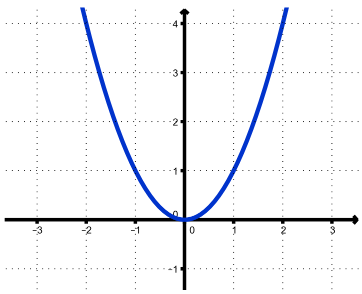


FIGURE 7 – Graphe de $f(x) = x^2$.

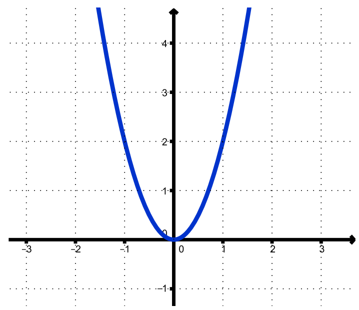


FIGURE 8 – Graphe de $g(x) = 2x^2$.

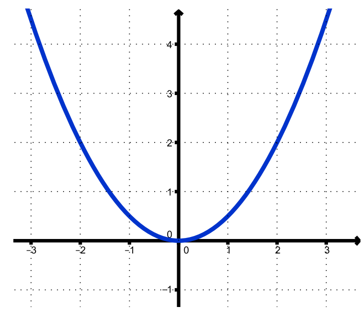
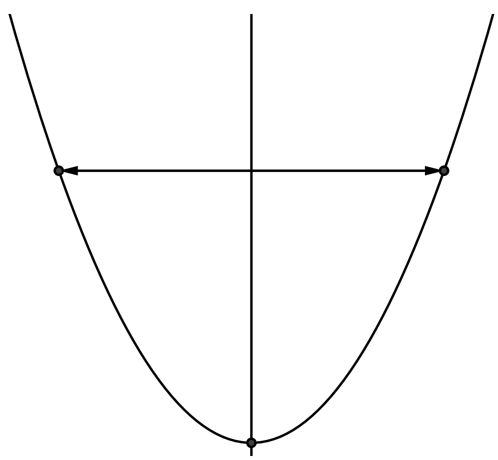


FIGURE 9 – Graphe de $h(x) = \dfrac{1}{2}x^2$.

Symétrie

La courbe est symétrique par rapport à un axe vertical passant par son sommet.

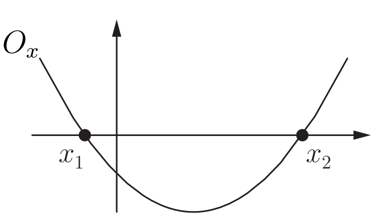


Intersection avec l'axe horizontal

Soit $\Delta \overset{\text{déf}}{=} b^2 - 4ac$.

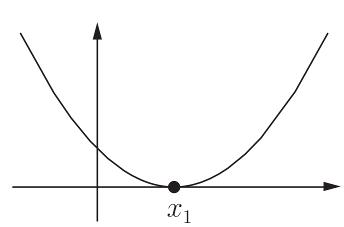
Si $\Delta > 0\,,$ la courbe a deux points d'intersection avec l'axe O_x dont les abscisses sont données par

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}.$$

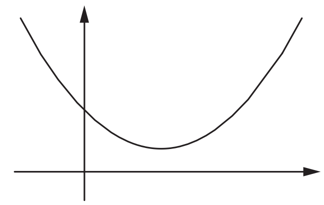


Si $\Delta = 0\,,$ la courbe est tangente à O_x en un point d'abscisse

$$x_1 = \frac{-b}{2a}.$$



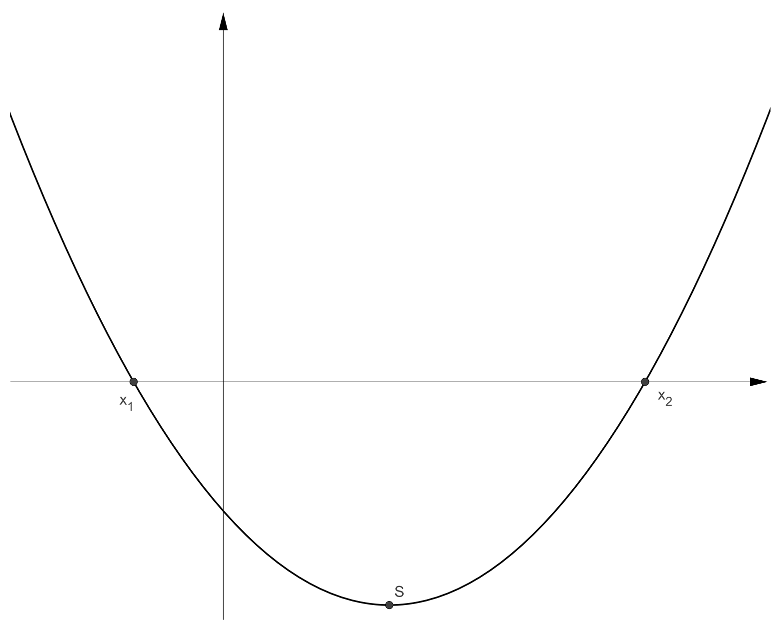
Si $\Delta < 0\,,\quad$ il n'y a pas d'intersection.



Sommet

Théorème. *Le sommet S de la parabole $\mathcal{P}$: $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ a pour coordonnées*

$$\boxed{S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).}$$



Preuve. Le sommet de la parabole est situé au milieu des éventuels zéros x_1 et x_2.

Son abscisse x_S est donnée par

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{x_1 + x_2}{2} &= \frac{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} \\ &= -\frac{2b}{2a} \cdot \frac{1}{2} &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

L'abscisse x_S étant alors connue, on en tire l'ordonnée y_S par

$$y_S = f\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

$\square$

Exercice 2. Déterminer et l'ensemble des zéros et les coordonnées du sommet de chacune des fonctions f ci-dessous.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $f(x) = -x^2 + 5x$

c) $f(x) = 3x^2 + 3$

d) $f(x) = -2x^2 + 5x - 4$

Exercice 3. Déterminer les coordonnées du (ou des) éventuel(s) point(s) d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ avec la droite d dans chacun des cas suivants.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \mathcal{P} : y = x^2 + 7x - 5 & \text{et} & d : y = 4x + 5; \\ \text{b)} & \mathcal{P} : y = 4x^2 - x + 2 & \text{et} & d : y = 3x + 1; \\ \text{c)} & \mathcal{P} : y = 7x^2 + 3x + 2 & \text{et} & d : y = x - 2. \end{array}$$

Exercice 4. Déterminer les coordonnées du (ou des) éventuel(s) point(s) d'intersection des paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ suivantes.

$$\mathcal{P}_1 : y = 4x^2 + 20x - 9;$$

$$\mathcal{P}_2 : y = -2x^2 + 3x + 5.$$

Exercice 5. Même question pour les paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ suivantes.

$$\mathcal{P}_1 : y = x^2 + 5x - 2;$$

$$\mathcal{P}_2 : y = 2x^2 + 11x - 9.$$

Exercice 6. Déterminer l'expression fonctionnelle de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont le graphe passe par les points $A(1; 9)$, $B(2; 6)$ et $C(5; 3)$.

Exercice 7. Soit la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $\mathcal{P} : y = 2x^2 - 5$ et la droite d d'équation $d : y = -2x + h$. Déterminer la (ou les) valeur(s) de h pour que $\mathcal{P}$ et d soient tangentes.

Exercice 8. Soient les paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations

$$\mathcal{P}_1 : y = x^2 + x - 6;$$

$$\mathcal{P}_2 : y = -x^2 + x + 2.$$

a) les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}_1$ avec l'axe O_x ;

b) les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}_2$ avec l'axe O_x ;

c) les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}_1$ avec l'axe O_y ;

d) les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}_2$ avec l'axe O_y ;

e) les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}_1$;

f) les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}_2$;

g) les coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$;

h) déterminer la (ou les) valeurs de p pour que la droite d d'équation $d : y = px - 7$ soit tangente à $\mathcal{P}_1$.

Exercice 9. Pour quelle(s) valeur(s) de c les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$ sont-elles tangentes ?

Exercice 10. Le risque de développer des problèmes de santé peut être évalué par la fonction

$$R(i) = 0,002i^2 - 0,08i + 0,85$$

où i désigne l'indice de masse corporelle. Cet indice s'exprime au moyen de la relation suivante :

$$i = \frac{\text{Masse en kg}}{(\text{Taille en mètres})^2}.$$

Une personne mesure 1,75 m et pèse 80 kg.

a) Quel est son indice de masse corporelle ?

b) Quel est son poids idéal ?

3 Autres formes

3.1 Forme standard

Théorème. *Toute fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ du deuxième degré peut s'écrire sous la forme*

$$\boxed{f(x) = a(x-h)^2 + k}$$

où $h, k \in \mathbb{R}$.

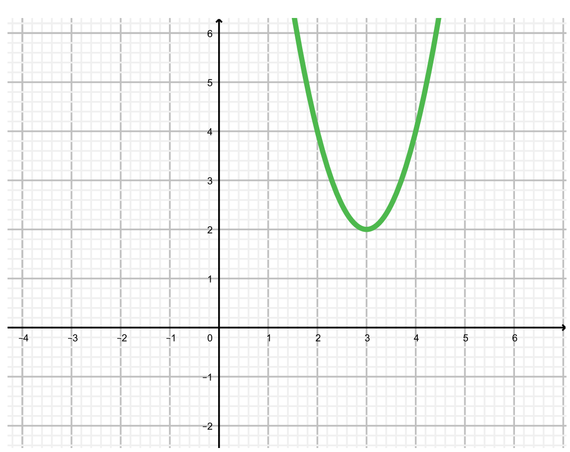
Cette écriture porte le nom de forme standard.

Nous allons donner l'idée de la preuve du théorème ci-dessus au travers de l'exemple suivant.

Exemple. Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 20$.

On a

$$\begin{array}{rclcl} f(x) & = & 2x^2 - 12x + 20 & = & 2(x^2 - 6x) + 20 \\ & = & 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 20 & = & 2((x^2 - 6x + 9) - 9) + 20) \\ & = & 2((x-3)^2 - 9) + 20 & = & 2(x-3)^2 - 18 + 20 \\ & = & 2(x-3)^2 + 2. & & \end{array}$$



Théorème. *Le sommet S de $f(x) = a(x-h)^2 + k$ est le point $S(h;k)$.*

Preuve. On a affaire à deux cas :

— Si $a > 0$, on a

$$f(x) = \underbrace{a}_{>0}\overbrace{\underbrace{(x-h)^2}_{\geq 0}}^{\geq 0} + k \geq a(h-h)^2 + k = f(h) = k.$$

Ainsi, $f(x)$ est minimale lorsque $x = h$. Dans ce cas, $y = f(h) = k$. Le minimum de f a donc pour coordonnées $S(h;k)$.

— Si $a < 0$, on a

$$f(x) = \underbrace{a}_{<0}\overbrace{\underbrace{(x-h)^2}_{\geq 0}}^{\leq 0} + k \leq a(h-h)^2 + k = f(h) = k.$$

Ainsi, $f(x)$ est maximale lorsque $x = h$. Dans ce cas, $y = f(h) = k$. Le maximum de f a donc pour coordonnées $S(h;k)$.

$\square$

Exemple. Considérons les graphes suivants :

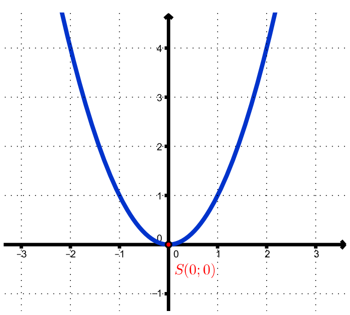


FIGURE 10 – $f(x) = x^2$.

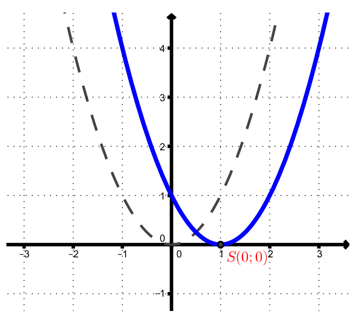


FIGURE 11 – $f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

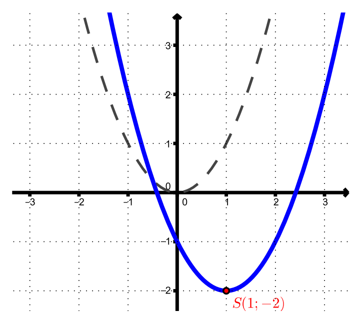


FIGURE 12 – $f(x) = (x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1$.

Exemple. Considérons les graphes suivants :

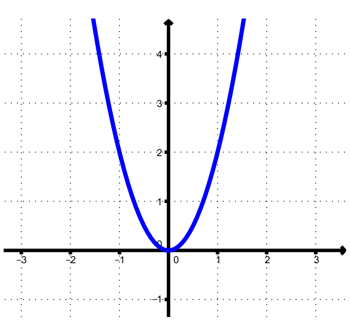


FIGURE 13 – $f(x) = 2x^2$.

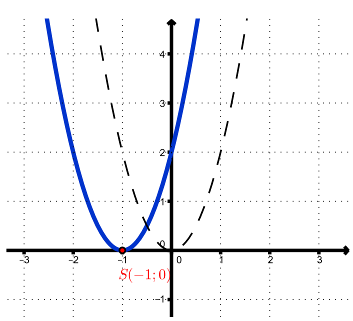


FIGURE 14 – $f(x) = 2(x+1)^2 = 2x^2 + 4x + 2$.

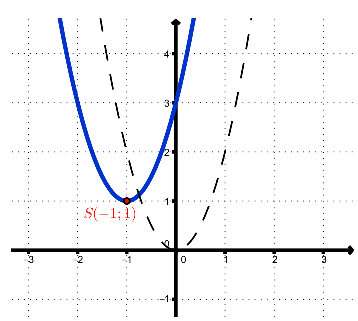


FIGURE 15 – $f(x) = 2(x+1)^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 3$.

Exemple. Considérons les graphes suivants :

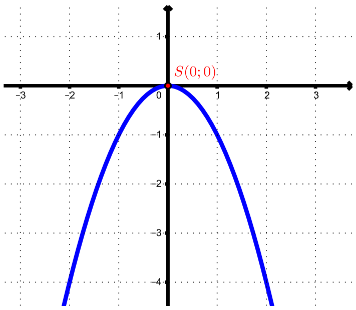


FIGURE 16 – $f(x) = -x^2$.

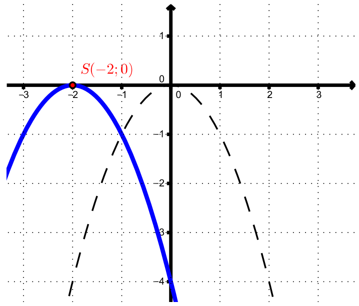


FIGURE 17 – $f(x) = -(x+2)^2 = -x^2 - 4x - 4$.

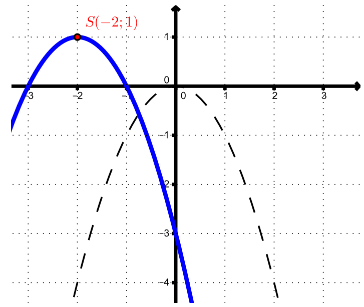


FIGURE 18 – $f(x) = -(x+2)^2+2 = -x^2-4x-3$.

Exercice 11. Représenter graphiquement les fonctions ci-dessous, en partant du graphe de $y = x^2$, puis en décrivant les différentes transformations géométriques.

a) $y = (x+2)^2$
b) $y = (x-3)^2$
c) $y = -(x+2)^2$
d) $y = -\frac{3}{2}(x-2)^2$
e) $y = -\frac{1}{2}(x+4)^2 + 4$

Exercice 12. Exprimer sous forme générale les fonctions suivantes.

a) $f(x) = (x-4)^2$
b) $f(x) = (x+2)^2 - 5$
c) $f(x) = (x-3)^2 - (x+3)^2$
d) $f(x) = (x-a)(x+b)$
e) $f(x) = -\dfrac{1}{3}(x-3)(2x+1)$
f) $f(x) = 8\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{3}$

Exercice 13. Pour quelles valeurs de a le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + ax + 5$ est tangent à la droite $y = 4$? Donner alors les coordonnées du (des) point(s) de contact.

3.2 Forme factorisée

Exemple. Soit $f(x) = x^2 + 2x - 8$.

Il est possible de factoriser l'expression fonctionnelle de f. On a donc

$$f(x) = (x-2)(x+4).$$

Les zéros de f sont donc $x_1 = -4$ et $x_2 = 2$.

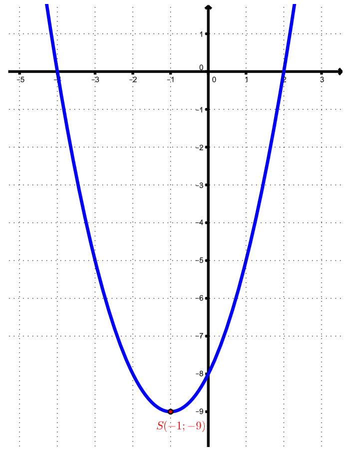


FIGURE 19 – Graphe de $f(x) = x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$.

L'abscisse x_S du sommet de f est alors donnée par

$$x_S = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Il s'ensuit alors la valeur de l'ordonnée

$$y_S = (-1-2)(-1+4) = -9.$$

D'où les coordonnées du sommet $S(-1; -9)$.

Exemple. Soit $f(x) = 2x^2 + 8x - 10$.

Il est possible de factoriser l'expression fonctionnelle de f. On a donc

$$f(x) = 2(x^2 + 4x - 5) = 2(x+5)(x-1).$$

Les zéros de f sont donc $x_1 = -5$ et $x_2 = 1$.

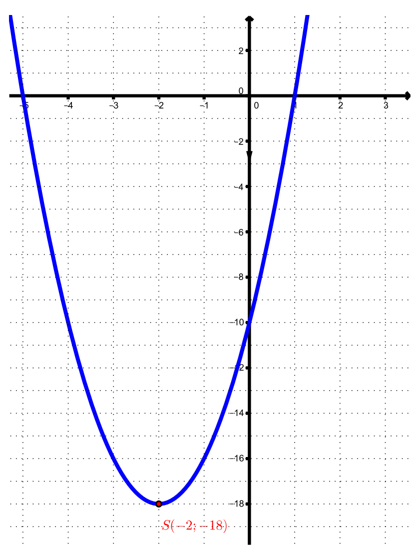


FIGURE 20 – Graphe de $f(x) = x^2 + 8x - 10 = 2(x+5)(x-1)$.

L'abscisse x_S du sommet de f est alors donnée par

$$x_S = \frac{1-5}{2} = -2.$$

Il s'ensuit la valeur de l'ordonnée $y_S = 2(-2+5)(-2-1) = -18$.

D'où les coordonnées du sommet $S(-2; -18)$.

Des exemples ci-dessus, on en déduit le théorème suivant :

Théorème. *L'expression fonctionnelle de la fonction du deuxième degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, peut également d'écrire sous la forme*

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

où x_1 et x_2 désignent les éventuels zéros de f. Cette écriture porte le nom de forme factorisée.

Exercice 14. Déterminer les coordonnées du sommet de chacune des paraboles suivantes.

a) $f_1 : y = 5(x-4)(x+3)$

b) $f_2 : y = (x-1)(x+1)$

c) $f_3 : y = -2(x+3)(x-4)$

d) $f_4 : y = 4(x-2)^2$

e) $f_5 : y = 3x(x+5)$

f) $f_6 : y = -0,5x(x-10)$

3.3 Passage d'une forme à l'autre

Le tableau ci-dessous récapitule les propriétés des trois formes :

Forme	Expression fonctionnelle	Sommet	Intersections avec O_x
Polynômiale	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$S(x_S; y_S)$ avec $x_S = -\frac{b}{2a}$	En résolvant $f(x) = 0$
Standard	$f(x) = a(x-h)^2 + k$	$S(h; k)$	En résolvant $f(x) = 0$
Factorisée	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$S(x_S; y_S)$ avec $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$I_1(x_1; 0)$ et $I_2(x_2; 0)$

Exemple.

1. Soit $f(x) = -3x^2 - 6x + 24$.

   Pour écrire f sous forme factorisée, il surrit de factoriser f au maximum :

$$\begin{aligned} f(x) &= -3(x^2 + 2x - 8) \\ &= -3(x+4)(x-2) \end{aligned}$$

   Les coordonnées des intersections de f avec O_x sont les points $I_1(-4; 0)$ et $I_2(2; 0)$.

   Le sommet de f, qui est un minimum a pour abscisse

$$x_S = \frac{-4+2}{2} = -1$$

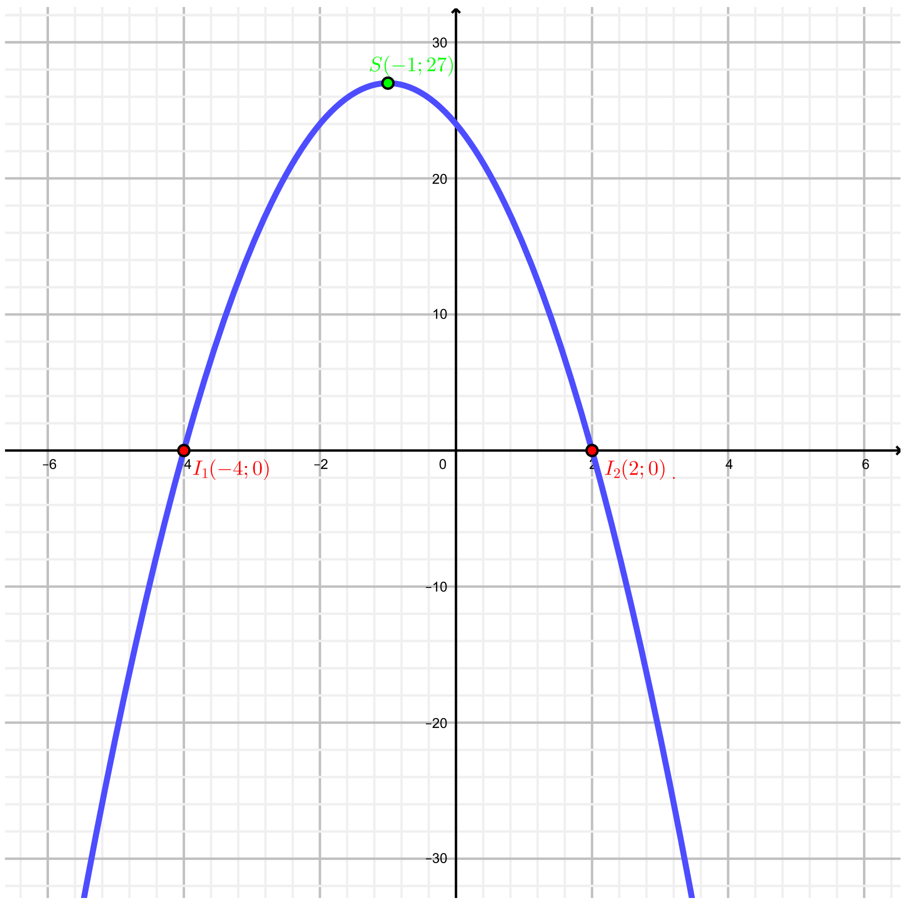
   et pour ordonnées

$$y_S = f(-1) = -3(-1+4)(-1-2) = 27.$$

Ainsi, le sommet a pour coordonnées $S(-1; 27)$. La forme standard de f s'écrit donc

$$f(x) = -3(x+1)^2 + 27.$$

Il eût été possible de trouver la forme standard de f en procédant comme dans l'exemple précédent.



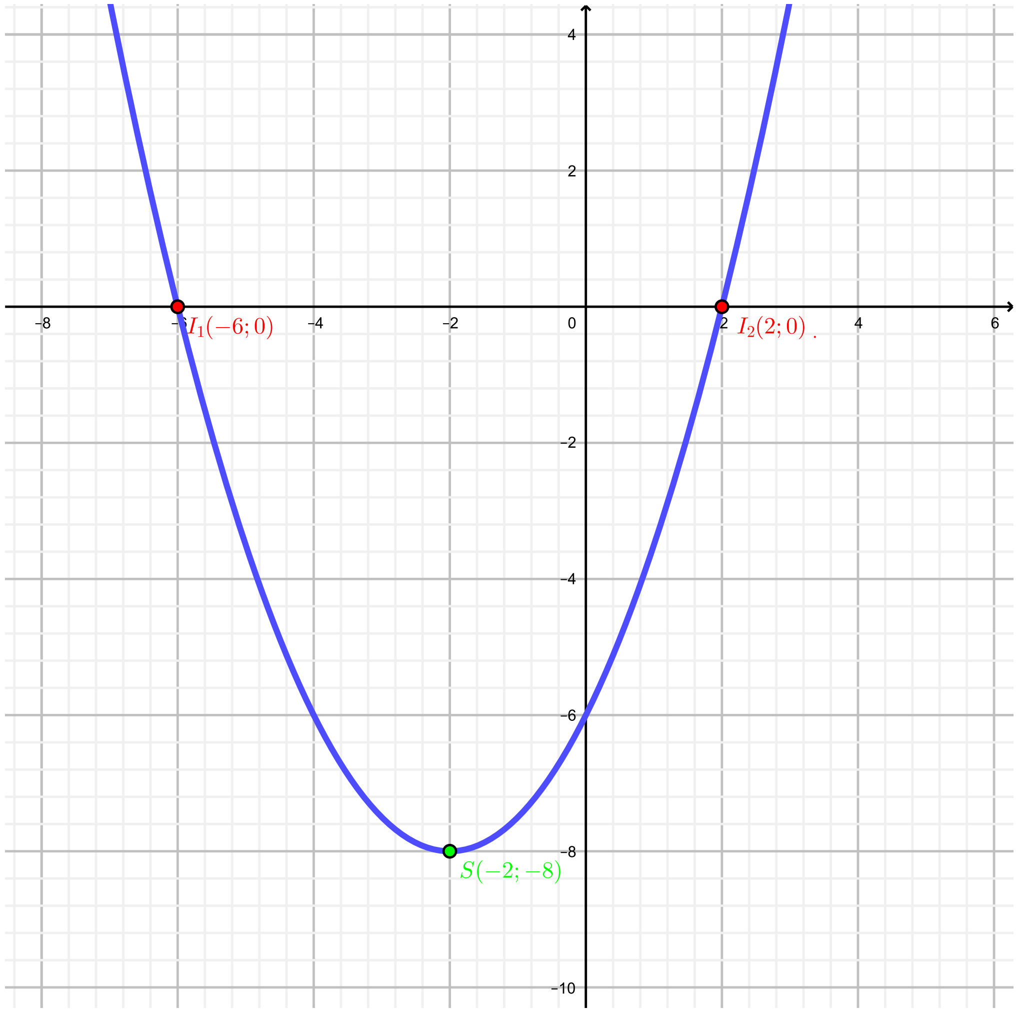
2. Soit $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 8$.
   Pour retrouver la forme poynômiale, il suffit de développer :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 8 = \frac{1}{2}(x^2+4x+4) - 8 = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 - 8 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6.$$

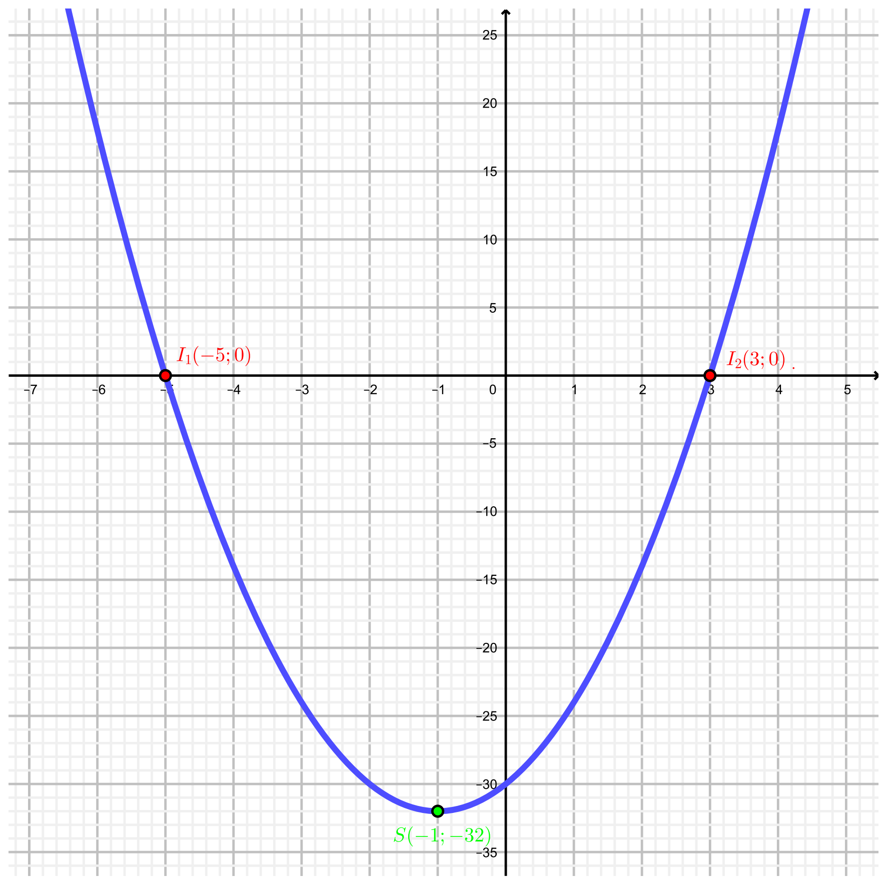
La forme factorisée s'obtient alors en factorisant f au maximum :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6. = \frac{1}{2}(x^2 + 4x - 12) = \frac{1}{2}(x+6)(x-2).$$

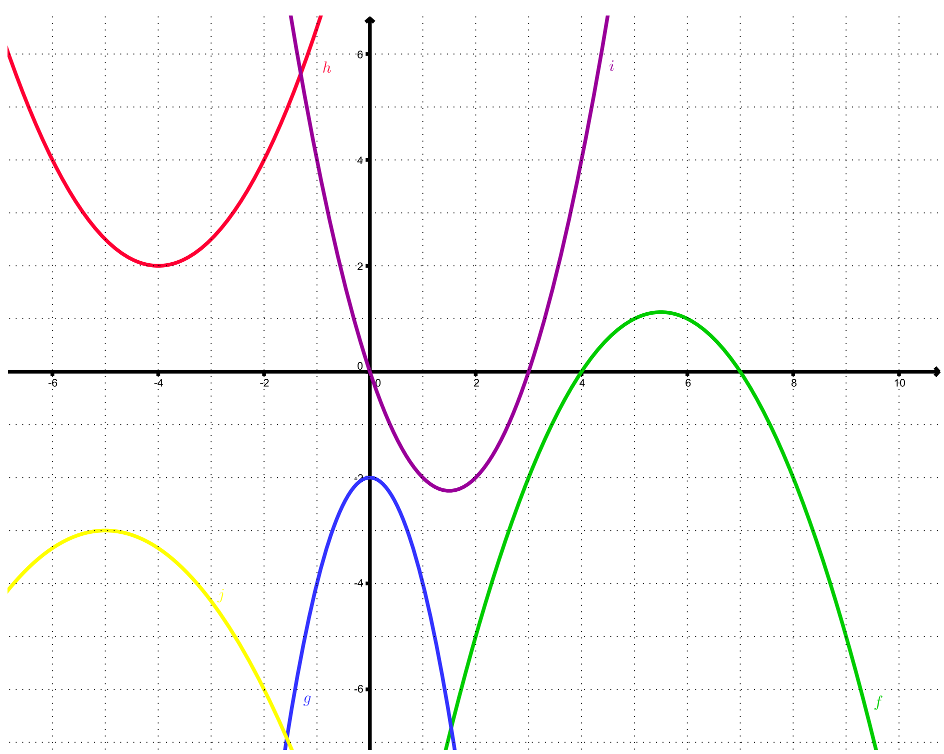
Ainsi, f intersecte l'axe O_x aux points $I_1(-6; 0)$ et $I_2(2; 0)$.
Son sommet, qui est un minumum, est le point $S(-2; -8)$.



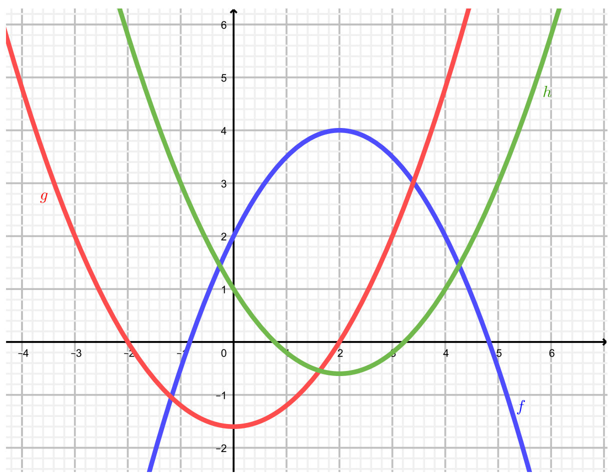
3. Soit $f(x) = 2(x-3)(x+5)$.
   f intersecte l'axe O_x aux points $I_1(3;0)$ et $I_2(-5;0)$.
   Le sommet de f a pour abscisse
$$x_S = \frac{3-5}{2} = -1$$
   et pour ordonnée
$$y_S = f(-1) = 2(-1-3)(-1+5) = -32.$$
   D'où la forme standard
$$f(x) = 2(x+1)^2 - 32.$$
   Enfin, la forme canonique s'obtient en développant :
$$f(x) = 2(x^2+2x-15) = 2x^2+4x-30.$$



Exercice 15. Trouver l'expression fonctionnelle des 5 fonctions dont les graphes sont les paraboles ci-dessous.



Exercice 16. Déterminer l'équation générale de chacune des paraboles ci-dessous.



Exercice 17. Compléter le tableau suivant.

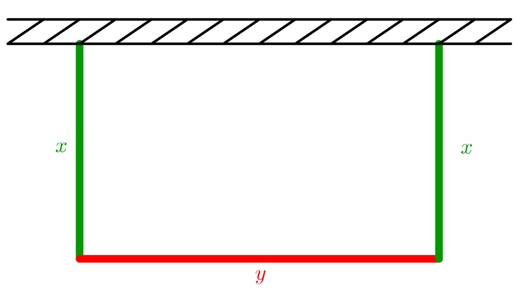
Forme polynômiale	Forme standard	Forme factorisée
		$f(x) = (x-2)(x+6)$
	$f(x) = -(x+3)^2 + 1$	
$f(x) = 2x^2 + 12x - 14$		
		$f(x) = \frac{1}{2}(x+6)(x-10)$
$f(x) = -3x^2 - 18x - 31$		
		$f(x) = -3(x-5)(x+3)$
$f(x) = 4x^2 - 24x + 36$		
	$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$	
	$f(x) = -2(x+1)^2$	

Exercice 18. Déterminer l'expression fonctionnelle de la fonction f de sommet $S(-6;-3)$ passant par le point $A(5;-1)$

3.4 Optimisation du deuxième degré

Exemple. On dispose de barrières d'une longueur totale de 100 mètres pour construire un enclos rectangulaire le long d'un mur rectiligne. Quelles dimensions faut-il donner à cet enclos pour que le pré qu'il délimite ait une aire maximale ?

Posons x et y comme indiqué dans la figure ci-dessous.



On remarque que x et y ne peuvent pas prendre n'importes quelles valeurs. Par exemple, si $x = 40$ m, alors y est contraint de valoir 20 m vu que l'on dispose de 100 m de barrières au total.

On en tire ainsi la contrainte suivante :

Contrainte :

$$\begin{aligned} 2x + y &= 100 \\ y &= 100 - 2x. \end{aligned}$$

L'aire de l'enclos est donnée par

$$A = x \cdot y = x \cdot (100 - 2x) = 100x - 2x^2.$$

Ainsi, la fonction $A(x) = -2x^2 + 100$ détermine l'aire de l'enclos en fonction de la valeur du côté x.

L'abscisse de son sommet, qui sera un maximum vu que $a = -2 < 0$ est donnée par

$$x_S = \frac{-100}{2 \cdot (-2)} = 25.$$

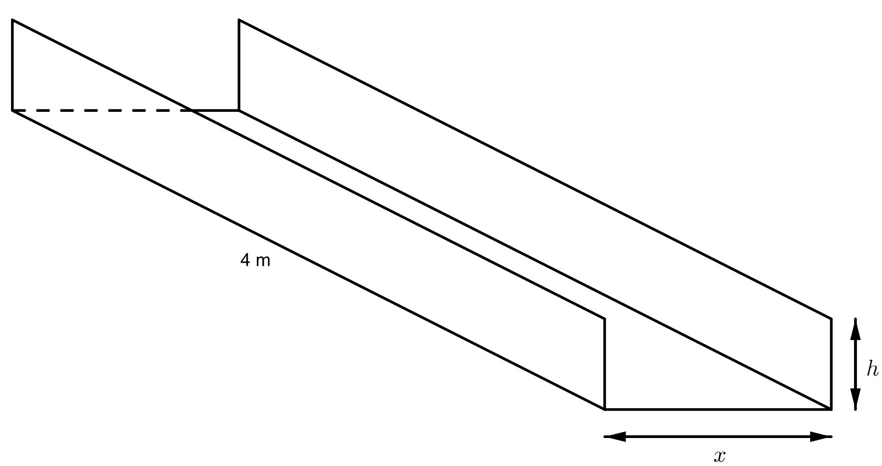
Ainsi, l'enclos cherché aura pour dimensions $x = 25$ m et $y = 50$ m. Son aire est donnée par

$$A(25) = 25 \cdot 50 = 1250 \text{ m}^2.$$

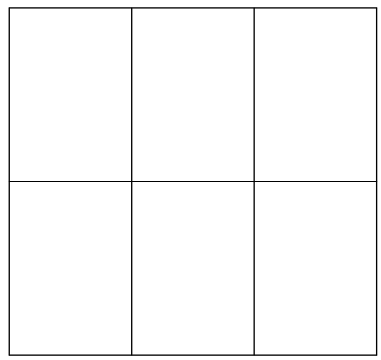
Exercice 19. On dispose de barrières d'une longueur totale de 100 mètres pour construire un enclos rectangulaire le long d'un mur rectiligne. Quelles dimensions faut-il donner à cet enclos pour que le pré qu'il délimite ait une aire maximale ?

Exercice 20. Parmi tous les rectangles de périmètre 10, quel est celui dont l'aire est la plus grande ? Quelle est cette aire ?

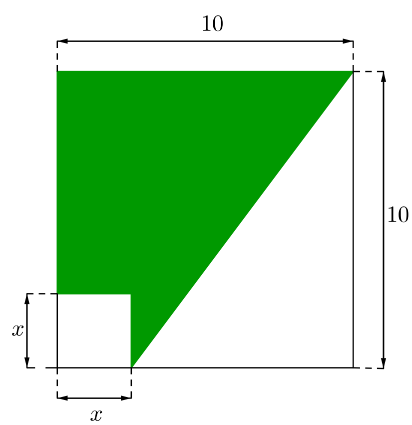
Exercice 21. Une plaque de métal rectangulaire longue de 4 mètres et large de 40 centimètres est pliée de sorte à former une gouttière en forme de parallélépipède rectangle. Quelles dimensions faut-il donner à cette gouttière pour qu'elle ait un volume maximal ?



Exercice 22. On dispose de 288 mètres de clôture grillagée pour construire 6 enclos identiques pour un zoo selon le plan ci-dessous. Quelles dimensions faut-il donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol ?

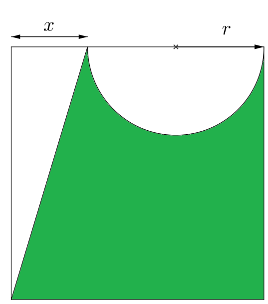


Exercice 23. Pour quelle valeur de x, l'aire colorée ci-dessous est-elle maximale ?



Exercice 24. Une société immobilière possède 180 studios qui sont tous occupés quand le loyer est de 300 Francs par mois. La société estime qu'à chaque augmentation de loyer de 10 Francs, 5 studios sont libérés. Quel devrait être le loyer pour que la société ait un revenu mensuel maximal ?

Exercice 25. La figure colorée ci-dessous est inscrite dans un carré de côté 10. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de la figure colorée est maximale.

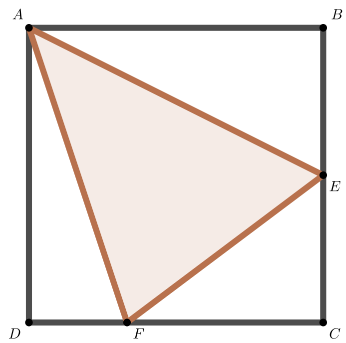


Exercice 26. Le triangle AEF grisé est inscrit dans un carré $ABCD$ de 8 cm de côté selon la contrainte suivante :

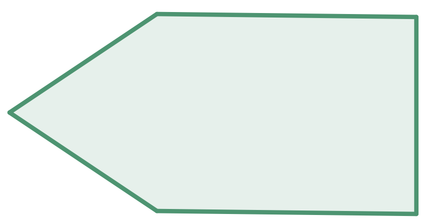
Les points E et F sont mobiles sur les côtés et respectent la contrainte $CE = 2DF$.

a) Déterminer la position du point F sur DC pour laquelle l'aire du triangle AEF sera minumale ;

b) Déterminer alors la proportion du carré qui sera grisée.



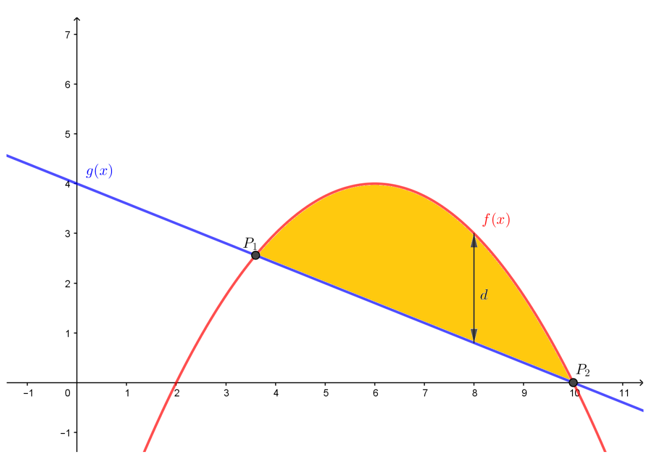
Exercice 27. On considère le terrain, représenté ci-dessous, formé d'un rectangle et d'un triangle équilatéral On précise encore que son périmètre est de 224 mètres. Déterminer l'aire maximale du terrain.



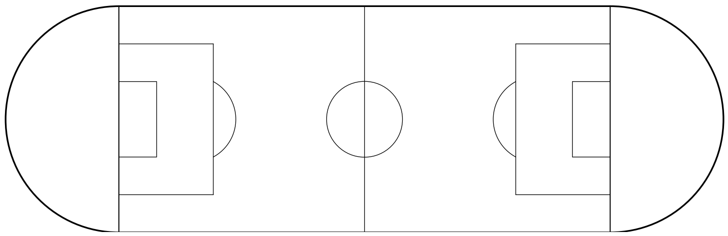
Exercice 28. On donne l'équation d'une parabole $f(x) = -0,25x^2+3x-5$ ainsi que l'équation d'une droite $g(x) = -0,4x + 4$.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection P_1 et P_2 entre la droite et la parabole.

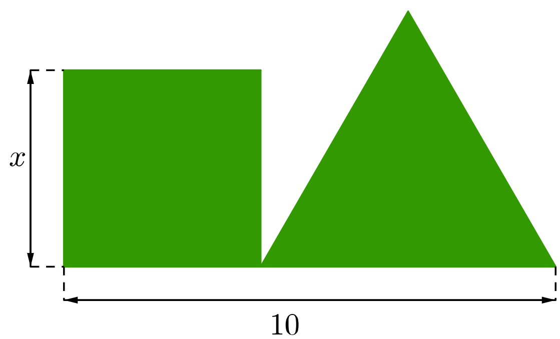
b) Déterminer la distance maximale d entre la parabole et la droite dans la région hachurée.



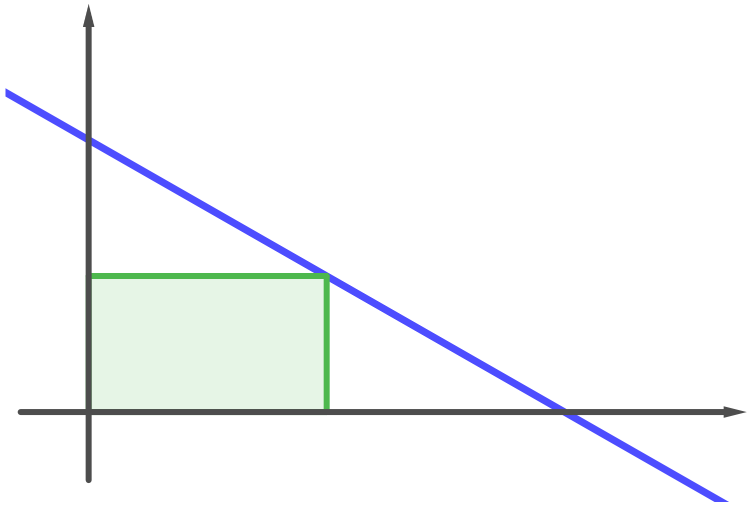
Exercice 29. Une piste d'athlétisme de 400 m est formée par deux demi-disques en ses extrêmités, à l'image de ce qui apparaît ci-dessous. Déterminer la longeur et la largeur du terrain de football d'aire maximale.



Exercice 30. Déterminer la valeur de x pour que la somme des aires du carré et du triangle soit minimale.

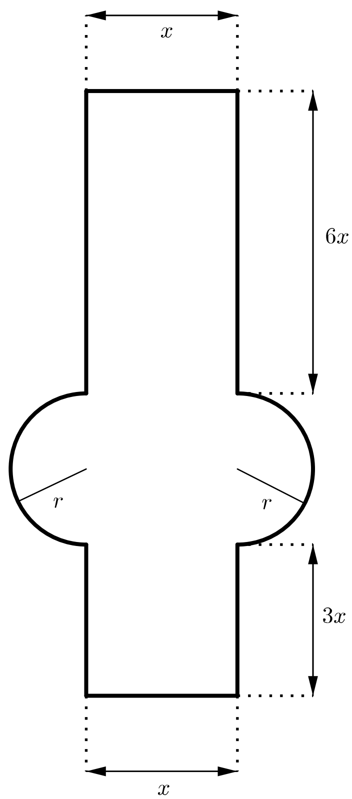


Exercice 31. Soit le rectangle grisé ci-dessous, limité par l'axe O_x, l'axe O_y et la droite d'équation $y = -0,5x + 3$. Quelles sont les dimensions de ce rectangle sachant que son aire est maximale ?



Exercice 32. La figure ci-dessous représente une meurtrière de château fort, formée d'un rectangle bordé de deux demi-disques identiques. Le périmètre délimité par la meurtrière est de quatre mètres.

Déterminer la valeur de x et de r pour que l'ouverture soit minimale.

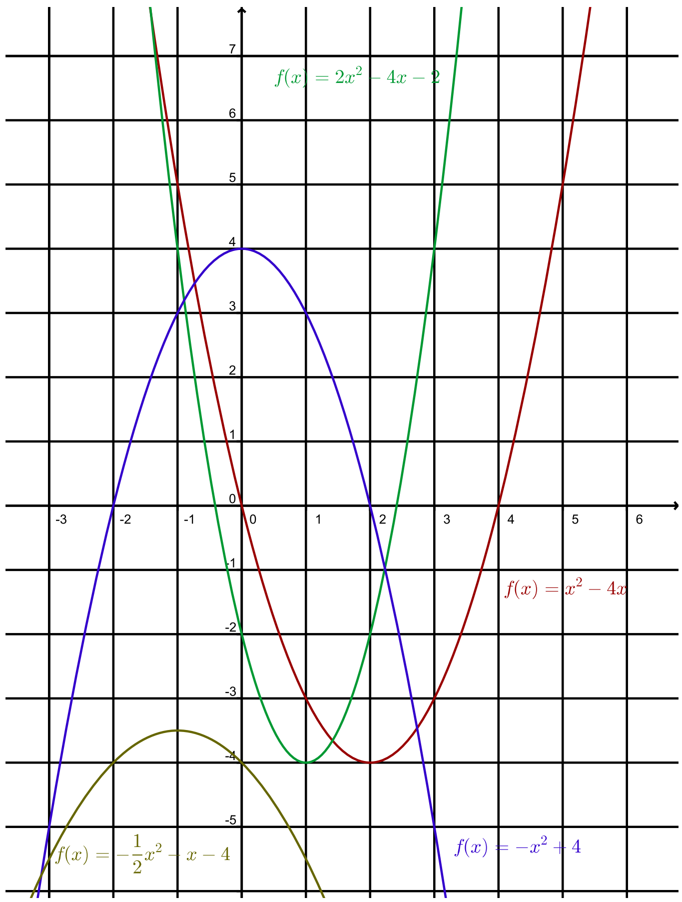


Exercice 33. Une ficelle de 1 mètre de longueur est coupée en deux morceaux. Avec l'un d'eux, on forme un cercle et avec l'autre un carré. Quelle doit être la grandeur de chaque morceau de ficelle pour que la somme des aires des deux surfaces soit minimale ?

Exercice 34. Pour clôturer la parcelle ci-dessous, il faut débourser 50 Frs le mètre pour les côtés rectilignes et 75 Frs le mètre pour les parties circulaires. Sachant que le budget à disposition pour clôturer cette parcelle est de 5'000 Frs, quelles sont les dimensions qui rendent maximale sa surface ?

Solutions

Exercice 1.



Exercice 2.

a) $Z_f = \{-1; 3\}, S(1; -4)$

b) $Z_f = \{0; 5\}, S\left(\frac{5}{2}; \frac{25}{4}\right)$

c) $Z_f = \phi, S(0; 3)$

d) $Z_f = \phi, S\left(\frac{5}{4}; -\frac{7}{8}\right)$

Exercice 3.

a) $I_1(2; 13)$ et $I_2(-5; -15)$;

b) $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$;

c) pas d'intersection.

Exercice 4. $I_1\left(-\dfrac{7}{2}; -30\right)$ et $I_2\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{55}{9}\right)$.

Exercice 5. $I_1(-7; 12)$ et $I_2(1; 4)$.

Exercice 6. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{9}{2}x + 13.$

Exercice 7. $h = -\dfrac{11}{2}.$

Exercice 8.

a) $(-3; 0)$ et $(2; 0)$;

b) $(2; 0)$ et $(-1; 0)$;

c) $(0; -6)$;

d) $(0; 2)$;

e) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{23}{4}\right)$;

f) $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$;

g) $(-2; -4)$ et $(2; 0)$;

h) $p = -1$, $p = 3$.

Exercice 9. $c = -\dfrac{51}{10}$

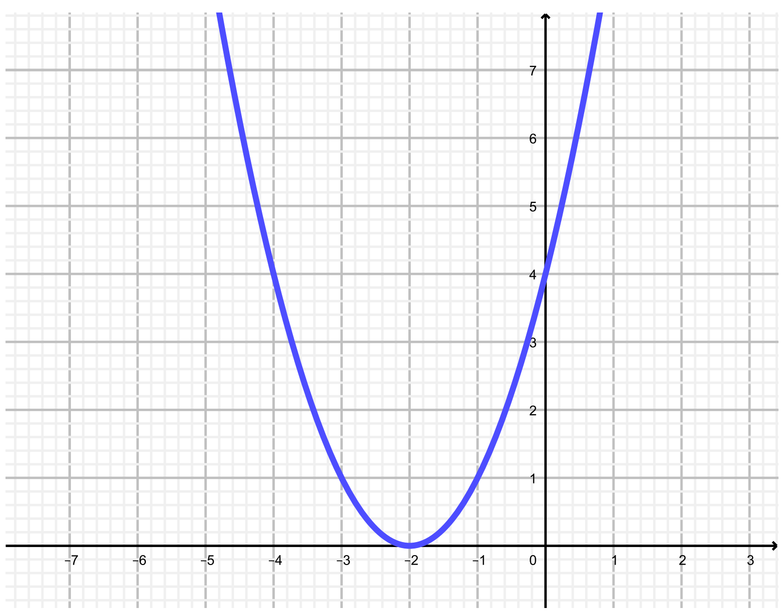
Exercice 10.

a) Environ 26.12 ;

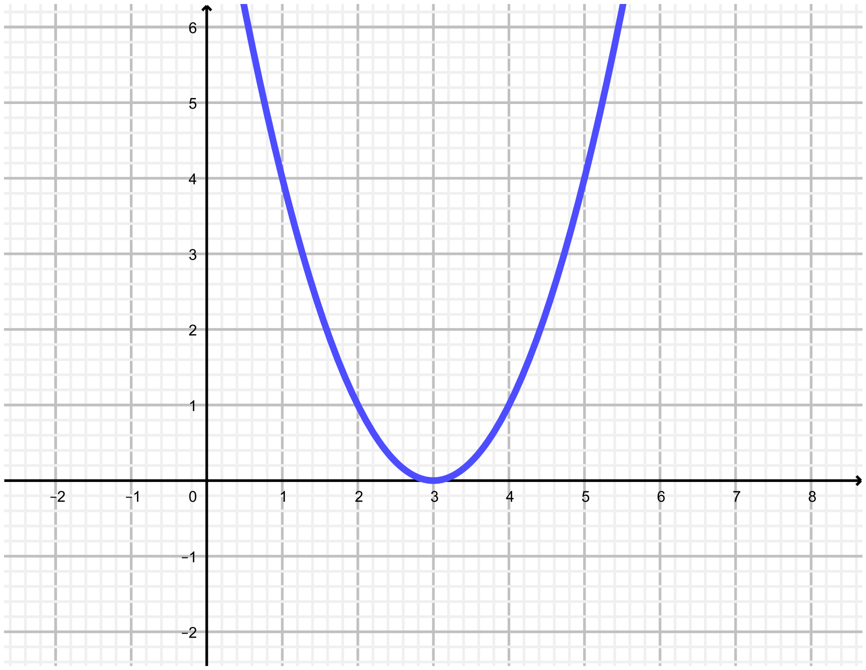
b) 61, 25 kg.

Exercice 11.

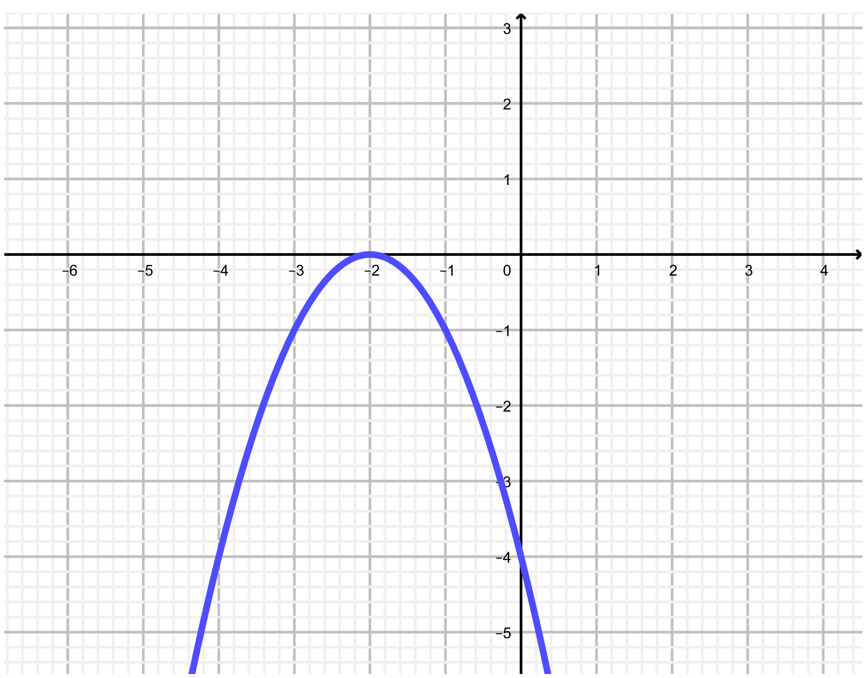
a)



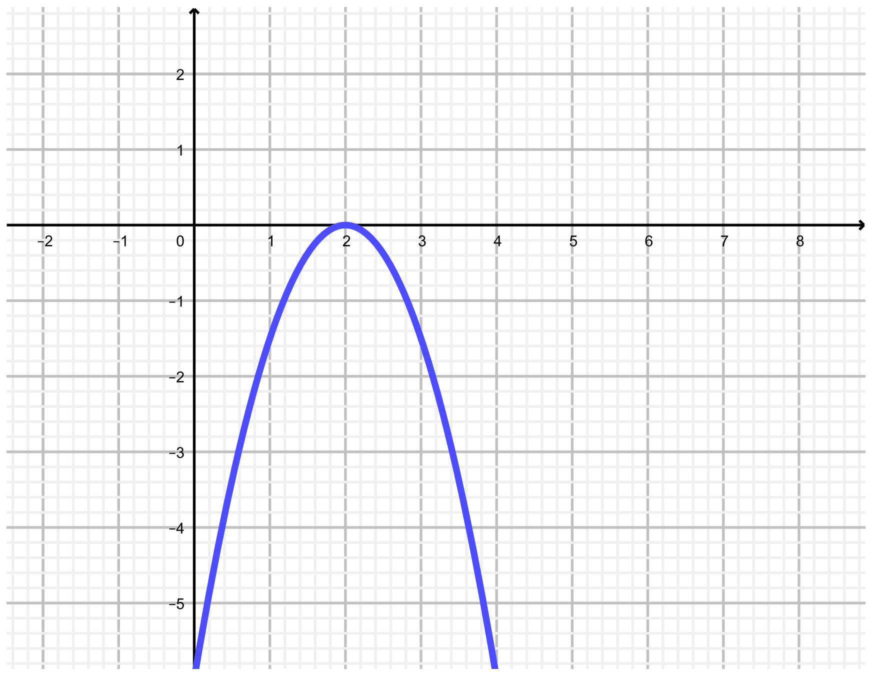
b)



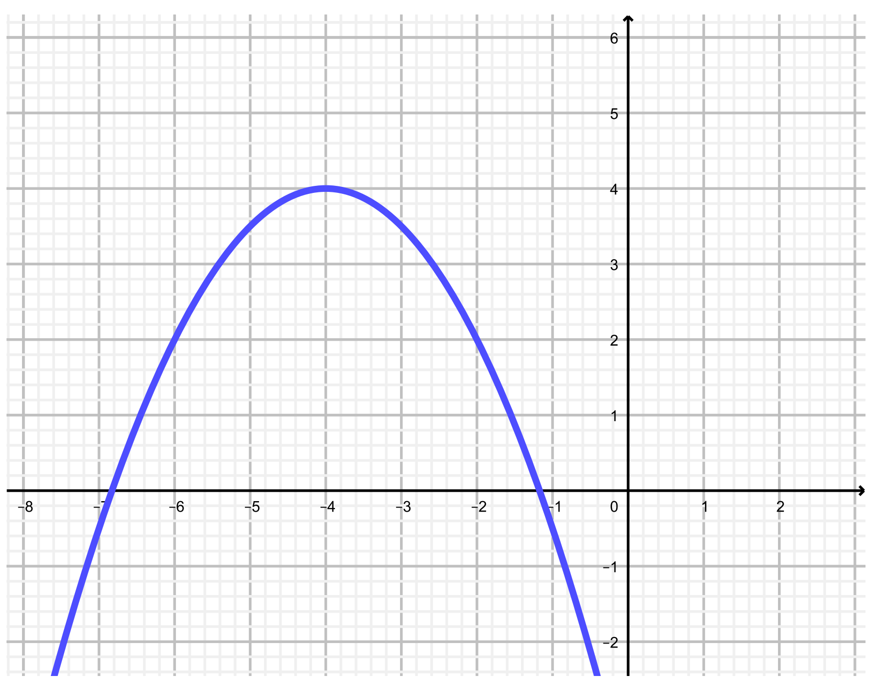
c)



d)



e)



Exercice 12.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 16$

b) $f(x) = x^2 + 4x - 1$

c) $f(x) = -12x$

d) $f(x) = x^2 + (b-a) - ab$

e) $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}x + 1$

f) $f(x) = 8x^2 - 4x + \dfrac{1}{6}$

Exercice 13.

Pour $a_1 = 6$, Point de contact : $I(-3;-4)$

Pour $a_2 = -6$, Point de contact : $I(3;-4)$

Exercice 14.

a) $S\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{245}{4}\right)$

b) $S\,(0;-1)$

c) $S\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{49}{2}\right)$

d) $S\,(2;0)$

e) $S\left(-\dfrac{5}{2}; -\dfrac{75}{4}\right)$

f) $S\left(5; \dfrac{25}{2}\right)$

Exercice 15.

- $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{11}{2}x - 14.$
- $g(x) = -2x^2 - 2.$
- $h(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 4x + 10.$
- $i(x) = x^2 - 3x.$
- $j(x) = -\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{10}{3}x - \dfrac{34}{3}.$

Exercice 16. $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 4$, $g(x) = \dfrac{2}{5}(x+2)(x-2)$ et $h(x) = \dfrac{2}{5}x^2 - \dfrac{8}{5}x + 1.$

Exercice 17.

Forme polynômiale	Forme standard	Forme factorisée
$f(x) = x^2 + 4x - 12$	$f(x) = (x+2)^2 - 16$	$f(x) = (x-2)(x+6)$
$f(x) = -x^2 - 6x - 8$	$f(x) = -(x+3)^2 + 1$	$f(x) = -(x+4)(x+2)$
$f(x) = 2x^2 + 12x - 14$	$f(x) = 2(x+3)^2 - 32$	$f(x) = 2(x-1)(x+7)$
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 30$	$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 32$	$f(x) = \frac{1}{2}(x+6)(x-10)$
$f(x) = -3x^2 - 18x - 31$	$f(x) = -3(x+3)^2 - 4$	N'existe pas
$f(x) = -3x^2 + 6x + 45$	$f(x) = -3(x-1)^2 + 48$	$f(x) = -3(x-5)(x+3)$
$f(x) = 4x^2 - 24x + 36$	$f(x) = 4(x-3)^2$	$f(x) = 4(x-3)^2$
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 7$	$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$	N'existe pas
$f(x) = -2x^2 - 4x - 2$	$f(x) = -2(x+1)^2$	$f(x) = -2(x+1)^2$

Exercice 18. $f(x) = -3 + \frac{2}{121}(x+6)^2$

Exercice 19. 25 m sur 50 m.

Exercice 20. un carré de côté $2,5$ et d'aire $6,25$.

Exercice 21. $x = 20$ cm et $h = 10$ cm.

Exercice 22. 16 m sur 18 m.

Exercice 23. $x = 2,5$.

Exercice 24. 330 francs par mois.

Exercice 25. $x = \dfrac{10\pi - 20}{\pi} \cong 3,63$.

Exercice 26.

a) Le point F doit être situé à 2 cm à droite de D.

b) La proportion grisée est de $\frac{28}{64} = 43,75\%$.

Exercice 27. L'aire maximale est d'environ $2939,12$ m^2.

Exercice 28.

a) (3,6 ;2,56) et (10 ;0).

b) $2,56$.

Exercice 29. 100 m sur $\dfrac{200}{\pi} \cong 63,66$ m.

Exercice 30. $x = \dfrac{10\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} \cong 3,02$.

Exercice 31. 3 de largeur et $1,5$ de longueur.

Exercice 32. $r \cong 10,74$ cm et $x \cong 16,62$ cm.

Exercice 33. le morceau destiné à confectionner le carré mesurera $\dfrac{4}{4+\pi} \cong 0,56$ m et celui qui serrvira à former le cercle sera long de $\dfrac{2\pi}{2\pi+8} \cong 0,44$ m.

Exercice 34. $x = \dfrac{50}{\pi}$ et $y = 12,5$