Equations et fonctions trigonométriques

Karim Saïd

Ecole Technique, Année scolaire 2020-2021

1 Equations trigonométriques

Exercice 1. Résoudre les équations trigonométriques ci-dessous.

a) $\sin x = \frac{3}{5}$ d) $\text{tg } x = \frac{77}{11}$

b) $\sin(2x) = \frac{3}{5}$ e) $\cos x = \frac{7}{10}$

c) $2 \text{ tg } x = \frac{6}{5}$ f) $\cos x = \pi$

Exercice 2. Résoudre, en radians, les équations trigonométriques ci-dessous.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ d) $\sin x = \pi$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sin(2x) = 1$

c) $2 \sin x = 1$ f) $\text{tg } x = 1$

Exercice 3. Résoudre les équations trigonométriques ci-dessous.

a) $\cos(x + 90°) = \frac{1}{2}$ f) $\text{tg } x = -3$

b) $\cos(3x + 45°) = 0,966$ g) $6 \sin(180° - x) = 3$

c) $\cos\left(\frac{1}{3}x - 30°\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ h) $3 \text{ tg}(60° - 2x) = -3$

d) $\sin(180° - 2x) = -\frac{1}{2}$ i) $2 \sin(2x - 20°) = -\sqrt{2}$

e) $4 \sin(180° - 3x) = -1$ j) $5 \text{ ctg}(90° - 3x) = 2$

Exercice 4. Résoudre les équations trigonométriques ci-dessous.

a) $\sin(2x) = \sin(3x)$ g) $5 \sin(5x + 10°) - 5 \sin(2x + 30°) = 0$

b) $\sin(x + 30°) - \sin(60° - 2x) = 0$ h) $3 \cos(3x - 20°) - 3 \cos(2x + 30°) = 0$

c) $\cos(x + 45°) = \cos(3x)$ i) $\text{tg}(2x + 45°) - \text{tg}(5x) = 0$

d) $\sin(2x + 30°) = \sin\left(\frac{1}{3}x - 45°\right)$ j) $2 \text{ tg}(3x - 60°) - 2 \text{ tg}(x + 10°) = 0$

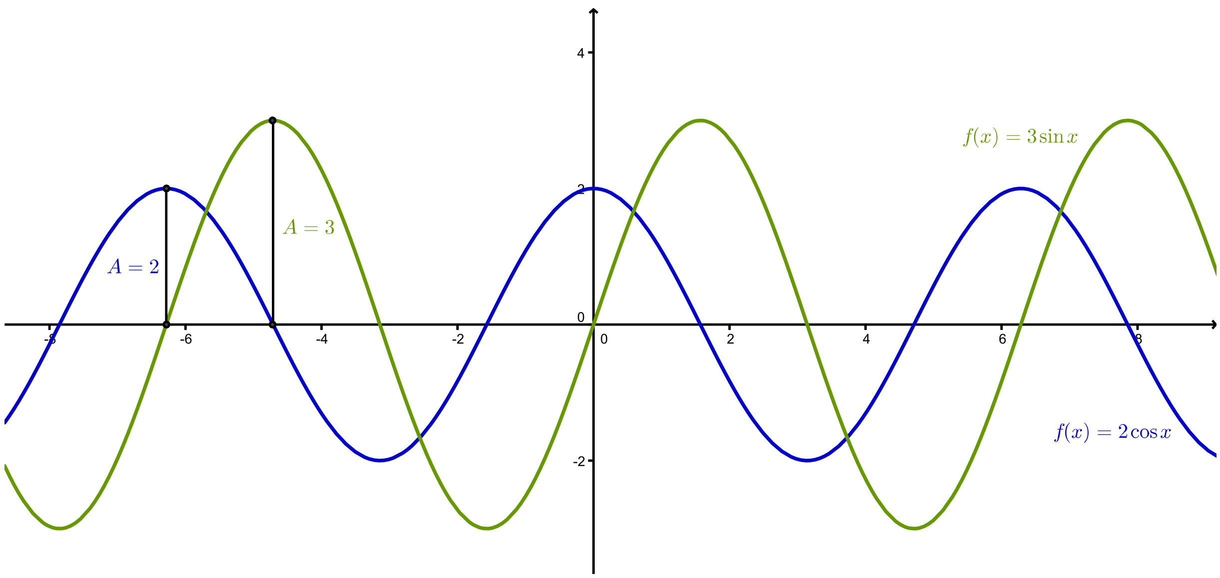
e) $3 \sin(2x - 30°) = 3 \sin(3x - 20°)$ k) $2 \cos\left(\frac{1}{2}x + 30°\right) - \sin\left(\frac{1}{2}x + 30°\right) = 0$

f) $3 \cos(2x) - 3 \cos(x + 30°) = 0$ l) $2 \text{ tg}(3x) - 2 \text{ tg}(5x + 30°) = 0$

2 Fonctions trigonométriques

Définition. Si $f(x) = a \sin x$ (ou $f(x) = a \cos x$), avec $a \neq 0$, *l'amplitude* de f est définie comme étant la valeur de la plus grande ordonnée de f.

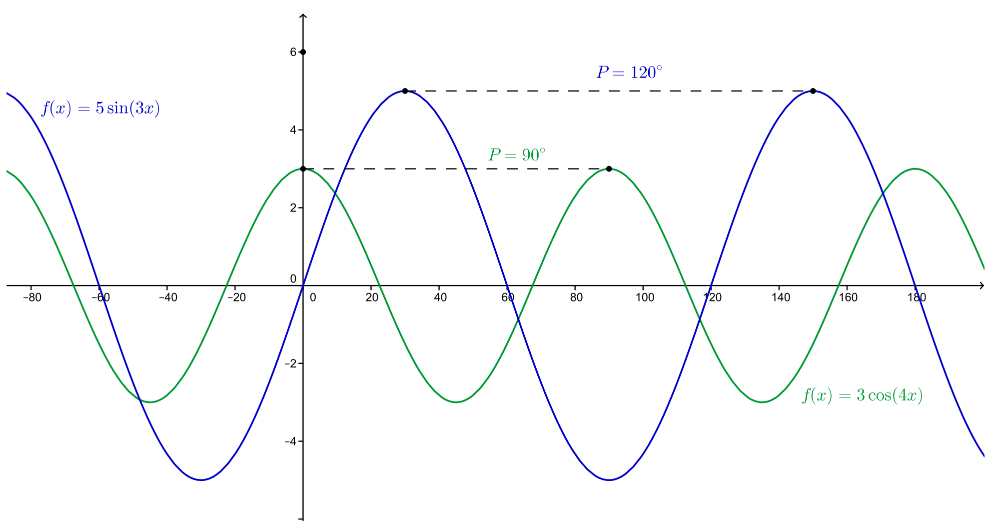
Théorème. *L'amplitude du graphe de $f(x) = a \sin x$ (ou $f(x) = a \cos x$) est $|a|$;*



Définition.

1. On dit d'une fonction qu'elle est *périodique* s'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = f(x + k)$.
2. On appelle *période* d'une fonction le plus petit nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(x + k)$.

Théorème. *Si f est une fonction de la forme $f(x) = a \sin(bx)$ (ou $f(x) = a \cos(bx)$), avec $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, sa période vaut $\dfrac{360°}{|b|}$ ($\dfrac{2\pi}{|b|}$ lorsque l'on travaille en radians) ;*



Preuve. On a affaire à deux cas :

- Si $b > 0$, nous avons exactement un cycle pour bx croissant entre $0°$ et $360°$ ou, de manière équivalente pour x croissant entre $0°$ et $\dfrac{360°}{b}$.
- Si $b < 0$, c'est-à-dire $-b > 0$, nous avons exactement un cycle pour x croissant entre $0°$ et $\dfrac{360°}{-b}$.

Ainsi, la période de f est de $\dfrac{360°}{|b|}$. □

Soit à présent la fonction f définie par $f(x) = a\sin(bx + c)$ (ou $f(x) = a\cos(bx + c)$). D'après les théorèmes ci-dessus, l'amplitude de f est $|a|$ et sa période est de $\dfrac{360°}{|b|}$. Cela signifie qu'un seul cycle apparaît si $bx + c$ croît de $0°$ à $360°$.
Il est donc possible de trouver un intervalle contenant exactement une période en résolvant les équations

$$bx + c = 0 \text{ et } bx + c = 360°.$$

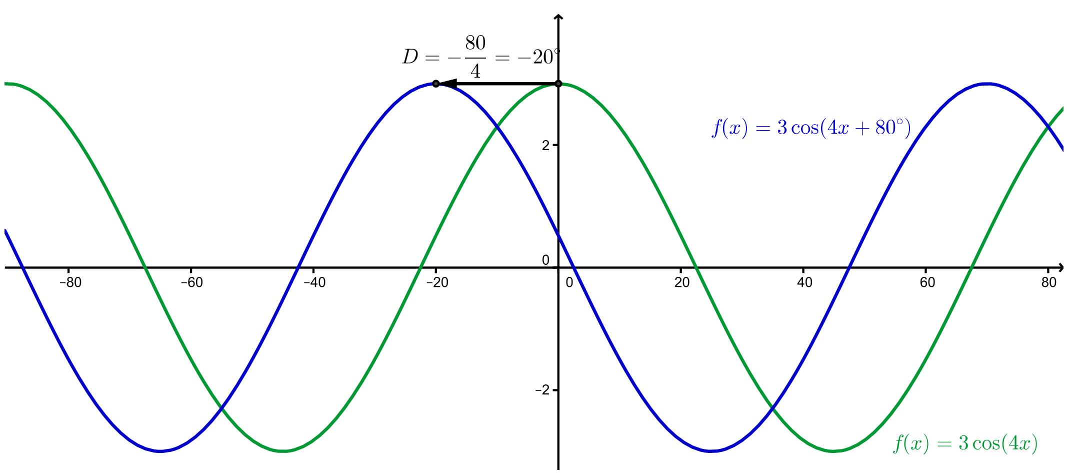
Les solutions sont

$$x = -\frac{c}{b} \text{ et } x = -\frac{c}{b} + \frac{360°}{b}.$$

Définition. On appelle *déphasage* de $f(x) = a\sin(bx + c)$ (ou $f(x) = a\cos(bx + c)$) le nombre $D = -\dfrac{c}{b}$.

Remarque. On obtient le graphe de $f(x) = a\sin(bx+c)$ (ou $f(x) = a\cos(bx+c)$) en déplaçant le graphe de $f(x) = a\sin(bx)$ (ou $f(x) = a\cos(bx)$)

- sur la gauche si le déphasage D est négatif ;
- sur la droite si le déphasage D est positif ;



Exercice 5. Déterminer l'amplitude, la période, le déphasage de chacune des fonctions f ci-dessous, puis esquisser leurs graphes.

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = 2\cos x$

d) $f(x) = \cos(2x)$

e) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

f) $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + 60°\right)$

g) $f(x) = 3\cos(2x - 30°)$

h) $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

i) $f(x) = -2\cos\left(\frac{1}{2}x + 60°\right)$

j) $f(x) = -3\sin(2x - 30°)$

k) $f(x) = 5\sin(2x + 60°)$

l) $f(x) = 3\cos(3x - 60°)$

m) $f(x) = -5\sin(4x - 100°)$

n) $f(x) = 3\cos(2x + 40°)$

Solutions

Exercice 1.

a) $x \cong 36,87° + 360°k,\ x \cong 143,13° + 360°k$

b) $x \cong 18,43° + 180°k,\ x \cong 71,57° + 180°k$

c) $x \cong 30,96° + 180°k$

d) $x \cong 81,87° + 180°k$

e) $x \cong 45,57° + 360°k,\ x \cong -45,57° + 360°k$

f) pas de solution

Exercice 2.

a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

d) pas de solution

e) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Exercice 3.

a) $x = -30° + 360°k,\ x = -150° + 360°k$

b) $x \cong -10,01° + 120°k,\ x \cong -19,99° + 120°k$

c) $x = 225° + 1080°k,\ x = -45v + 1080°k$

d) $x = 105° + 180°k,\ x = -15° + 180°k$

e) $x \cong 64,83° + 120°k,\ x \cong -4,83° + 120°k$

f) $x \cong -71,57° + 180°k$

g) $x = 150° + 360°k,\ x = 30° + 360°k$

h) $x = \frac{105°}{2} + 90°k$

i) $x = -\frac{25°}{2} + 180°k,\ x = \frac{245°}{2} + 180°k$

j) $x \cong 7,27° + 60°k$

Exercice 4.

a) $x = 360°k,\ x = 36° + 72°k$

b) $x = 10° + 120°k,\ x = -90° + 360°k$

c) $x = \frac{45°}{2} + 180°k,\ x = -\frac{45°}{4} + 90°k$

d) $x = -45° + 216°k,\ x = \frac{585°}{7} + \frac{1080°}{7}k$

e) $x = -10° + 360°k,\ x = 46° + 72°k$

f) $x = 30° + 360°k,\ x = -10° + 120°k$

g) $x = \frac{20°}{3} + 120°k,\ x = 20° + \frac{360°}{7}k$

h) $x = 50° + 360°k,\ x = -2° + 72°k$

i) $x = 15° + 60°k$

j) $x = 35° + 90°k$

k) $x \cong 66,87v + 360°k$

l) $x = -15° + 90°k$

Exercice 5.

a) $A = 1,\ P = 360°,\ D = 0°$

b) $A = 1,\ P = 360°,\ D = 0°$

c) $A = 2,\ P = 360°,\ D = 0°$

d) $A = 1,\ P = 180°,\ D = 0°$

e) $A = 1,\ P = 720°,\ D = 0°$

f) $A = 2,\ P = 720°,\ D = -120°$

g) $A = 3,\ P = 180°,\ D = 15°$

h) $A = 2,\ P = 720°,\ D = 0°$

i) $A = 2,\ P = 720°,\ D = -120°$

j) $A = 3,\ P = 180°,\ D = 15°$

k) $A = 5,\ P = 180°,\ D = -30°$

l) $A = 3,\ P = 120°,\ D = 20°$

m) $A = 5,\ P = 90°,\ D = 25°$

n) $A = 3,\ P = 180°,\ D = -20°$

Table des matières

1 Equations trigonométriques **1**

2 Fonctions trigonométriques **2**