Géométrie analytique et vectorielle du plan

Karim Saïd

Ecole Technique, Année scolaire 2020-2021

1 Introduction

La géométrie dite classique repose sur les travaux d'Euclide [1]. On lui doit notamment ses célèbres *Eléments* regroupant 13 volumes où il présente l'essentiel des connaissances mathématiques de l'époque et pose les bases théoriques de la pensée mathématique des siècles à venir. Cette géométrie est essentiellement constituée de constructions qui s'appuient sur 5 postulats formulés par Euclide, ainsi que sur toute une série de définitions des objets géométriques. Les constructions, selon Euclide, devaient pouvoir se faire en utilisant uniquement la règle (non graduée) et le compas [2].

Ces contraintes conduisent bien souvent à des résolutions géométriques très compliquées. Avec l'apparition de l'algèbre, la tentation fut grande de résoudre des problèmes géométriques avec les nouveaux outils comme les équations par exemple. Les mathématiciens français Fermat [3] et Descartes [4] poseront les bases permettant d'utiliser l'algèbre pour traiter des questions géométriques. Le lien entre les deux domaines se fait au travers de la notion de *coordonnées des points*. Cette géométrie utilisant les outils algébriques est appelée *géométrie analytique* et fera l'objet d'un prochain chapitre.

Il y a un concept très utile aujourd'hui qui permet de comprendre plus facilement comment on peut passer de la géométrie euclidienne à la géométrie analytique. Il s'agit de la notion de *vecteur*, qui est l'objet du présent chapitre. Les vecteurs permettent aussi de modéliser des concepts en physique ou en économie par exemple, ce qui rend leur étude encore plus intéressante. En effet, lorsque l'on veut caractériser certaines grandeurs, telles qu'une distance, une température ou une masse, on a besoin d'un nombre et d'une unité. Ainsi, on parle par exemple de deux villes distantes de 50 km, d'une personne de 1m80, d'un sac de 17 kg ou de l'eau à 26°. Par contre, cela n'est pas possible de le faire pour certaines grandeurs. Il n'est en effet pas possible de caractériser un déplacement ou une force à l'aide d'un seul nombre.

Définition. On appelle *grandeur vectorielle*, toute grandeur caractérisée par un nombre et une direction.

Exemple. Considérons une luge tirée horizontalement avec une certaine force. Pour définir entièrement cette force, on doit connaître

1. EUCLIDE, environ 330-260 av J-C, mathématicien grec souvent considéré comme le père de la géométrie.
2. Le théorème de Wantzel, énoncé par PIERRE-LAURENT WANTZEL en 1837, montre que cela n'est pas toujours possible.
3. PIERRE DE FERMAT, première décennie du XVIIe siècle-1665, magistrat et mathématicien français.
4. RENÉ DESCARTES, 1596-1650, mathématicien, physicien et philosophe français.

1. son intensité, représentée par la longueur de la flèche ;
2. sa direction, représentée par la droite suivant laquelle la force s'exerce ;
3. le sens selon lequel la force s'exerce, indiqué par la pointe de la flèche.

Un nombre seul ne suffit pas à caractériser une force ; son intensité est une information primordiale, mais insuffisante. Il faut également connaître sa direction et son sens.

2 Notion de vecteur

Définition. On appelle *flèche*, tout segment de droite orienté. Une flèche $\overrightarrow{AB}$ est caractérisée par :

— une origine : le point A ;

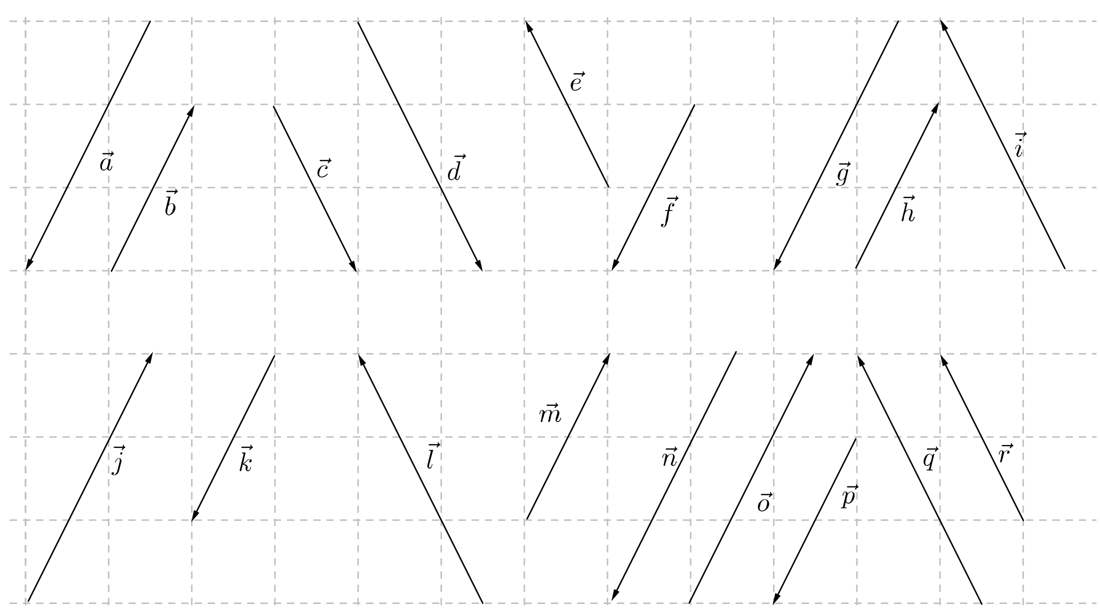
— une extrémité : le point B ;

— une direction ;

— un sens ;

— une longueur.

Exercice 1. Parmi les flèches ci-dessous, identifier celles qui sont les "mêmes".



Dans $\mathbb{Q}$, certaines fractions comme $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2}{4}$ sont *équivalentes*. On dit que ces deux dernières appartiennent à la même *classe d'équivalence*. Comme on l'a vu à l'exercice 1, il est également possible de déterminer si deux flèches données le sont ou pas.

On dira alors que les flèches $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *équivalentes* si elles ont

— même direction ;

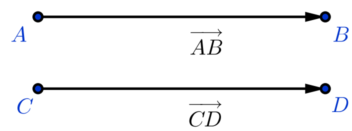
— même sens ;

— même longueur.

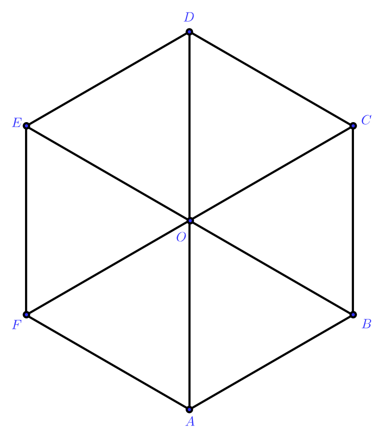
Cela définit une *relation d'équivalence* dans l'ensemble des flèches du plan.
On pose alors la définition suivante :

Définition. Un *vecteur* est une classe d'équivalence de flèches.

Remarque. Il faut être attentif au fait qu'un *vecteur* est un ensemble infini de *flèches*. Lorsque l'on dessine un flèche, on dessine un des représentants du vecteur. Par abus de langage, on dira que l'on dessine ce vecteur. Ainsi, un vecteur est entièrement défini par sa *direction*, son *sens* et sa *longueur*, mais ne dépend pas de son emplacement. On peut donc représenter un vecteur par une flèche de n'importe quelle origine. Lorsque l'on écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, cela représente une égalité entre deux vecteurs (celui représenté par la flèche $\overrightarrow{AB}$ et celui représenté par la flèche $\overrightarrow{CD}$).



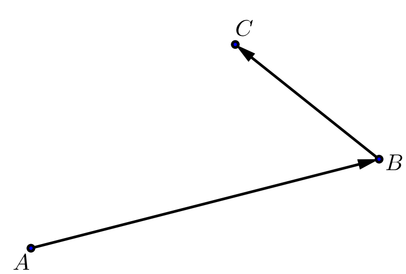
Exercice 2. Ecrire toutes les égalités possibles entre les vecteurs, que l'on peut représenter à l'aide des points de la figure ci-dessous.



3 Opérations sur les vecteurs

3.1 Addition vectorielle

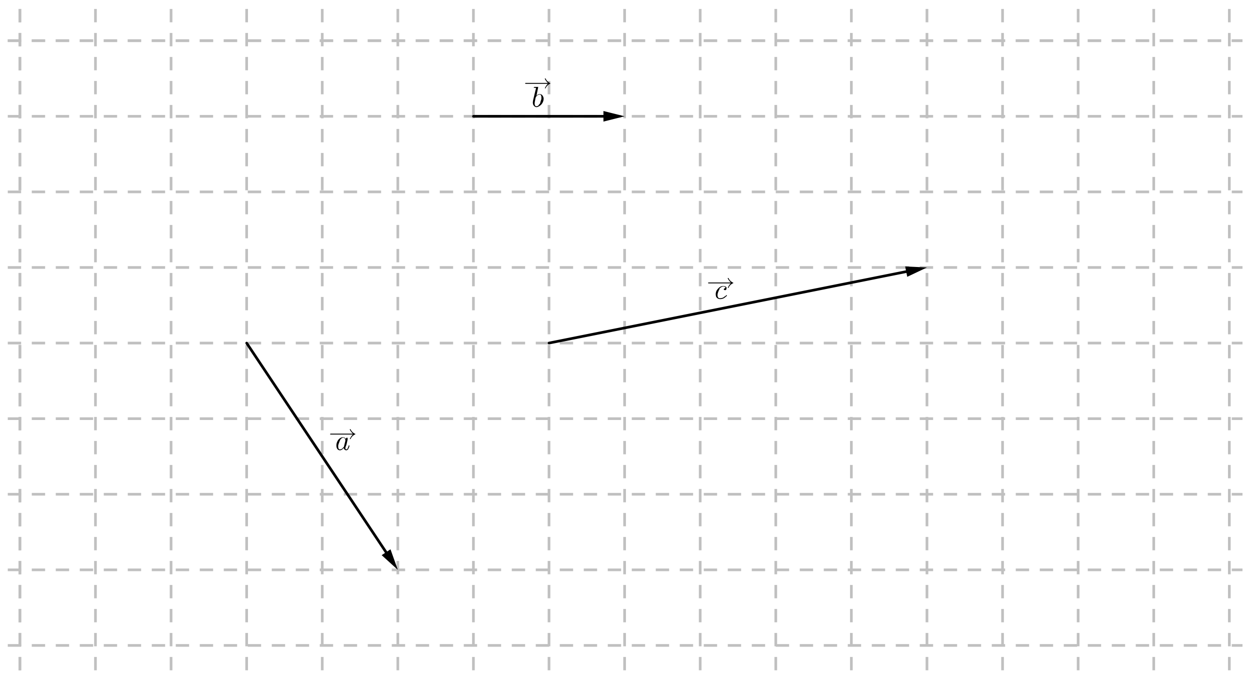
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs, il est possible de définir le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ comme suit :



Algébriquement, la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ se calcule à l'aide de la relation ci-dessous, portant le nom de *règle de Chasles*[5] :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.}$$

Exercice 3. Construire un représentant des vecteurs $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$, et $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ à partir des vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ ci-dessous.



Propriétés. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$, on a

1. associativité :
$$\boxed{\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right).}$$
2. $\overrightarrow{0}$ est l'élément neutre :
$$\boxed{\overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{0}.}$$
3. tout vecteur $\overrightarrow{a}$ possède un unique opposé noté $-\overrightarrow{a}$:
$$\boxed{\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = (-\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}.}$$
4. commutativité :
$$\boxed{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.}$$

Exercice 4. Quel est le résultat de l'addition $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$? Est-ce qu'il s'agit encore d'un vecteur ? Si oui, quelles sont ses propriétés (origine, extrêmité, direction, sens, longueur) ?

5. Michel Chasles (1793-1880), mathématicien français.

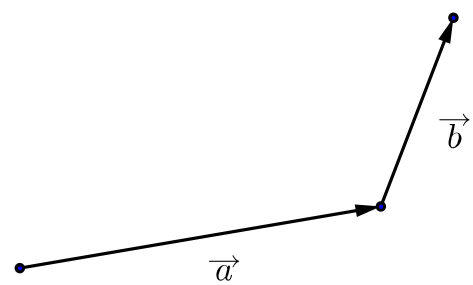
3.2 Soustraction vectorielle

Exercice 5. Soit $\overrightarrow{a}$ un vecteur du plan. Comment peut-on définir un vecteur *opposé* (ou *symétrique*) à $\overrightarrow{a}$?

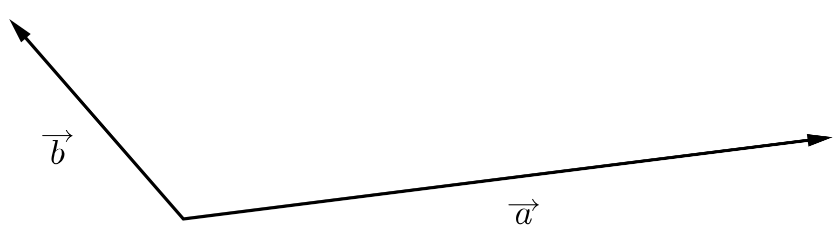
Remarque. L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.}$$

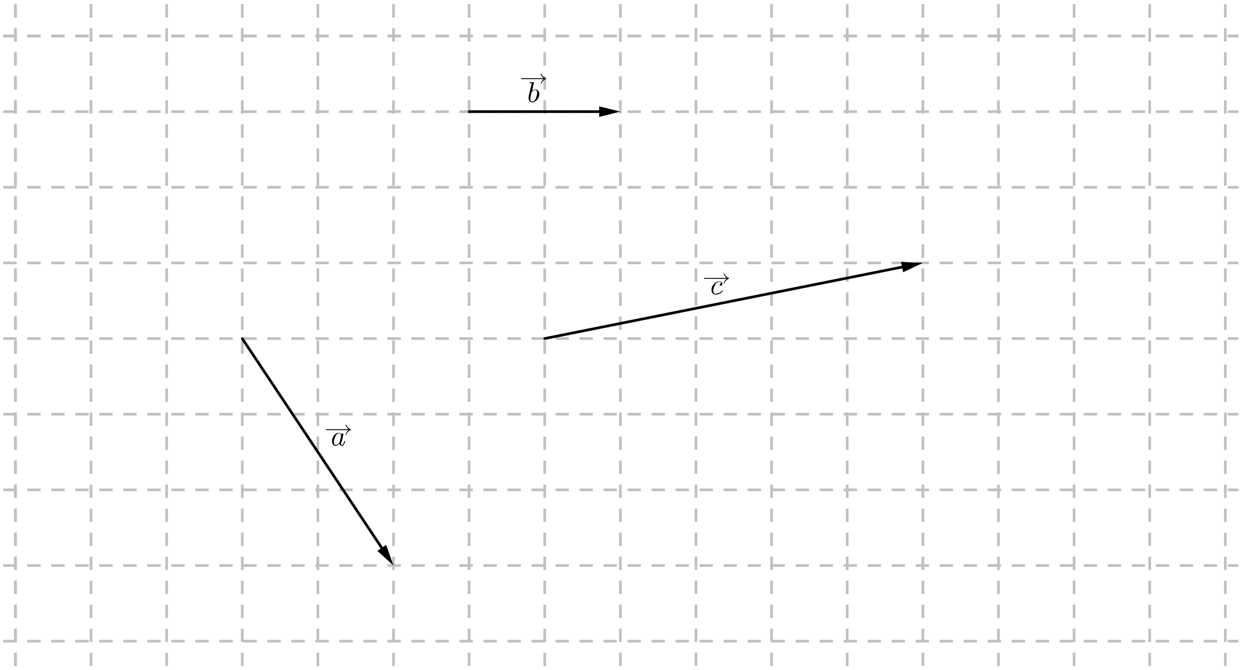
Exercice 6. Construire un représentant du vecteur $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ ci-dessous.



Remarque. Il est aussi possible de construire un représentant du vecteur $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ à partir d'un représentant de $\overrightarrow{a}$ et d'un représentant de $\overrightarrow{b}$ directement (sans utiliser $-\overrightarrow{b}$). On obtient cette construction en remarquant que $\overrightarrow{b} + (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}$, ce qui s'interprète graphiquement ainsi :



Exercice 7. Construire un représentant des vecteurs $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$, à partir des vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ ci-dessous.



Exercice 8. Soient A, B, C, D et E, cinq points quelconques du plan. Simplifier au maximum, les expressions ci-dessous.

a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$

f) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DE}$

3.3 Multiplication externe

Soient $\overrightarrow{a}$, un vecteur et k, un nombre réel. Il est possible de définir un nouveau vecteur, noté $k \cdot \overrightarrow{a}$. Celui-ci aura alors pour

— *direction :* celle de $\overrightarrow{a}$;

— *sens :* celui de $\overrightarrow{a}$ si $k > 0$, le sens opposé si $k < 0$;

— *longueur :* celle de $\overrightarrow{a}$, multipliée par $|k|$.

Remarque. Il est important de bien observer la nature des objets qui sont impliqués dans cette opération :

$$\text{nombre réel} \cdot \text{vecteur} = \text{vecteur}.$$

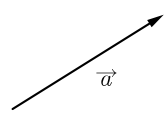
Il s'agit donc d'une *opération mixte*.

Remarque. En munissant l'ensemble V_2 des vecteurs du plan de l'addition vectorielle et de la multiplication externe, on définit ainsi un *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit $\overrightarrow{a}$, le vecteur du plan donné ci-dessous.
Dessiner un représentant de

a) $2 \cdot \overrightarrow{a}$ b) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{a}$ c) $0 \cdot \overrightarrow{a}$

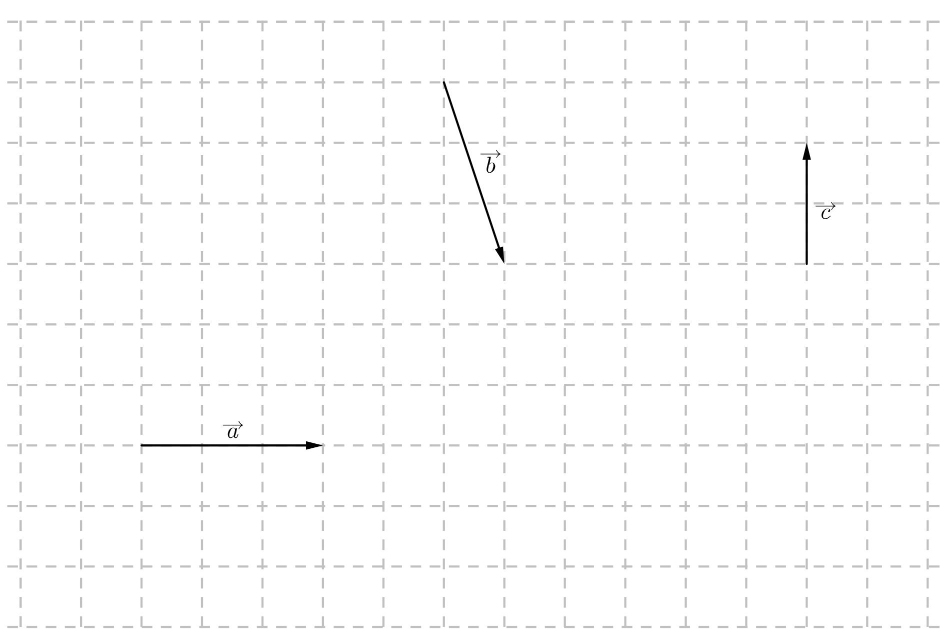
d) $\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{a}$ e) $3 \cdot \overrightarrow{a}$ f) $-2 \cdot \overrightarrow{a}$



Exercice 10. Soient $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ les vecteurs du plan donnés ci-dessous.
Dessiner un représentant de

a) $3 \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c})$ c) $3 \cdot \overrightarrow{a} - 3 \cdot \overrightarrow{c}$

b) $-\overrightarrow{a} + 2 \cdot \overrightarrow{c}$ d) $-\frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$



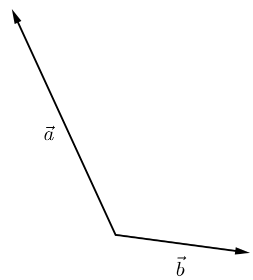
3.4 Combinaisons linéaires

Définition. On appelle *combinaison linéaire* de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ un vecteur de la forme

$$\boxed{\alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b}}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Dessiner un représentant de la combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, de coefficients respectifs $-\dfrac{1}{2}$ et 2.



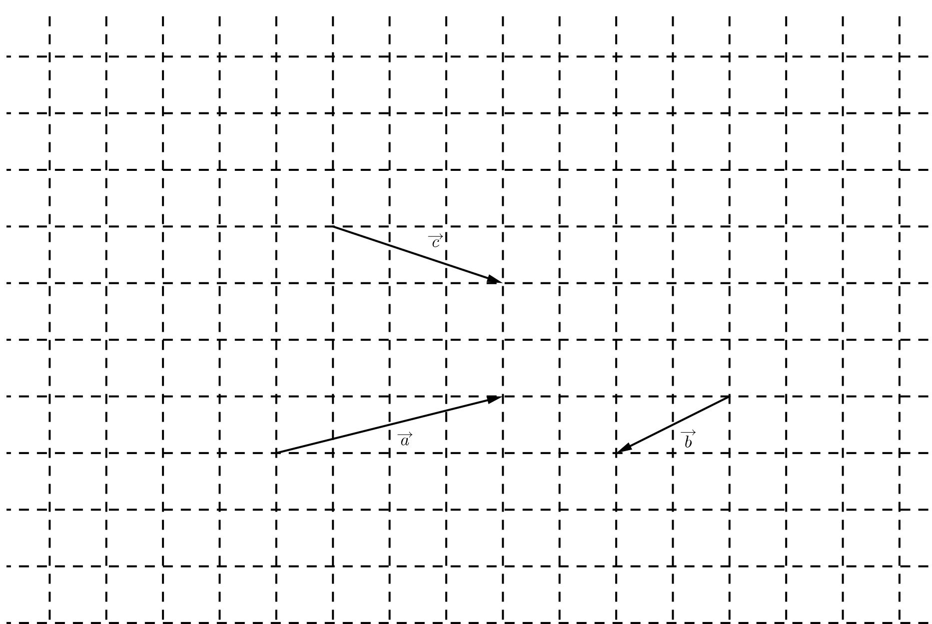
Exercice 12. On donne les vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ ci-dessous.

a) représenter les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} \qquad \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} \qquad \overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$$

b) trouver les vecteurs $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$ tels que

$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \qquad \overrightarrow{y} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \qquad \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{z}$$



Exercice 13. Si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont deux vecteurs quelconques du plan, peut-on toujours trouver une combinaison linéaire de ces deux vecteurs qui soit égale à un troisième vecteur $\overrightarrow{v}$ donné ? Si non, quelle condition faut-il imposer à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ pour que cela soit toujours possible ?

Définition. On dit de deux vecteurs non nuls qu'ils sont

— *linéairement dépendants* (ou *colinéaires*) si ils ont la même direction et sont donc parallèles ;

— *linéairement indépendants* si ils n'ont pas la même direction et ne sont donc pas parallèles.

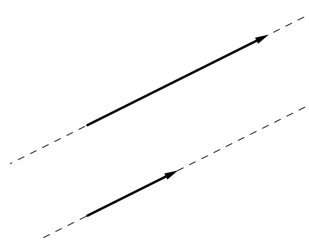


FIGURE 1 – Vecteurs linéairement dépendants.

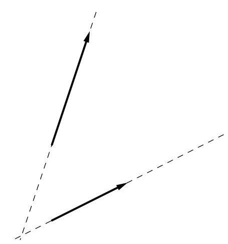


FIGURE 2 – Vecteurs linéairement indépendants.

Remarque. Si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ n'ont pas la même direction, il est alors possible de trouver deux nombres α et β non tous nuls tels que

$$\alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}.$$

Cela n'est pas possible si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ n'ont pas la même direction. Autrement dit, si ils sont linéairement indépendants, alors la seule combinaison linéaire nulle

$$\alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$$

est triviale, c'est-à-dire

$$\alpha = \beta = 0.$$

Exercice 14. Quels sont les vecteurs colinéaires au vecteur nul $\overrightarrow{0}$?

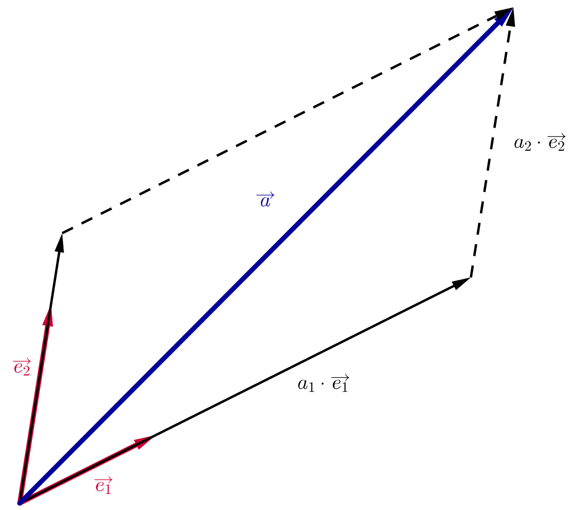
4 Bases et composantes

4.1 Bases de l'espace vectoriel V_2

Définition. On appelle *base* de l'espace vectoriel V_2, tout ensemble formé de deux vecteurs linéairement indépendants $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$. On la note $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$.

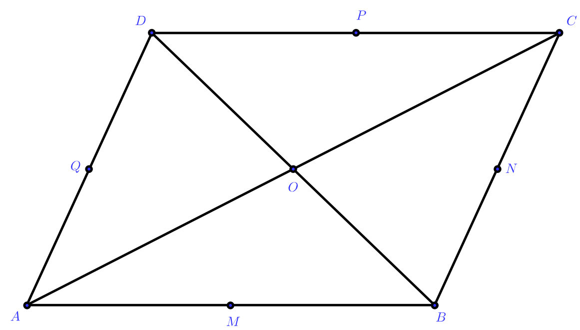
Remarque. En vertu de l'exercice 13, tout vecteur $\overrightarrow{a} \in V_2$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, c'est-à-dire sous la forme

$$\overrightarrow{a} = a_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{e_2}.$$

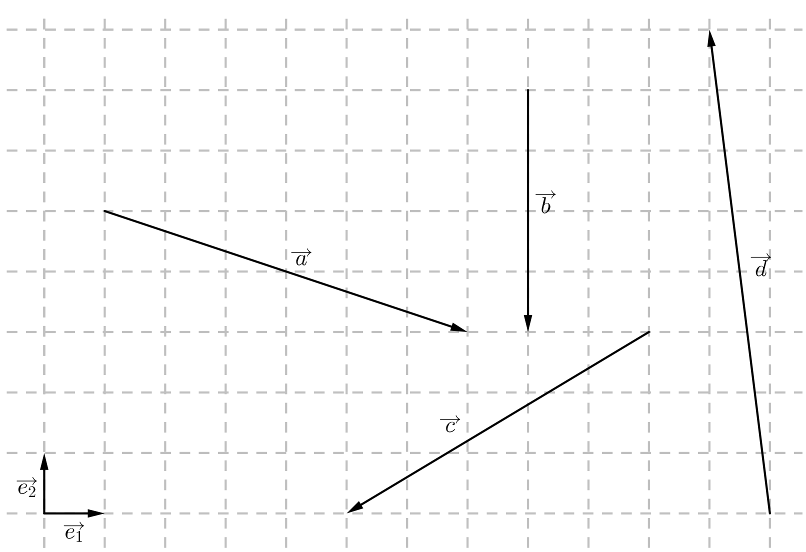


Remarque. Toutes les bases de V_2 comprennent deux vecteurs. On dit que V_2 est de dimension 2.

Exercice 15. Soient le parallélogramme $ABCD$ et M, N, P et Q, les milieux des côtés de $ABCD$ et O, l'intersection des diagonales. Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$, comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.



Exercice 16. Donner les combinaisons linéaires correspondant aux vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ dans la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$.



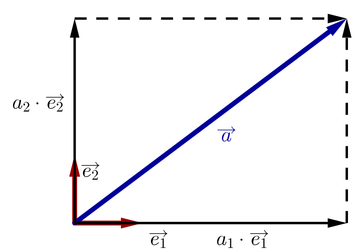
Remarque. La base de l'exercice 16 est souvent appelée *base canonique* (ou *usuelle*). Sauf mention expresse du contraire, nous travaillerons dans cette base.

4.2 Composantes d'un vecteur

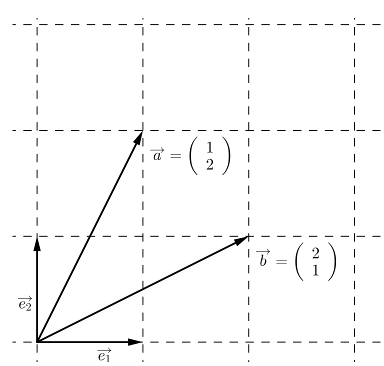
Définition. Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, une base de V_2. Tout vecteur $\overrightarrow{a} \in V_2$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\overrightarrow{a} = a_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{e_2}.$$

Les nombres a_1 et a_2 sont appelés les *composantes* du vecteur $\overrightarrow{a}$ dans la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$. On introduit alors la *notation matricielle* : $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.



Remarque. L'ordre des composantes est essentiel : la première se rapporte au premier vecteur de base et la seconde au second vecteur de base. Par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ représentés ci-dessous sont distincts.



Exercice 17. Construire les vecteurs ci-dessous dans la base canonique.

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

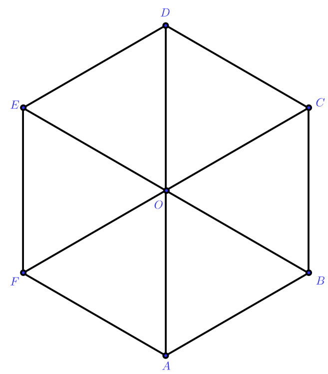
b) $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

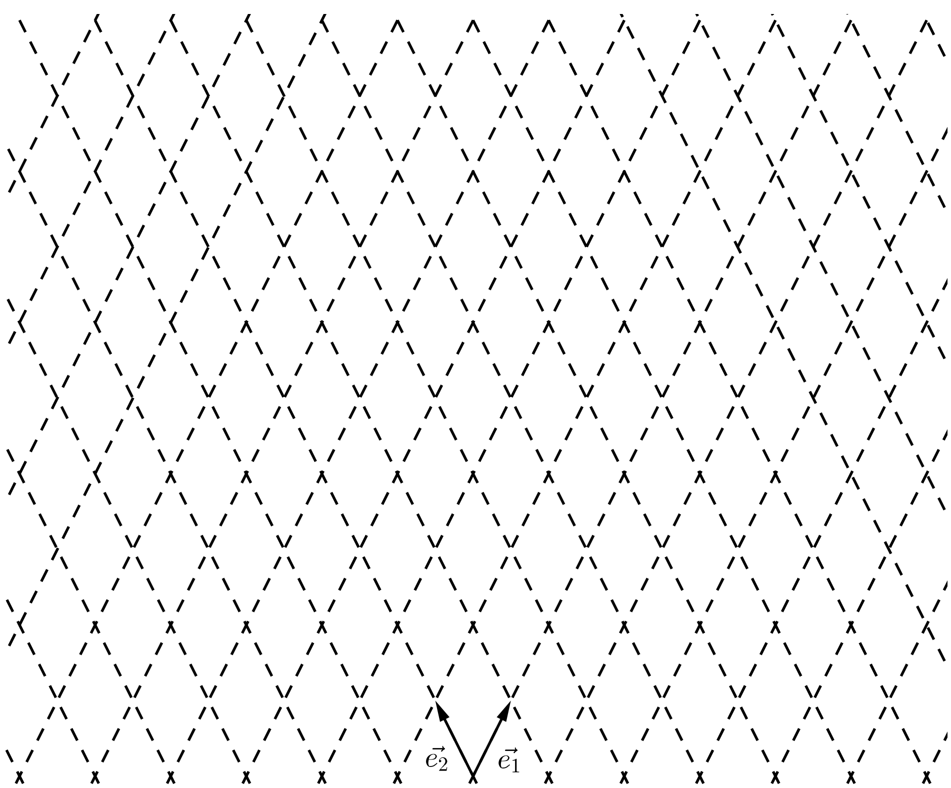
Exercice 18. Soit l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O représenté ci-dessous. Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{EB}$.

a) dans la base $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$;

b) dans la base $\mathcal{B}_2 = \{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{AB}\}$.



Exercice 19. Soit la figure ci-dessous.



a) représenter dans la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, les vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ e) $\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$

b) représenter les vecteurs $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{h} = 3 \cdot \overrightarrow{b} + 2 \cdot \overrightarrow{c}$, puis donner leurs composantes dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 20. Soient $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{R}$.

a) montrer que $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$;

b) montrer que $k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 21. Calculer les expressions vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix};$$
$$\overrightarrow{b} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right) - \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer les composantes des vecteurs suivants et les représenter.

a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

b) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$

c) $2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$

d) $-\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$

Exercice 23. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer les composantes des vecteurs suivants et les représenter.

a) $3\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ b) $2\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$ c) $-5\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} - 8\overrightarrow{c}$

Exercice 24. Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on considère les vecteurs

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ e) $\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

g) $\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ h) $\overrightarrow{h} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ i) $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Déterminer, parmi ces vecteurs, ceux qui sont colinéaires.

Exercice 25. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$. Déterminer la valeur des nombres réels α et β tels que $\alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$.

Exercice 26. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{c}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans chacun des cas suivants.

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$;

c) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 27. Déterminer la valeur du paramètre m de sorte que les deux vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} m^2+1 \\ m+2 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

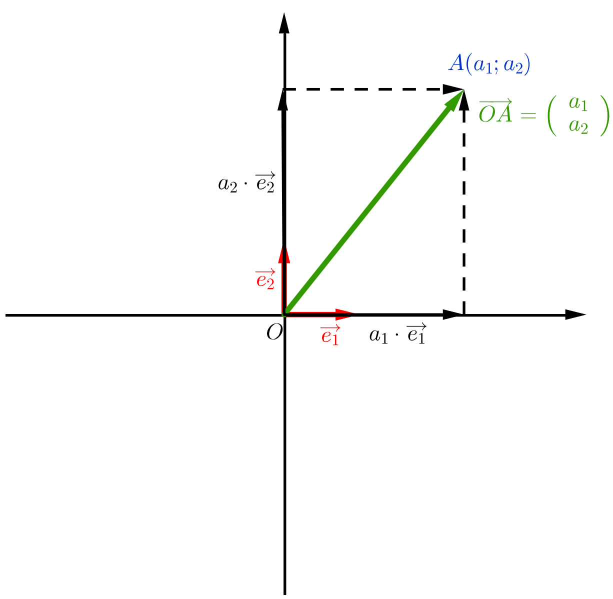
5 Repères et coordonnées

Définition. On appelle *repère du plan* $\{O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$, la donnée de

— un point O, appelé *origine*;

— une *base* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$ de l'espace vectoriel V_2.

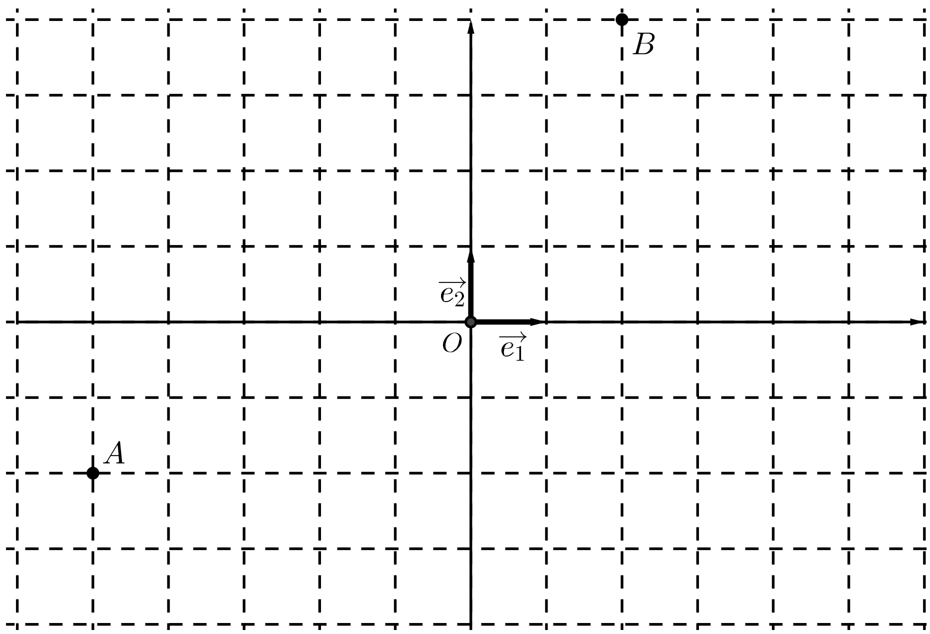
Définition. Les *coordonnées* d'un point A dans le repère $\{O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$. Autrement dit, si $\overrightarrow{OA} = a_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, alors le couple $(a_1; a_2)$ représente les coordonnées du point A



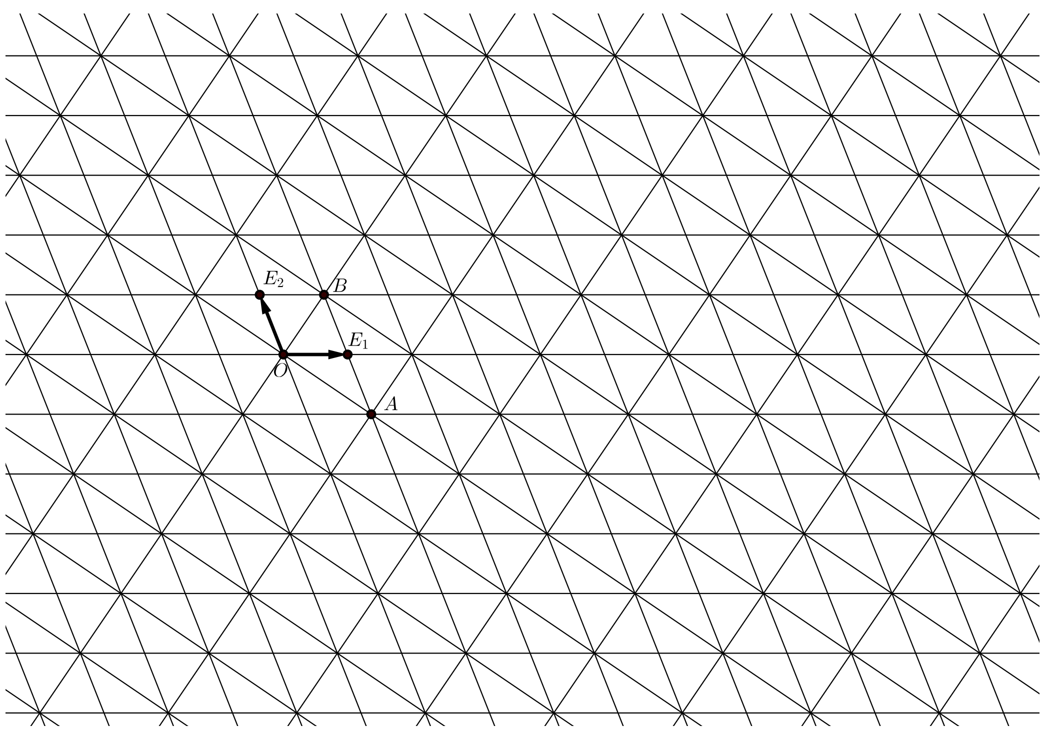
Autrement dit

Dans la **base** $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$	Dans le **repère** $\{O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$
$\overrightarrow{OA} = a_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{e_2}$	$A(a_1; a_2)$
a_1 et a_2 sont les **composantes** du **vecteur** $\overrightarrow{OA}$	a_1 et a_2 sont les **coordonnées** du **point** A

Exercice 28. Déterminer les coordonnées des points A et B dans le repère $\{O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$, puis les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Exercice 29. On considère la figure ci-dessous.



a) représenter les points suivants dont les coordonnées sont données dans le repère $\{O; \overrightarrow{OE_1}; \overrightarrow{OE_2}\}$;

$M(4;2)$ $N(-3;3)$ $P(-4;4)$ $Q(2;3)$ $R(1;-3)$
$S(0;-3)$ $T(5;0)$ $U(-1;-4)$ $V(-2;3)$

b) déterminer les coordonnées de ces points dans le repère $\{O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\}$.

Exercice 30. Soient les points $A(-5;2)$ et $B(6;-9)$. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 31. Soient les points $A(a_1;a_2)$ et $B(b_1;b_2)$. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 32. Soient les points $A(-2;3)$, $B(7;-2)$ et $C(-1;8)$. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Exercice 33. Les points $A(1;2)$, $B(5;8)$ et $C(9;10)$ sont-ils alignés ?

Exercice 34. Soient les points $A(2;x)$, $B(7x-29;5)$ et $C(-4;2)$. Déterminer la valeur de x pour que les points A, B et C soient alignés.

Exercice 35. On considère les points $A(-6;-3)$, $B(6;1)$ et $C(2;13)$. Déterminer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.

Exercice 36. On considère les points $A(6;1)$, $B(1;5)$ et $C(-4;1)$. Déterminer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 37. Soient les points $A(2;5)$, $B(1;2)$, $C(x;3)$ et $D(6;y)$. Déterminer la valeur de x et de y pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 38. On considère les points $A(-3;-2)$, $B(2;5)$, $C(3;9)$ et $D(-12;x)$. Déterminer la valeur de x pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un trapèze, dont les bases sont AB et CD.

Exercice 39. Soient $A(-3;1)$ et $B(5;5)$. Calculer les coordonnées du point M, milieu du segment AB.

6 Norme d'un vecteur

Exercice 40. Calculer la longueur du vecteur $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

Définition. On appelle *norme* d'un vecteur $\overrightarrow{a}$, la longueur de sa flèche représentative. On la note $\|\overrightarrow{a}\|$.

Théorème. *La norme d'un vecteur* $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ *est donnée par*

Exercice 41. Soient les points $A(9;-4)$ et $B(14;8)$. Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Théorème. *La norme d'un vecteur* $\overrightarrow{a}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\|\overrightarrow{a}\|\geq 0$, *pour tout vecteur* $\overrightarrow{a}$ *;*
2. $\|\overrightarrow{a}\|=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ *;*
3. *si* $k\in\mathbb{R}^*$, *on a* $\|k\cdot\overrightarrow{a}\|=|k|\cdot\overrightarrow{a}$ *;*
4. *inégalité triangulaire :* $\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\|\leq\|\overrightarrow{a}\|+\|\overrightarrow{b}\|$, *pour tous vecteurs* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$.

Exercice 42. Prouver le théorème ci-dessus.

Exercice 43. Calculer la distance $\delta(A;B)$ entre les points $A(3;2)$ et $B(8;-14)$.

Exercice 44. Soit le triangle ABC où $A(-2;5)$, $B(5;2)$ et $C(3;-6)$. Calculer son périmètre.

Définition. On dit d'un vecteur $\overrightarrow{a}$ qu'il est *unitaire* si et seulement si sa norme vaut 1.

Exemple. $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ est unitaire, car

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1.$$

Exercice 45. Trouver un vecteur unitaire de même direction que

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

Est-ce qu'il existe plusieurs solutions ?

Exercice 46. Soit le vecteur $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$.

a) déterminer les composantes de tous les vecteurs unitaires colinéaires au vecteur $\overrightarrow{a}$;

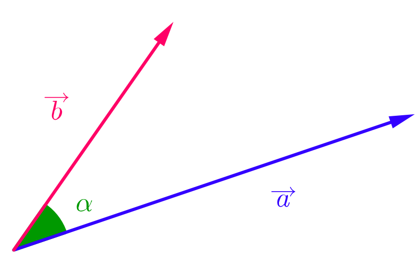
b) déterminer les composantes de tous les vecteurs de norme 5 colinéaires au vecteur $\overrightarrow{a}$;

7 Produit scalaire

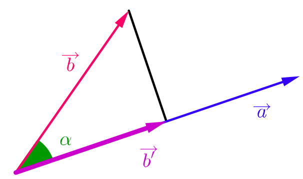
Le but de cette section est de se doter d'un outil permettant de déterminer par le calcul si deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ donnés sont orthogonaux (c'est-à-dire perpendiculaires).

7.1 Définition géométrique

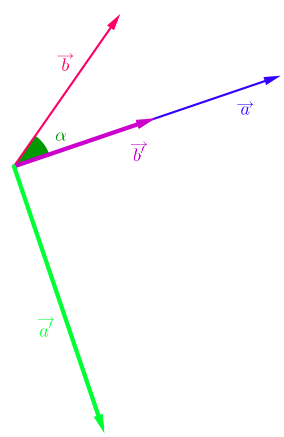
Considérons les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ci-dessous, ainsi que l'angle α entre $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.



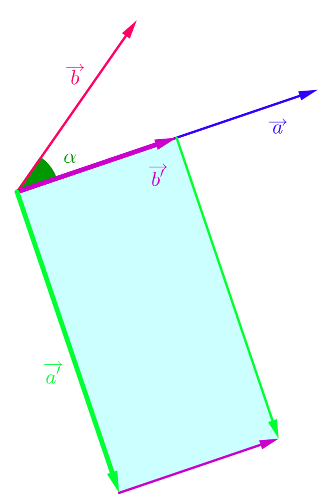
Soit alors $\overrightarrow{b'}$, la projection orthogonale de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{a}$



En effectuant une rotation de $\overrightarrow{a}$ d'angle 90°, on obtient un nouveau vecteur $\overrightarrow{a'}$.



A l'aide des vecteurs $\overrightarrow{a'}$ et $\overrightarrow{b'}$, il est possible de former un rectangle.



On constate que l'aire de ce rectangle sera

— d'autant plus grande que les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ le seront ;

— d'autant plus petite que l'angle α sera proche de 90° ;

— nulle si $\alpha = 90°$.

Sur la base de ces observations, il convient donc d'établir une expression permettant de la calculer :

$$A \;=\; \|\overrightarrow{a'}\| \cdot \|\overrightarrow{b'}\| \;=\; \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b'}\| \;=\; \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \cdot \cos(\alpha).$$

Définition. On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}$ et défini par

$$\boxed{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \cdot \cos(\alpha).}$$

De ce qui précède, il en découle le théorème suivant :

Théorème. *Si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont des vecteurs non nuls, on a*

$$\boxed{\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \iff \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = 0.}$$

Propriétés. Le produit scalaire jouit des propriétés suivantes :

1. *commutativité :* pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, on a

$$\boxed{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{a};}$$

2. *distributivité par rapport à l'addition :* pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$, on a

$$\boxed{\overrightarrow{a} \bullet \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{c};}$$

3. pour tous vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{(k \cdot \overrightarrow{a}) \bullet \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \bullet \left(k \cdot \overrightarrow{b}\right) = k \cdot \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b};}$$

4. pour tout vecteur $\overrightarrow{a}$, on a

$$\boxed{\overrightarrow{a}^2 \overset{\text{déf}}{=} \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{a} = \|\overrightarrow{a}\|^2.}$$

7.2 Définition algébrique

Malheureusement, il n'est pas aisé de calculer la valeur du produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$; l'angle α entre $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ étant inconnu. Le but de cette section consiste à établir le calcul du produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ à partir de leurs composantes exprimées dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$.

On a alors

- $\vec{e_1} \bullet \vec{e_1} = \|\vec{e_1}\|^2 \cdot \cos 0° = 1$;
- $\vec{e_2} \bullet \vec{e_2} = \|\vec{e_2}\|^2 \cdot \cos 0° = 1$;
- $\vec{e_1} \bullet \vec{e_2} = \|\vec{e_1}\| \cdot \|\vec{e_2}\| \cos 90° = 0$;

Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned}
\vec{a} \bullet \vec{b} &= (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}) \bullet (b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}) \\
&= a_1b_1(\vec{e_1} \bullet \vec{e_1}) + a_1b_2(\vec{e_1} \bullet \vec{e_2}) + a_2b_1(\vec{e_2} \bullet \vec{e_1}) + a_2b_2(\vec{e_2} \bullet \vec{e_2}) \\
&= a_1b_1 \cdot 1 + a_1b_2 \cdot 0 + a_2b_1 \cdot 0 + a_2b_2 \cdot 1 \\
&= a_1b_1 + a_2b_2.
\end{aligned}$$

On en déduit ainsi le résultat suivant :

Théorème. *Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont exprimés sous forme de composantes dans une base orthonormée, alors*

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.}$$

Exercice 47. Soient les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer

$$\vec{a} \bullet \vec{b},\ \vec{a} \bullet \vec{c},\ \vec{a} \bullet \vec{e},\ \vec{b} \bullet \vec{a},\ \vec{d} \bullet \vec{e},\ \vec{c} \bullet \vec{d},\ \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{c} - \vec{d}\right).$$

Exercice 48. Soients $A(2;3)$, $B(4;-2)$ et $C(-3;2)$. Calculer

a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BA}$

Exercice 49. Le triangle ABC avec $A(-2;5)$, $B(5;2)$ et $C(12;-7)$ est-il rectangle en C ?

Exercice 50. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ de sommets $A(0;2)$, $B(6;6)$, $C(8;3)$ et $D(2;-1)$ est un rectangle.

Exercice 51. Déterminer la valeur de k pour que le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Exercice 52. Donner les composantes de deux vecteurs orthogonaux au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ de même norme que $\vec{a}$.

Exercice 53. Déterminer les composantes de tous les vecteurs de norme 15 orthogonaux au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 54. Soient les points $A(1;4)$, $B(5;2)$ et $C(k;5)$. Déterminer le (ou les) nombre(s) réels k pour lequel (lesquels) le triangle ABC est rectangle. Parmi les solutions, trouve-t-on des cas où le triangle est également isocèle ?

Théorème. *L'angle α que forment deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est donné par*

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\|}.}$$

Exercice 55. Prouver le théorème ci-dessus.

Exercice 56. Déterminer la mesure de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans chacun des cas suivants.

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$;

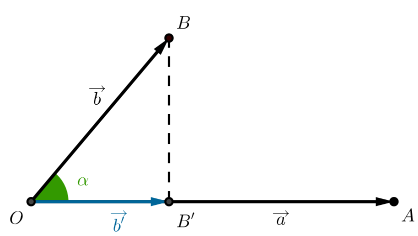
b) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$;

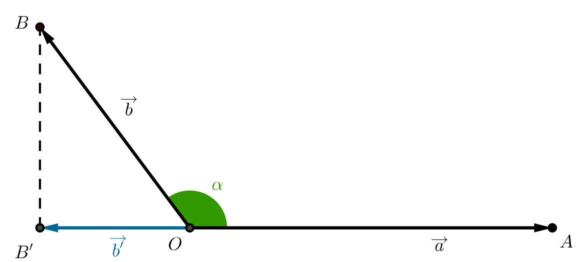
c) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Exercice 57. Déterminer la valeur des trois angles intérieurs du triangle de sommets $A(-3;2)$, $B(10;-1)$ et $C(6;4)$.

7.3 Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre vecteur

Soient deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de V_2. Choisissons trois points O, A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$. Soit B' le point d'intersection de la droite passant par O et A avec sa perpendiculaire issue de B. Le vecteur $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{b'}$ est la *projection orthogonale* de $\overrightarrow{b}$ sur $\overrightarrow{a}$.





Théorème.

$$\boxed{\overrightarrow{b'} = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|^2} \cdot \overrightarrow{a} \ \textit{ et } \ \|\overrightarrow{b'}\| = \frac{|\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}|}{\|\overrightarrow{a}\|}.}$$

Preuve. Il convient de distinguer deux cas selon que l'angle α des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est augu ou obtus.

Cas 1 : Si α est aigu, alors $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \cdot \cos\alpha = \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b'}\|$.
On en déduit que

$$\|\overrightarrow{b'}\| = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|}.$$

Comme $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b'}$ sont de même sens, on a

$$\overrightarrow{b'} = \|\overrightarrow{b'}\| \cdot \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|} \cdot \overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|} \cdot \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|} \cdot \overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|^2} \cdot \overrightarrow{a}.$$

Cas 2 : Si α est obtus, alors $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \cdot \cos\alpha = -\|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b'}\|$. car $\cos\alpha$ est négatif
On en déduit que

$$\|\overrightarrow{b'}\| = -\frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|}.$$

Comme $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b'}$ sont de sens contraires, on a

$$\overrightarrow{b'} = -\|\overrightarrow{b'}\| \cdot \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|} \cdot \overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|} \cdot \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|} \cdot \overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|^2} \cdot \overrightarrow{a}.$$

On en déduit que, dans les deux cas, on a

$$\|\overrightarrow{b'}\| = \frac{|\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}|}{\|\overrightarrow{a}\|}.$$

□

Exercice 58. Calculer la norme de la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{b}$ sur le vecteur $\overrightarrow{a}$ dans chacun des cas suivants.

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

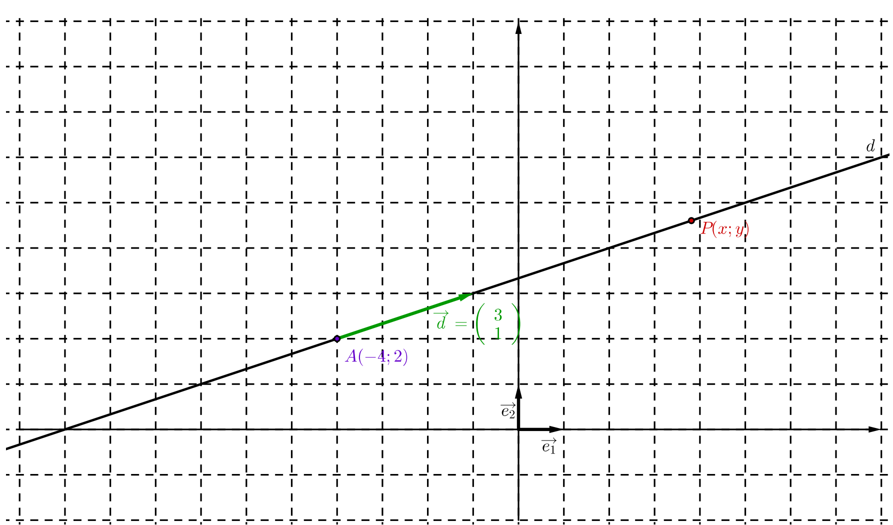
Exercice 59. Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{b}$ sur le vecteur $\overrightarrow{a}$ dans chacun des cas suivants.

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix}$

8 La droite dans le plan

8.1 Equation vectorielle d'une droite

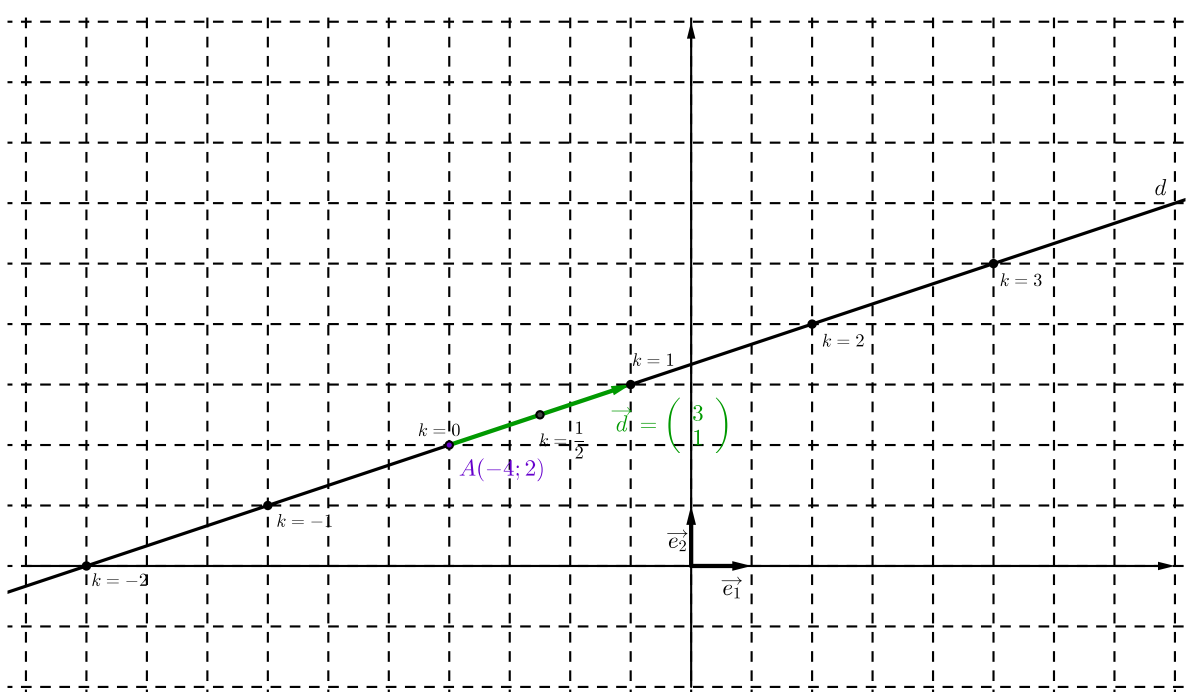
Soit la droite d passant par le point $A(-4; 2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Soit alors $P(x; y)$, un point quelconque de plan.
On constate que
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}.$$
Or P appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont parallèles.
Il existe donc un nombre réel k tel que
$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{d}.$$
La relation ci-dessus s'écrit donc
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{d}.$$
C'est-à-dire
$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

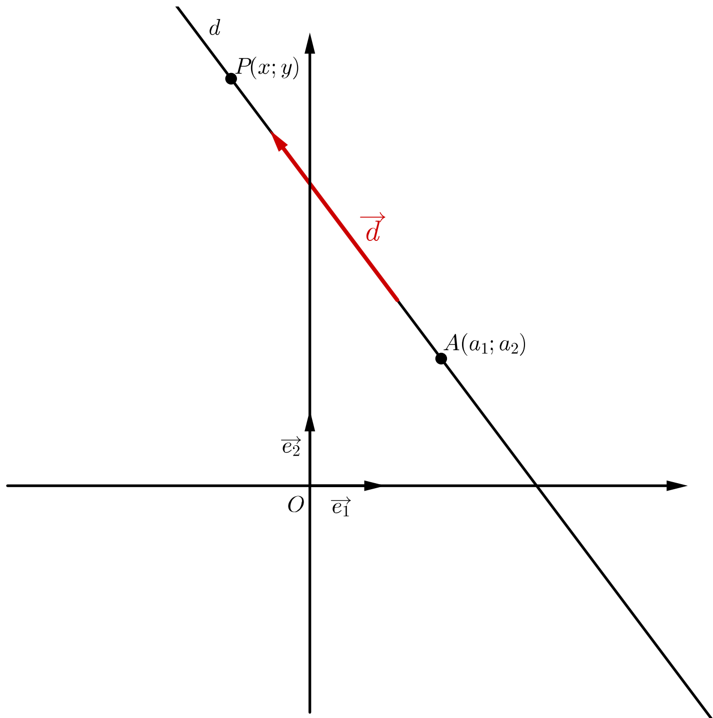
Remarque.

1. Il suffit donc d'un point A et d'un vecteur $\overrightarrow{d}$, pour définir une droite d. Le vecteur $\overrightarrow{d}$ donne la direction de la droite. C'est pour cette raison qu'on l'appelle *vecteur directeur* de d.
2. Il existe une infinité d'équations vectorielles équivalentes représentant toutes la même droite. On utilisera de préférence la forme la plus simple possible. Dans notre exemple, il aurait été possible de considérer par exemple le point $(-1; 3)$ et/ou le vecteur directeur $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. A toute valeur de k est associée un point de la droite, comme le montre la figure ci-dessous.



Définition. Soit la droite d passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{d}$. On appelle *équation vectorielle* de la droite d, la relation

$$\boxed{d : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{d}\,.}$$



Exercice 60. Soit la droite d passant par $A(-3; 1)$ et parallèle au vecteur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) déterminer une équation vectorielle de d ;

b) indiquer les points correspondant aux valeurs suivantes du paramètre k : 1 ; 0 ; 2 et -3.

Exercice 61. Déterminer une équation vectorielle de la droite d passant par $A(5; 2)$ et $B(8; -1)$. DOnner ensuite deux autres équations vectorielles de d.

8.2 Equations paramétriques d'une droite

Soit la droite d passant par le point $A(a_1; a_2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$. Son équation vectorielle est donnée par

$$d : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{d}\,.$$

En traduisant cette dernière relation en composantes, on obtient lesdites *équations paramétriques* de la droite :

$$\boxed{d : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a_1 + k \cdot d_1 \\ y & = & a_2 + k \cdot d_2 \end{array} \right. .}$$

Remarque. A toute valeur de paramètre k, la première équation associe une valeur unique de l'abscisse x et la seconde une valeur unique de l'ordonnée y d'un point $P(x;y)$ de la droite d.

Réciproquement, pour tout point $P(x;y)$ de la droite d, il existe une unique valeur du paramètre k pour laquelle les coordonnées x et y sont données par les deux équations ci-dessus.

Exercice 62. Donner des équations paramétriques de la droite d passant par le point $A(3;-4)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 63. Donner des équations paramétriques de la droite d passant par les points $A(4;2)$ et $B(2;-6)$.

Exercice 64. Soit la droite d passant par $A(4;-3)$ et admettant $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

a) donner des équations paramétriques de d ;

b) représenter dans le plan la droite d, ainsi que les points correspondant aux valeurs suivantes de k : -1, 3, 2 et $\frac{1}{2}$;

c) le point $C(12;-23)$ appartient-il à d ?

d) sachant que les points $D(16;a)$ et $E(b;37)$ appartiennent à la droite d, trouver les valeurs de a et b.

Exercice 65. Soit la droite d, décrite par les équations paramétriques $d : \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 3+k \\ y & = & -1-k \end{array} \right.$.

Déterminer les coordonnées du point de d

a) situé sur l'axe horizontal O_x ;

b) situé sur l'axe vertical O_y ;

c) d'abscisse égale à -3 ;

d) d'ordonnée égale à -5 ;

e) dont les deux coordonnées sont égales.

Exercice 66. Soit la droite d décrite par les équations paramétriques

$$d : \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -2+k \\ y & = & 1-3k \end{array} \right. .$$

Donner une représentation paramétrique de la droite g parallèle à d passant par le point $A(-1;1)$.

Exercice 67. Donner une représentation paramétrique de la droite d

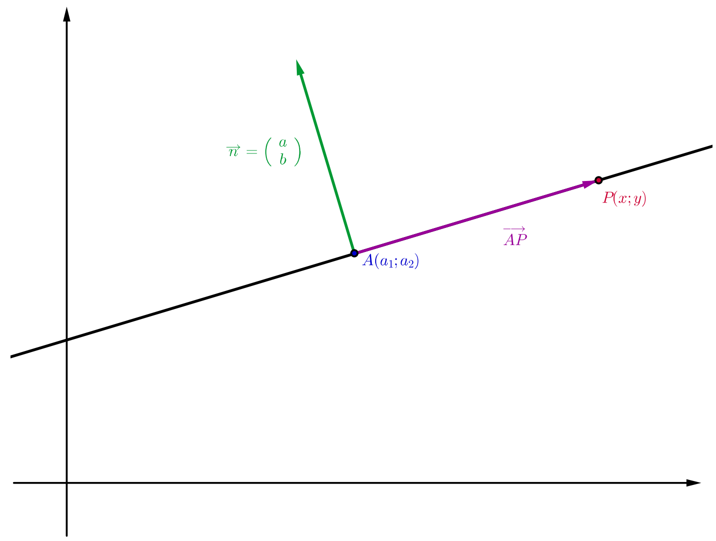
a) qui passe par $A(0;-2)$ et qui est parallèle à l'axe O_x ;

b) qui passe par $B(8;12)$ et qui est parallèle à l'axe O_y.

8.3 Equation implicite d'une droite

Soient la droite d du plan, $A(a_1;a_2)$ un point de d et $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur orthogonal à d (on dit que $\overrightarrow{n}$ est un *vecteur normal*).

Si $P(x;y)$ est un point quelconque de la droite d, alors le vecteur $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$, à l'image de ce qui figure ci-dessous.



On doit donc avoir $\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{AP} = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{AP} &= a(x-a_1) + b(y-a_2) \\ &= ax + by \underbrace{-aa_1 - ba_2}_{\overset{\text{déf}}{=} c} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, une droite d ayant $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme vecteur normal a pour *équation implicite (ou cartésienne)*

$$\boxed{d : ax + by + c = 0.}$$

Remarque.

1. Il est également possible de construire une équation implicite d'une droite à partir de ses équations paramétriques.

   En effet, soit la droite d passant par le point $A(a_1;a_2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$.

   Des équations paramétriques de d sont données par :

   $$d : \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& a_1 + k \cdot d_1 \\ y &=& a_2 + k \cdot d_2 \end{array} \right. .$$

   Eliminons alors le paramètre k, à l'aide de combinaisons linéaires :

   $$d : \left\{ \begin{array}{rclcl} x &=& a_1 + k \cdot d_1 & | & \cdot d_2 \\ y &=& a_2 + k \cdot d_2 & | & \cdot(-d_1) \end{array} \right.$$

   En multipliant par d_2 la première équation et par $-d_1$ la deuxième, puis en additionnant, on obtient :

   $$d_2x - d_1y = a_1d_2 - a_2d_1.$$

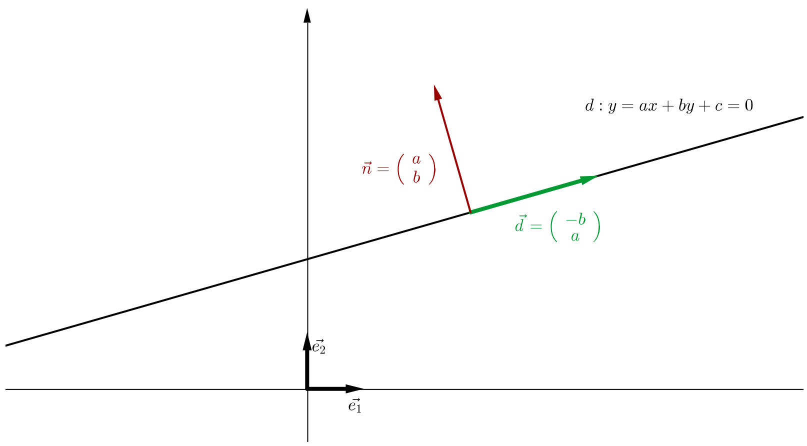
   L'expression ci-dessus s'écrit aussi

   $$d_2x - d_1y + a_2d_1 - a_1d_2 = 0.$$

En posant $a = d_2$, $b = -d_1$ et $c = a_2 d_1 - a_1 d_2$, cette dernière relation s'écrit

$$\boxed{P(x; y) \in d \Longleftrightarrow ax + by + c = 0.}$$

2. Si $d : ax + by + c = 0$ est l'équation implicite d'une droite d, alors
   (a) $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de d ;
   (b) $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à d. On dit alors que $\overrightarrow{n}$ est un *vecteur normal* de la droite d.



3. Il existe une infinité d'équations implicites équivalentes représentant toutes la même droite. On utilisera de préférence la forme la plus simple. Par exemple, $d : 2x - 3y + 5 = 0$ et $d : 4x - 6y + 10 = 0$ représentent la même droite.

Exercice 68. Les points ci-dessous appartiennent-ils à la droite d'équation $d : 5x - 2y - 11 = 0$?

a) $A(1; -3)$ b) $B(3; 2)$ c) $C(2; -4)$

Exercice 69. Trouver quatre points situés sur chacune des droites d suivantes, données par leurs équations implicites. Les dessiner.

a) $d : x + 2y - 12 = 0$ b) $d : 3x - 5y + 15 = 0$

Exercice 70. Soit la droite d d'équation implicite $d : 2x + 5y - 20 = 0$. Déterminer le point de d

a) situé sur l'axe O_x ;
b) situé sur l'aye O_y ;
c) qui possède une abscisse égale à 3 ;
d) qui possède une ordonnée égale à 15 ;
e) dont les deux coordonnées sont égales.

Exercice 71. Une droite d passe par le point $A(3; 2)$ et admet $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Donner une équation implicite de d.

Exercice 72. Donner une équation implicite de la droite d passant par les points $A(5;2)$ et $B(8;-1)$.

Exercice 73. Partant des équations paramétriques de la droite d ci-dessous, déterminer une équation implicite de d.

$$d : \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -4-5k \\ y &=& 6+7k \end{array} \right. .$$

Exercice 74. Partant de l'équation implicite, déterminer des équations paramétriques de la droite d ci-dessous.

$$d : 5x - 6y - 7 = 0.$$

Exercice 75. Soit $d : ax + by + c = 0$, une équation implicite d'une droite d. Que peut-on dire de la droite d dans les deux cas particuliers suivants :

a) $a = 0$ et $b \neq 0$;

b) $a \neq 0$ et $b = 0$?

Exercice 76. Déterminer une équation implicite de la droite perpendiculaire au segment AB avec $A(-5;2)$ et $B(6;-1)$ et qui passe par le point $C(-1;-2)$.

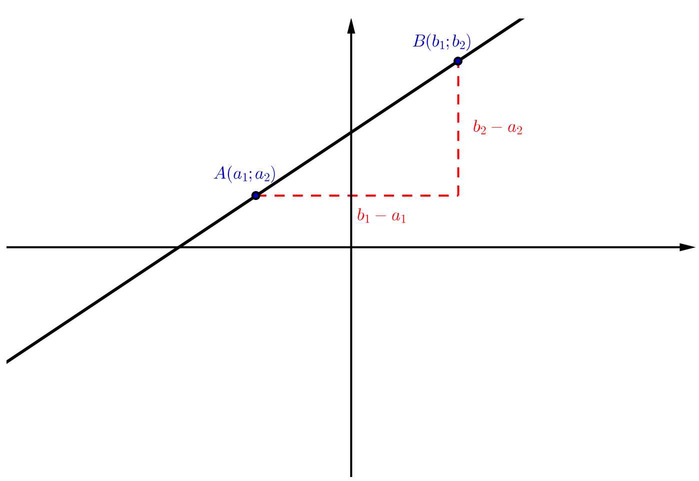
Exercice 77. Soit la droite d d'équation implicite $d : -2x + 3y - 1 = 0$. Déterminer une équation implicite de la droite g parallèle à d passant par le point $A(0;-2)$.

Exercice 78. Déterminer une équation implicite de la droite d_2 perpendiculaire à $d_1 : 4x + y - 3 = 0$ passant par le point $A(-3;5)$.

8.4 Pente d'une droite

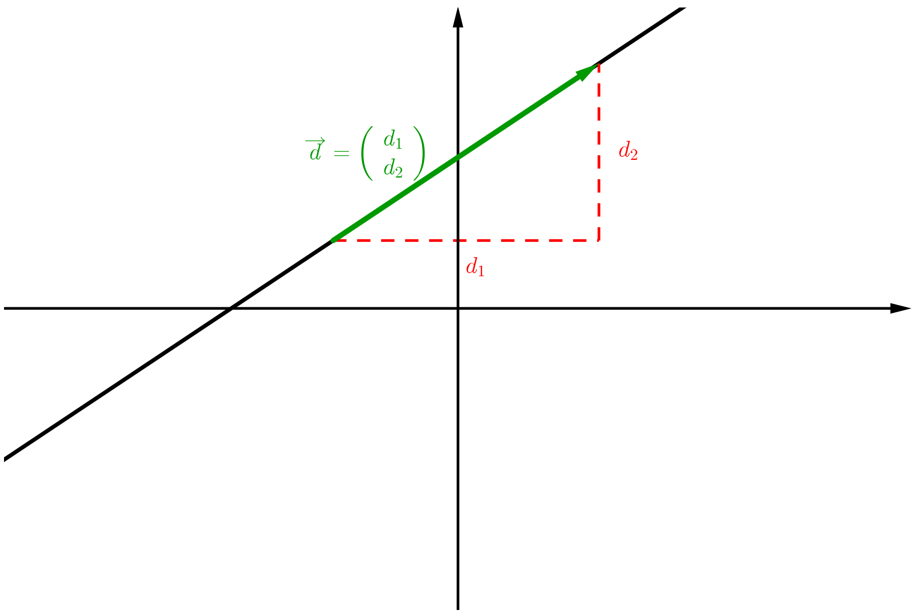
Définition. Soit la droite d passant par les points $A(a_1;a_2)$ et $B(b_1;b_2)$. On appelle *pente* de d, le nombre

$$\boxed{p = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}.}$$



Remarque. Si d est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, alors sa pente est donnée par

$$\boxed{p = \frac{d_2}{d_1}.}$$



Exercice 79. Calculer la pente de la droite d passant par $A(-5;3)$ et $B(7;3)$.

Exercice 80. Calculer la pente de la droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 17 \\ 51 \end{pmatrix}$.

Exercice 81. Quelle est la pente de la droite d d'équation implicite $d : 3x - 2y - 6 = 0$?

8.5 Equation explicite d'une droite

Soit la droite d d'équation implicite $d : ax + by + c = 0$, avec $b \neq 0$.
En isolons y, on obtient :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

En posons $p = -\dfrac{a}{b}$ et $h = -\dfrac{c}{b}$, cette dernière relation s'écrit

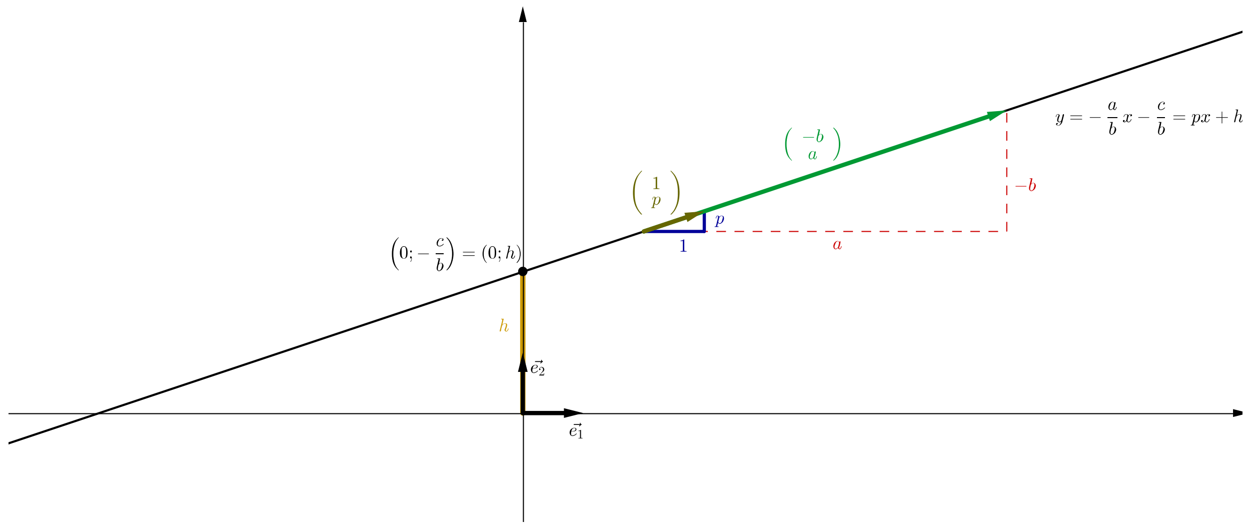
$$\boxed{P(x;y) \in d \Longleftrightarrow y = px + h.}$$

Définition. On appelle *équation explicite* d'une droite d, une relation de la forme

$$\boxed{d : y = px + h.}$$

Remarque. Si elle existe, l'équation explicite d'une droite est unique.

Remarque. Le coefficient h de l'équation explicite d'une droite correspond à *l'ordonnée à l'origine*, tandis que p est égal à la pente de d.



Théorème. *Si d est une droite d'équation explicite $d : y = px + h$, alors $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de d.*

Exercice 82. Quelle est l'équation explicite de la droite d d'équation implicite $d : 3x+4y-11 = 0$?

Exercice 83. Donner l'équation explicite de la droite d passant par le point $A(3;-4)$ et de pente 2.

Exercice 84. Donner l'équation explicite de la droite d passant par les points $A(1;-1)$ et $B(3;5)$.

Exercice 85. Montrer que deux droites du plan de pentes respectives p_1 et p_2 non nulles sont perpendiculaires si et seulement si $p_1p_2 = -1$.

Exercice 86. Donner une représentation paramétrique de la droite d d'équation explicite $d : y = 5x - 7$.

Exercice 87. Soient α l'angle que forme une droite avec l'axe O_x et p sa pente. Montrer que $p = \mathrm{tg}(\alpha)$.

Exercice 88. Compléter le tableau ci-dessous.

α			45°	60°	
p	10%	50%			300%

Exercice 89. Soit la droite d d'équation explicite $d : y = 4x - 5$. Déterminer l'équation explicite de la droite g parallèle à d passant par le point $A(3;2)$.

8.6 Position relative de deux droites

Exercice 90. Discuter la position relative des droites d et g ci-dessous, puis donner le ou les éventuels points d'intersection :

a) $d : \begin{cases} x &= 6+5k \\ y &= 3-2k \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x &= 5-3t \\ y &= -5+4t \end{cases}$;

b) $d : \begin{cases} x &= 4-5k \\ y &= 6+2k \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x &= 10t \\ y &= 2-4t \end{cases}$;

c) $d : 4x-3y-6=0$ et $g : 6x+y-20=0$;

d) $d : -4x+5y-17=0$ et $g : 8x-10y+34=0$;

e) $d : 2x-9y-8=0$ et $g : \begin{cases} x &= 16-4k \\ y &= -6+2k \end{cases}$;

f) $d : y=3x+6$ et $g : \begin{cases} x &= 3-3k \\ y &= 7-k \end{cases}$;

g) $d : 5x+3y-77=0$ et $g : y=-x+17$;

h) $d : 2x+3y+5=0$ et $g : \begin{cases} x &= 7-3k \\ y &= 3+2k \end{cases}$.

Exercice 91. Les supports des côtés d'un triangle sont les droites d'équation $c_1 : 4x+3y-5=0$, $c_2 : x-3y+10=0$ et $c_3 : x-2=0$. Déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle.

Exercice 92. On donne les équations de deux côtés d'un rectangle $c_1 : -2x+y-11=0$ et $c_2 : 2x-y-1=0$, ainsi que l'équation de l'une de ses diagonales $d_1 : y-3=0$. Déterminer les coordonnées des sommets de ce rectangle.

Exercice 93. On donne les équations de deux côtés d'un parallélogramme :

$$c_1 : x-2y-4=0;$$

$$c_2 : x+5y+24=0.$$

Et l'une de ses diagonales :

$$d_1 : 2x+3y+13=0.$$

Donner une équation implicite de la seconde diagonale et les coordonnées des sommets.

8.7 Angle entre deux droites

Exercice 94. Déterminer la valeur de langle aigu entre les droites d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 :: 5x-y=7$ et $d_2 : 3x+2y=0$;

b) $d_1 : x-y+7=0$ et $d_2 : \begin{cases} x &= 1+k \\ y &= 4+\sqrt{3}k \end{cases}$;

c) $d_1 = 3x-2y+7=0$ et $d_2 : 2x+3y-5=0$;

d) $d_1 : \sqrt{3}x-y+1=0$ et $d_2 : x-2=0$.

Exercice 95. Donner une équation implicite de la droite d_1 passant par le point

a) $P(3;-4)$ et formant avec la droite d_2 d'équation $d_2 : 3x+2y-5=0$ un angle de $45°$;

b) $P(-1;2)$ et formant avec la droite d_2 d'équation $d_2 : \sqrt{3}x-y-1=0$ un angle de $60°$.

8.8 Distance d'un point à une droite et projection orthogonale

Exercice 96. Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la projection orthogonale du point P sur la droite d, puis en déduire la distance du point P à la droite d.

a) $P(3;-2)$ et $d : 4x+3y+9=0$;

b) $P(14;-32)$ et $d : 5x-12y+53=0$;

c) $P(-4;6)$ et $d : -7x-9y+26=0$;

d) $P(11;-7)$ et $d : y=3x-20$

e) $P(3;8)$ et $d : \begin{cases} x &= 5+6k \\ y &= 2+2k \end{cases}$.

Exercice 97. Calculer la distance la plus courte entre les droites d_1 et d_2 ci-dessous.

a) $d_1 : 12x+5y-9=0$ et $d_2 : 24x+10y+30=0$;

b) $d_1 : x-2y+4=0$ et $d_2 : y=-x-12$;

c) $d_1 : \begin{cases} x &= 1+2k \\ y &= -3+k \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x &= -1-2t \\ y &= -4-t \end{cases}$.

Exercice 98. Calculer l'aire d'un rectangle connaissant le sommet $A(-2;1)$ ainsi que les équations de deux côtés non parallèles : $c_1 : 3x=2y+5$ et $c_2 : ax+3y+7=0$.

Exercice 99. Quelles sont les droites, passant par $A(1;1)$, dont la distance à $B(-6;2)$ est égale à 5 ?

Exercice 100. Déterminer les équations des droites qui passent par $P(-2;3)$ et qui sont équidistantes de $A(5;-3)$ et de $B(3;7)$.

Exercice 101. Déterminer les coordonnées de l'image du point $P(7;3)$ par la symétrie d'axe $d : 3x+5y-2=0$.

Exercice 102. Donner une équation implicite de la droite d' symétrique de la droite d par rapport à la droite g d'équation $g : x-y-1=0$.

8.9 Bissectrices de deux droites

Exercice 103. Donner des équations paramétriques des bissectrices des droites

$$d_1 : \begin{cases} x &= 8-3k \\ y &= -7+4k \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x &= 14+12t \\ y &= 6+5t \end{cases}.$$

Exercice 104. Donner des équations cartésiennes des bissectrices des droites

$$d_1 : \begin{cases} x &= 9-4k \\ y &= 6+3k \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x &= -3+24t \\ y &= 15-7t \end{cases}.$$

Exercice 105. Donner des équations cartésiennes des bissectrices des droites

$$d_1 : 3x-4y-1=0 \quad \text{et} \quad d_2 : -15x+8y+11=0.$$

Exercice 106. Donner des équations paramétriques de la bissectrice de l'angle aigu formé par les droites

$$d_1 : 5x+12y+2=0 \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x &= 10+4k \\ y &= -7-3k \end{cases}.$$

Exercice 107. Deux droites d_1 et d_2 ont pour bissectrice la droite b d'équation $b : 3x-2y+16=0$. Donner une équation cartésienne de d_1, sachant que d_2 a pour équation explicite $d_2 : y=\frac{1}{2}x+4$.

9 Application au triangle

Exercice 108. Soit le triangle ABC de sommets $A(3;1)$, $B(-2;5)$ et $C(-6;-1)$.

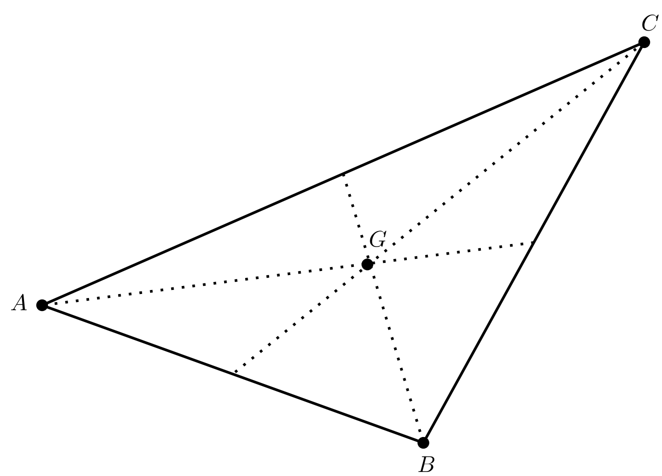
a) déterminer une équation implicite de la médiane issue de A ;

b) déterminer une représentation paramétrique de la médiane issue de B ;

c) en déduire les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

Théorème. *Soit un triangle ABC de sommets $A(a_2;a_2)$, $B(b_1;b_2)$ et $C(c_1;c_2)$. Alors les trois médianes du triangle se croisent en un point G, appelé centre de gravité, et donné par*

$$\boxed{G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right).}$$



Exercice 109. Prouver le théorème ci-dessus.

Exercice 110. Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC, de sommets $A(-4;2)$, $B(1;3)$ et $C(2;5)$.

Exercice 111. Déterminer les coordonnées du troisième sommet C d'un triangle ABC dont on connaît $A(6;-1)$, $B(-2;6)$ et le centre de gravité $G(3;4)$.

Exercice 112. Soit le segment AB où $A(3;1)$, et $B(7;3)$. Donner une équation implicite

a) de la droite perpendiculaire à AB et passant par A ;

b) de la médiatrice du segment AB.

Exercice 113. Déterminer des équations implicites des hauteurs et des médiatrices du triangle ABC de sommets $A(5;3)$, $B(6;-2)$ et $C(-3;-8)$.

Exercice 114. Soit le triangle ABC où $A(4;-4)$, $B(1;7)$ et $C(-2;8)$.

a) déterminer une représentation paramétrique de la hauteur h_A issue de A ;

b) en déduire les coordonnées du point H, pied de la hauteur h_A.

Exercice 115. Soit le triangle ABC de sommets $A(-1;2)$, $B(1;-4)$ et $C(7:4)$.

a) donner des équations paramétriques des trois hauteurs ;

b) montrer que les trois hauteurs se coupent en un seul point H ;

c) déterminer les coordonnées du point M, centre du cercle circonscrit au triangle ;

d) déterminer les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ;

e) montrer que les points H, M et G sont alignés [6].

Exercice 116. Soit le triangle ABC de sommets $A(8;-30)$, $B(-16;2)$ et $C(8;20)$.

a) donner des équations cartésiennes des trois bissectrices de ce triangle ;

b) donner le centre et le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.

Exercice 117. On donne le sommet $A(6;12)$ d'un triangle ABC ainsi que deux de ses hauteurs $h_B : 2x + 7y - 65 = 0$ et $h_C : 2x - 5y + 17 = 0$. Déterminer les coordonnées des deux autres sommets de ce triangle.

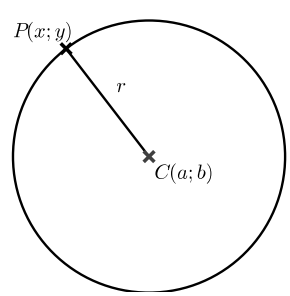
Exercice 118. Déterminer les équations des côtés d'un triangle ABC connaissant $C(4;-1)$ ainsi que les équations de la hauteur $h_A : 2x - 3y + 12 = 0$ et de la médiane $m_A : 2x + 3y = 0$ issue du sommet A.

10 Le cercle dans le plan

10.1 Equation d'un cercle

Définition.

1. On appelle *cercle* $\mathcal{C}$ de centre $C(a;b)$ et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble des points $P(x;y)$ du plan situés à distance r de C.
2. On appelle *disque* $\mathcal{D}$ de centre $C(a;b)$ et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble des points $P(x;y)$ du plan situés à distance inférieure ou égale à r de C.



Exercice 119.

a) parmi les points $A(-1;2)$, $B(2,9;0,1)$, $D(6,5;1,5)$ et $E(3;0)$, lesquels appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre $C(3;5)$ et de rayon 5 ?

b) donner une équation qui caractérise les points $P(x;y)$ qui sont sur $\mathcal{C}$;

c) généraliser ce résultat en donnant l'équation d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $C(a;b)$ et de rayon r.

6. On appelle cette droite *droite d'Euler*.

Théorème. *Un cercle $\mathcal{C}$, respectivement un disque $\mathcal{D}$ de centre $C(a;b)$ et de rayon $r \geq 0$ a pour équation canonique*

$$\boxed{}$$

respectivement

$$\boxed{}$$

Exercice 120. Donner l'équation du cercle

a) centré en $C(-3;5)$ et de rayon 6 ;
b) centré à l'origine et passant par le point $A(-2;7)$;
c) de centre $C(-3;5)$ et passant par l'origine ;
d) de centre $C(4;2)$ et passant par le point $A(2;-3)$;
e) de diamètre AB avec $A(3;2)$ et $B(-1;6)$;
f) centré à l'origine et tangent à la droite d d'équation $d : 3x+4y-15=0$;
g) passant par les points $A(3;1)$ et $B(-1;3)$ et ayant son centre sur la droite d d'équation $d : 3x-y-2=0$;
h) passant par les points $A(-3;-1)$, $B(4;-2)$ et $C(1;7)$.

Exercice 121. Soit le cercle $\mathcal{C}$ de rayon 5 et de centre $C(-4;0)$.

a) donner l'équation de $\mathcal{C}$;
b) déterminer les cooronnées des éventuels points d'intersection avec les axes O_x et O_y ;
c) le point $P(-1;-3)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?

Exercice 122. Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'équartion proposée est celle d'un cercle. Si oui, en donner le centre et le rayon.

a) $(x-5)^2+(y+8)^2=121$
b) $x^2+y^2-6x+4y=3$
c) $x^2+y^2-4x-6y-3=0$
d) $x^2+y^2-14x-10y+70=0$
e) $x^2+y^2+4x-10y-35=0$
f) $4x^2+4y^2-4x+8y-59=0$
g) $9x^2+4y^2+6x+4y=18$
h) $x^2+y^2+10x-11=0$
i) $x^2+y^2-35=0$
j) $x^2+y^2-6x-8y+25=0$
k) $x^2+y^2+4x-6y+25=0$
l) $3x^2+3y^2+16x-12y=0$

10.2 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Soient un cercle $\mathcal{C}$ de centre C et de rayon r ainsi qu'une droite d. Pour situer la droite d par rapport au cercle $\mathcal{C}$, on compare la distance $\delta(C;d)$ du centre C à la droite d avec le rayon r.

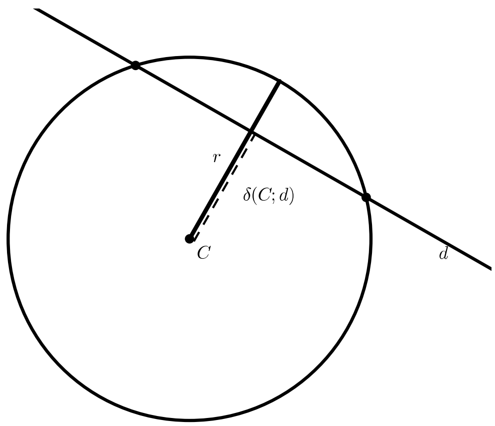


FIGURE 3 – $\delta(C;d) < 0 \Leftrightarrow$ la droite d est sécante à $\mathcal{C}$ (deux points d'intersection).

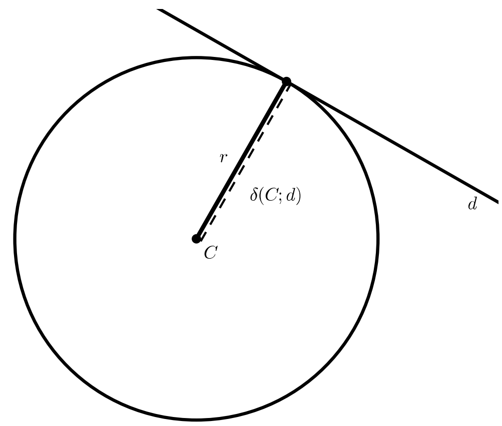


FIGURE 4 – $\delta(C;d) = 0 \Leftrightarrow$ la droite d est tangente à $\mathcal{C}$ (un point d'intersection).

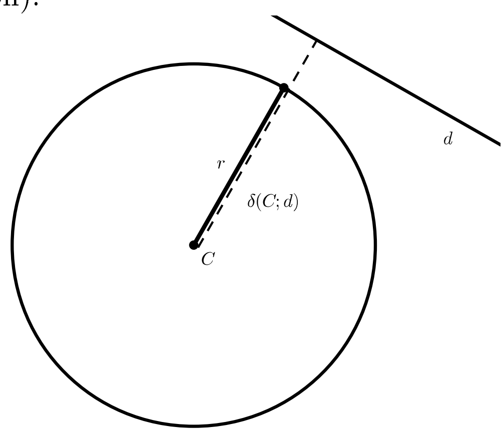


FIGURE 5 – $\delta(C;d) > 0 \Leftrightarrow$ la droite d est extérieure à $\mathcal{C}$ (aucun point d'intersection).

Pour déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection de d et $\mathcal{C}$, on peut résoudre par substitution le système formé apr les équations du cercle et de la droite.

Exercice 123. Discuter la position relative de la droite et du cercle dans les cas suivants :

1. $d_1 : y = -x + 2$ et $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x = 0$;
2. $d_2 : 2x - y + 7 = 0$ et $\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$;
3. $d_3 : 4y - 3x - 24 = 0$ et $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$.

Exercice 124. Soit le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 10x - 16 = 0$ Pour quelle(s) valeur(s) de m la droite $d : y = mx$

a) est-elle tangente à ce cercle ?
b) coupe-t-elle ce cercle ?

10.3 Position relative de deux cercles

Exercice 125. On considère les deux cercles $\mathcal{C}_1 : (x+9)^2+(y-12)^2 = 180$ et $\mathcal{C}_2 : x^2+y^2 = 45$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

10.4 Tangente à un cercle

Exercice 126. Dans chacun des cas suivants, on donne un cercle $\mathcal{C}$ et un point A. Après avoir vérifié que A appartient à $\mathcal{C}$, donner une équation implicite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A.

a) $\mathcal{C}_1 : (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ et $A(-2;1)$;

b) $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 37$ et $A(3;4)$;

c) $\mathcal{C}_3 : x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$ et $A(2\sqrt{2}; 2+2\sqrt{2})$;

d) $\mathcal{C}_4 : 3x^2 + 3y^2 - 7x + 12y = 28$ et $A(5;-2)$.

Exercice 127. Soit le cercle $\mathcal{C}$ centré en $C(5;0)$ et passant par O. Donner des équations paramétriques de la (des) tangente(s) à ce cercle au point d'abscisse 1.

Exercice 128. Déterminer des équations implicites des tangentes au cercle $\mathcal{C}$ d'équation $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ aux points d'intersection de ce cercle avec les axes de coordonnées.

11 Aire d'un parallélogramme

Définition. On appelle *déterminant* d'ordre 2 associé aux vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, le nombre noté $\text{Dét}(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})$, défini par

$$\boxed{\text{Dét}(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.}$$

Exercice 129. Calculer les déterminants ci-dessous.

a) $\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}$

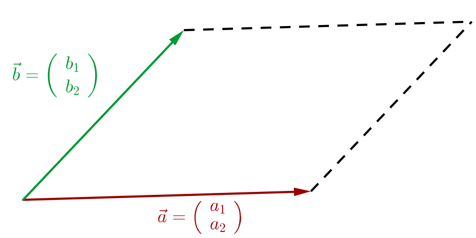
b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 13 & 16 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a_1 & k \cdot a_1 \\ a_2 & k \cdot a_2 \end{vmatrix}$

Théorème. *L'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est donné par*

$$\boxed{A = \left| \textit{Dét}\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right) \right|.}$$



Exercice 130. Prouver le théorème ci-dessus.

Exercice 131. Calculer l'aire du parallélogramme de sommets $A(2;-5)$, $B(4,3)$ et $C(-8;-1)$, puis celle du triangle ABC.

Solutions

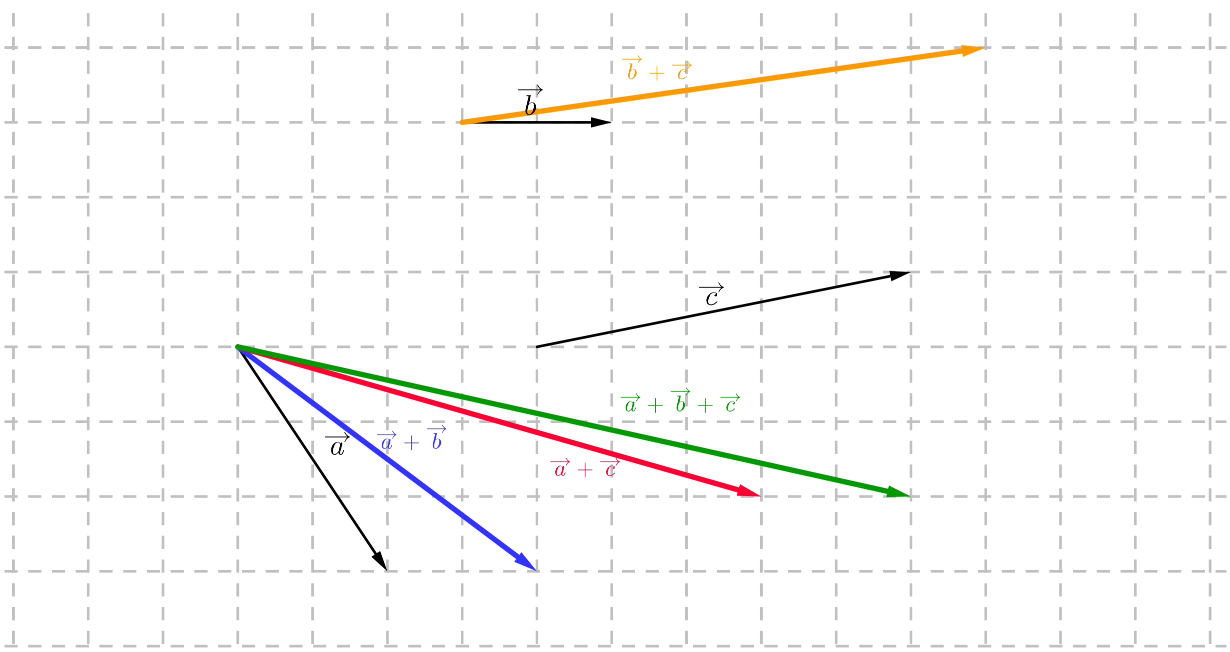
Exercice 1.

$\vec{a}$, $\vec{g}$ et $\vec{n}$;
$\vec{b}$, $\vec{h}$ et $\vec{m}$;
$\vec{c}$;
$\vec{d}$;
$\vec{e}$ et $\vec{r}$;
$\vec{f}$, $\vec{k}$ et $\vec{p}$;
$\vec{i}$, $\vec{l}$ et $\vec{q}$;
$\vec{j}$ et $\vec{o}$.

Exercice 2.

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FA}$;
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AF}$;
$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$;
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BA}$;
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$;
$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC}$;

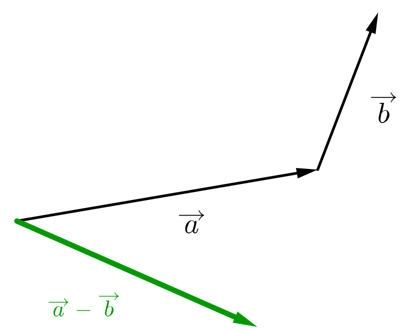
Exercice 3.



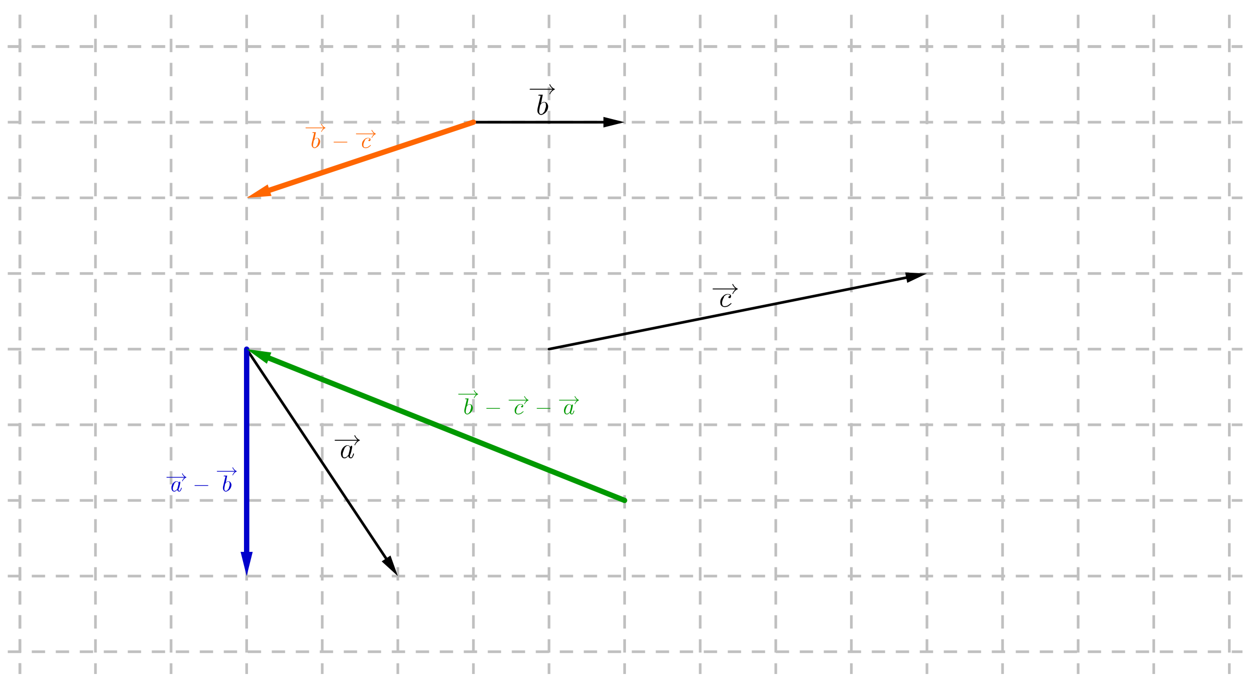
Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6.



Exercice 7.



Exercice 8.

a) $\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{DC}$

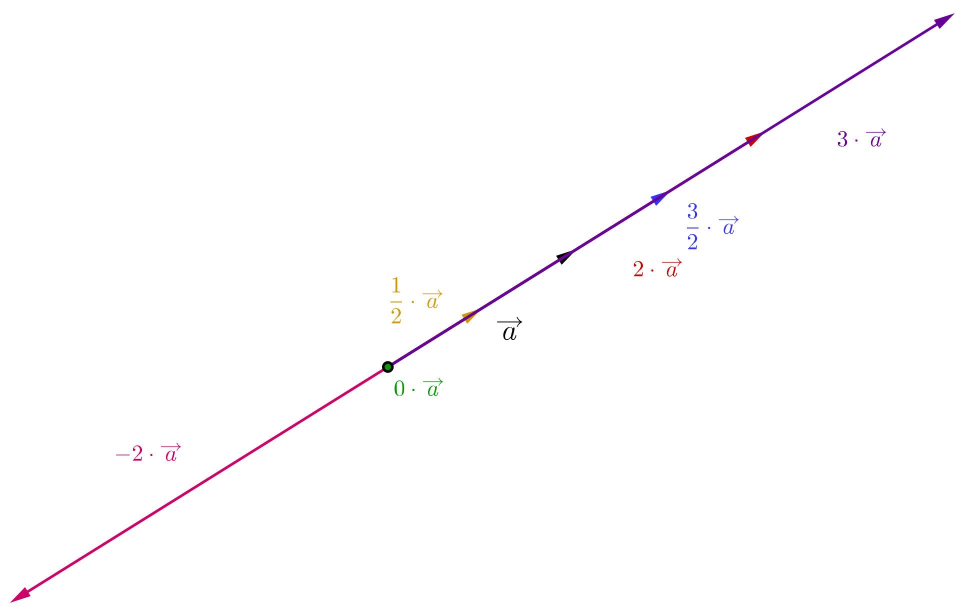
c) $\overrightarrow{0}$

d) $\overrightarrow{DA}$

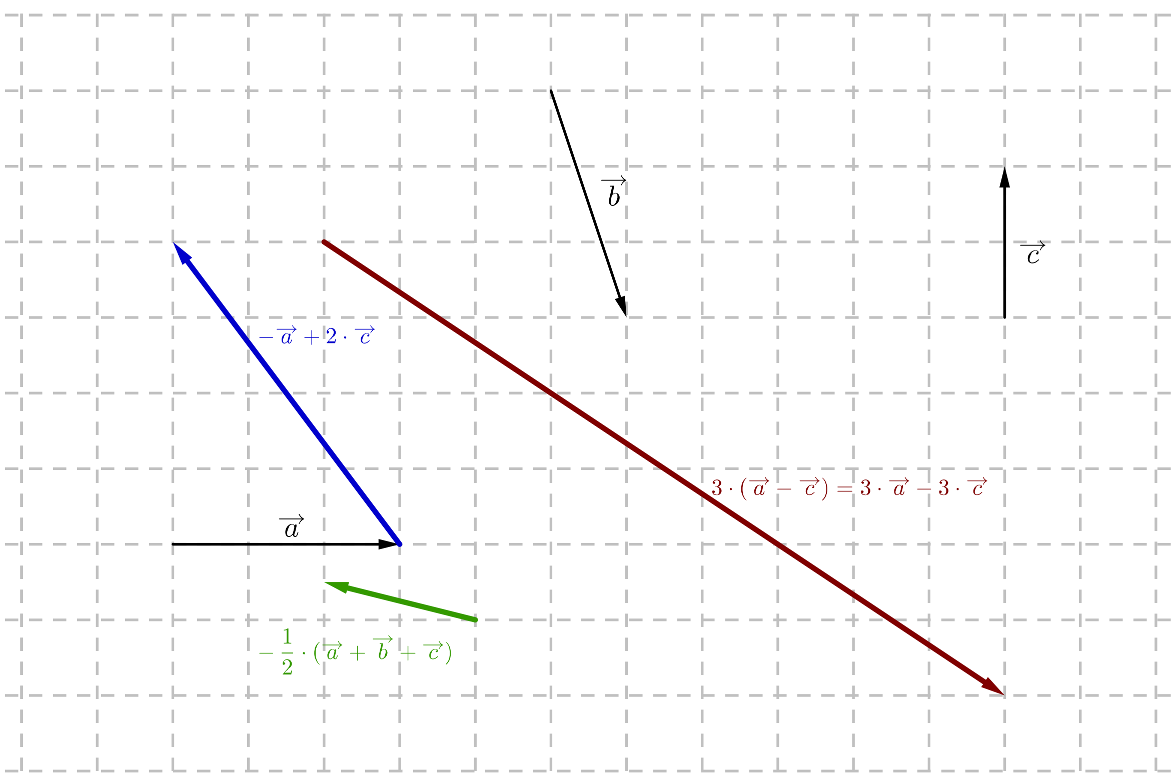
e) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AC}$

f) $\overrightarrow{0}$

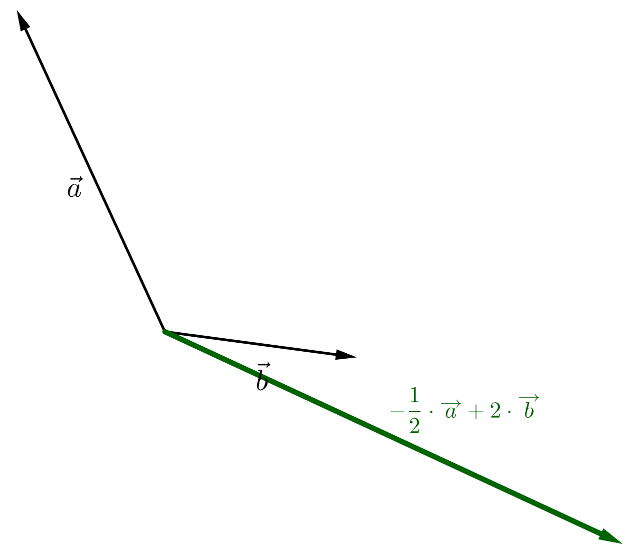
Exercice 9.



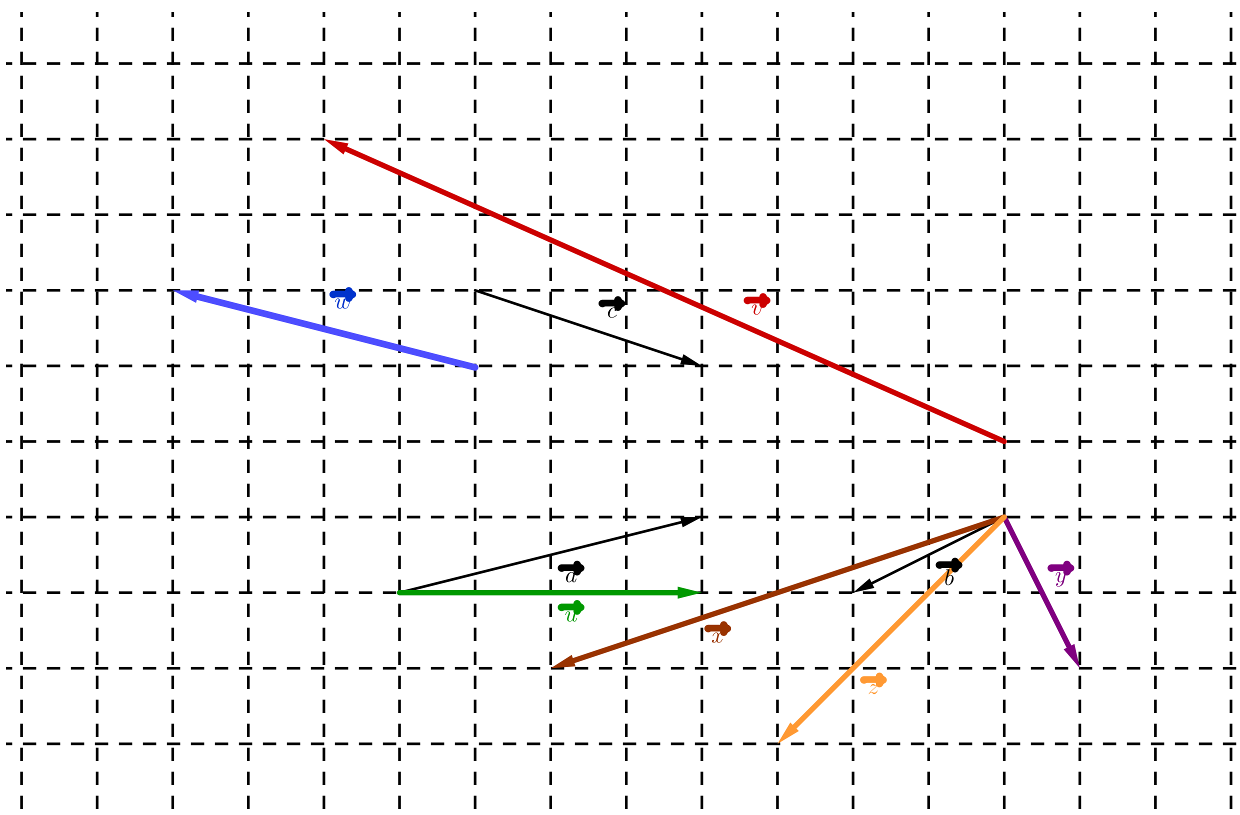
Exercice 10.



Exercice 11.



Exercice 12.



Exercice 13.

Exercice 14.

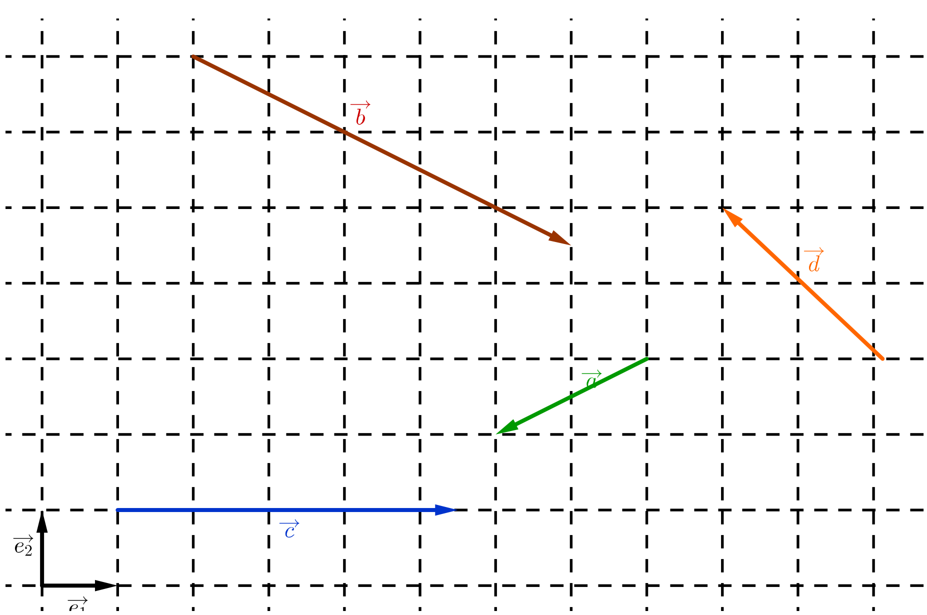
Exercice 15.

$$\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}\,;$$
$$\overrightarrow{AD} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AD}\,;$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}\,;$$
$$\overrightarrow{AQ} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}\,;$$
$$\overrightarrow{AN} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}\,;$$
$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AD}\,;$$
$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}\,;$$
$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}\,;$$
$$\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}\,;$$
$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} - 1 \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Exercice 16.

$$\overrightarrow{a} = 6 \cdot \overrightarrow{e_1} - 2 \cdot \overrightarrow{e_2}\,;$$
$$\overrightarrow{b} = 0 \cdot \overrightarrow{e_1} - 4 \cdot \overrightarrow{e_2}\,;$$
$$\overrightarrow{c} = -5 \cdot \overrightarrow{e_1} - 3 \cdot \overrightarrow{e_2}\,;$$
$$\overrightarrow{d} = - \cdot \overrightarrow{e_1} + 8 \cdot \overrightarrow{e_2}.$$

Exercice 17.

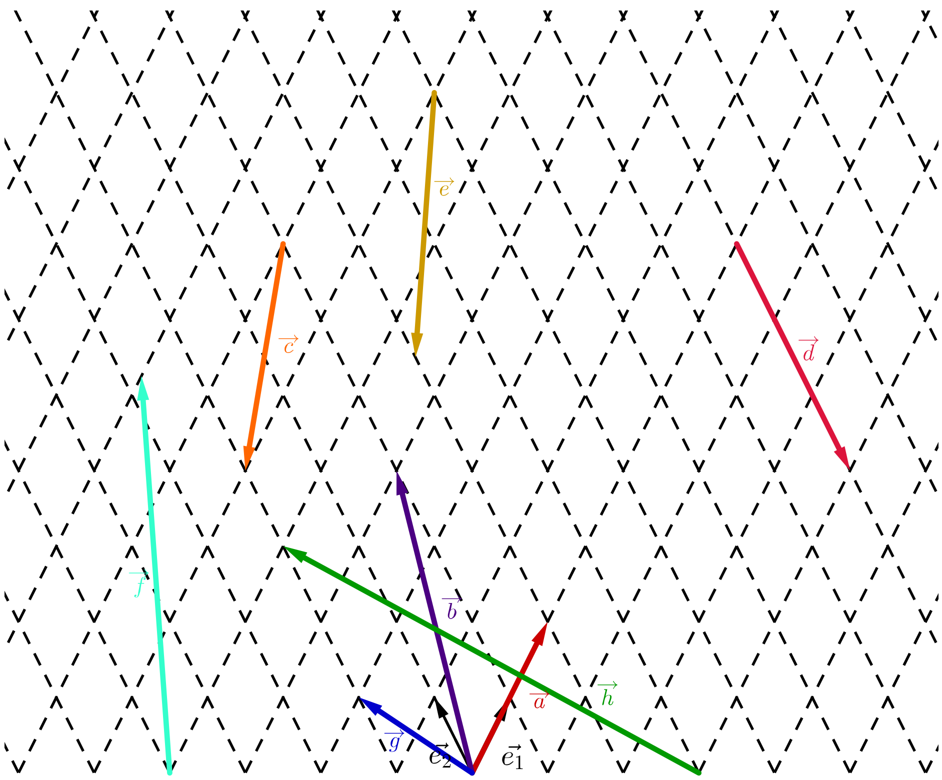


Exercice 18.

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 19.



Exercice 20.

Exercice 21.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ -17 \end{pmatrix};$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{35}{4} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 23.

a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -41 \\ 27 \end{pmatrix}$

Exercice 24. $\vec{a} \parallel \vec{d} \parallel \vec{e} \parallel \vec{h}$, $\vec{b} \parallel \vec{e} \parallel \vec{i}$, $\vec{c} \parallel \vec{e} \parallel \vec{g}$ et $\vec{f} \parallel \vec{e}$.

Exercice 25. $\alpha = 3$ et $\beta = 2$.

Exercice 26.

a) $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$;
b) impossible ;
c) infinité de possibilités.

Exercice 27. $m = 3$, $m = -1$.

Exercice 28. $A(-5;-2)$, $B(2;4)$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 29.

a)
b)

$M(1;3)$ $N(-3;0)$ $P(0;-4)$ $Q\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ $R(2;-1)$

$S\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ $T\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ $U\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$ $V\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$

Exercice 30. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \end{pmatrix}$.

Exercice 31.

Exercice 32. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 33. non.

Exercice 34. $x = 1$, $x = \dfrac{32}{7}$.

Exercice 35. $D(-10;9)$.

Exercice 36. $D(1;-3)$.

Exercice 37. $x = 5$, $y = 6$.

Exercice 38. $x = -12$.

Exercice 39. $M(1;3)$.

Exercice 40. 5.

Exercice 41. $\|\overrightarrow{AB}\| = 13$.

Exercice 42.

Exercice 43. $\sqrt{281}$.

Exercice 44. $P = \sqrt{146} + \sqrt{58} + \sqrt{68} \cong 27,945$.

Exercice 45.

a) $\overrightarrow{a} \parallel \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{b} \parallel \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{73}} \\ \frac{8}{\sqrt{73}} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{73}} \\ -\frac{8}{\sqrt{73}} \end{pmatrix}$.

Exercice 46.

a) $\begin{pmatrix} \frac{9}{15} \\ -\frac{12}{15} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\frac{9}{15} \\ \frac{12}{15} \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 47. $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = -8$, $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{c} = 0$, $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{e} = -9$, $\overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{a} = -8$, $\overrightarrow{d} \bullet \overrightarrow{e} = 0$, $\overrightarrow{c} \bullet \overrightarrow{d} = -9$ et $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \bullet \left(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}\right) = 24$.

Exercice 48. $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = -5$, $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = -15$ et $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BA} = 15$.

Exercice 49. non.

Exercice 50.

Exercice 51. $k = \frac{3}{4}$.

Exercice 52. par exemple $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Exercice 53. $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Exercice 54. $k = \frac{3}{2}$, $k = \frac{13}{2}$, $k = 2$ et $k = 4$ (isocèle dans ce dernier cas).

Exercice 55.

Exercice 56.

a) $45°$;

b) $\sim 138,18°$;

c) $90°$.

Exercice 57. $\alpha \cong 25,52°$, $\beta \cong 38,35°$ et $\gamma \cong 116,13°$.

Exercice 58.

a) $\dfrac{9}{5}$ b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Exercice 59.

a) $\begin{pmatrix} 3,52 \\ 2,64 \end{pmatrix}$ b) $\dfrac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} -155 \\ -93 \end{pmatrix}$

Exercice 60.

a) $d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$;

b) k : $(2;3)$, $(-3;1)$, $(7;5)$ et $(-18;-5)$.

Exercice 61. Par exemple $d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 62.

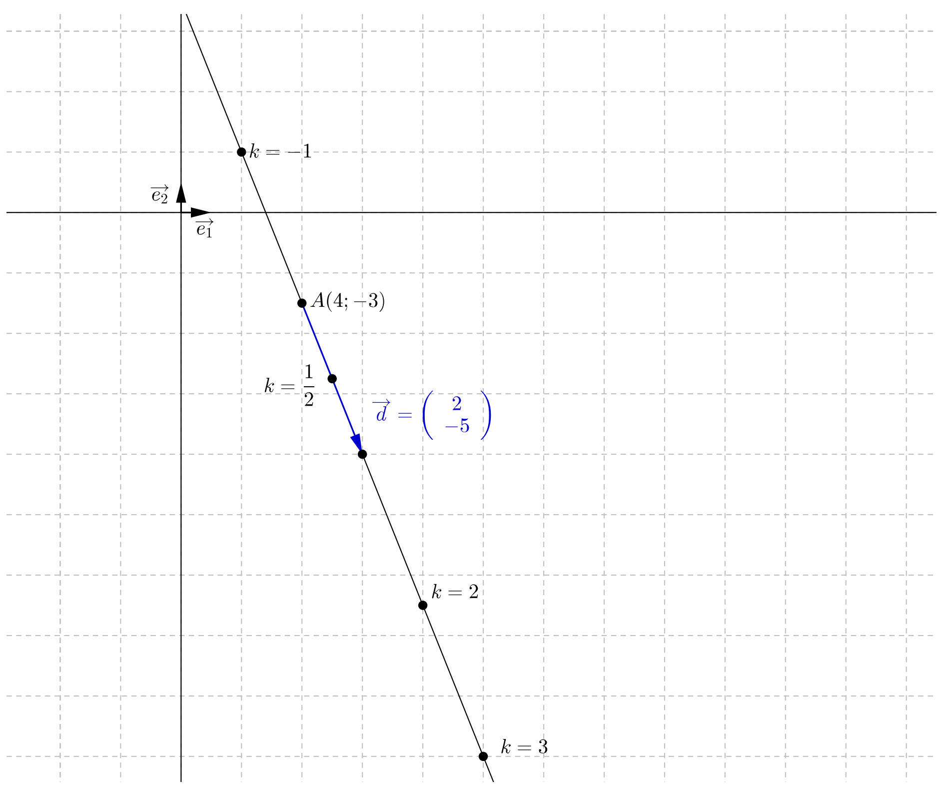
$$d : \begin{cases} x = 3 - k \\ y = -4 + 7k \end{cases}.$$

Exercice 63. $d : \begin{cases} x = 4 + k \\ y = 2 + 4k \end{cases}.$

Exercice 64.

a) $d : \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = -3 - 5k \end{cases}$;

b) graphiquement :



c) oui ;

d) $a = -33$ et $b = -12$.

Exercice 65.

a) $(2;0)$;
b) $(0;2)$;
c) $(-3;5)$;
d) $(7;-5)$;
e) $(1;1)$.

Exercice 66. $d:\begin{cases} x = -1+k \\ y = 1-3k \end{cases}$.

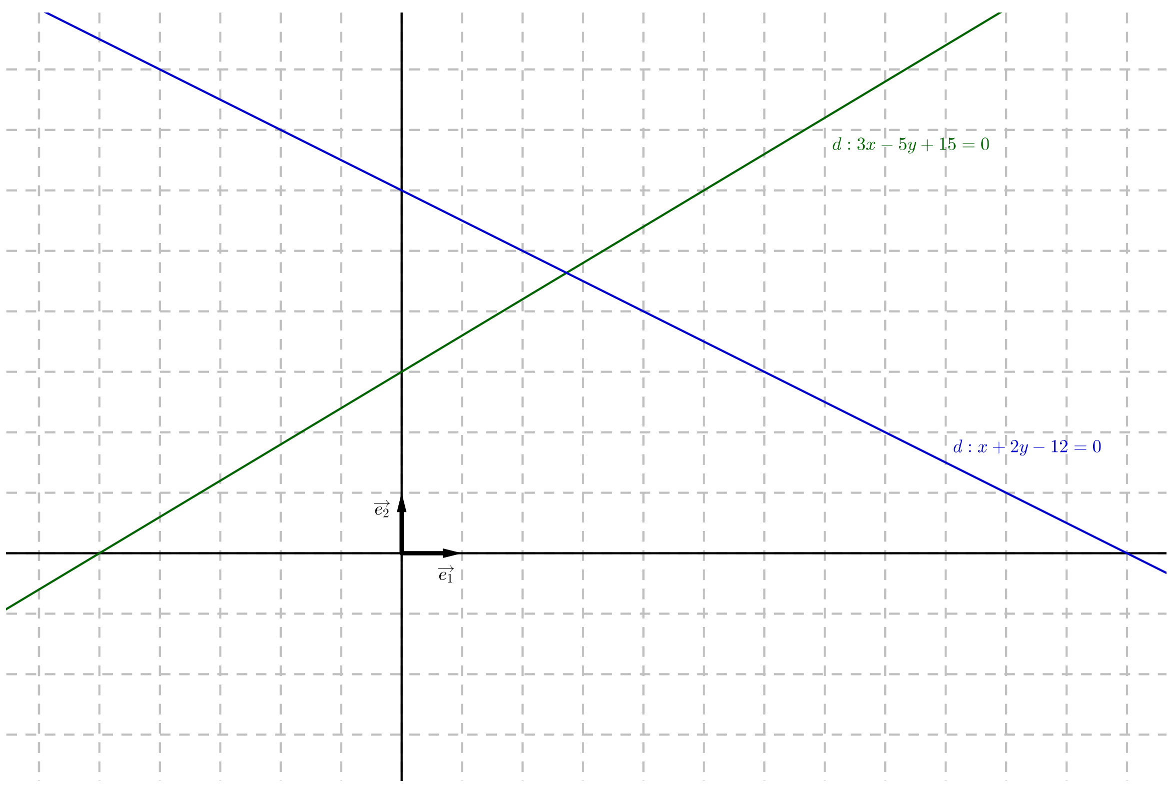
Exercice 67.

a) $d:\begin{cases} x = +k \\ y = -2 \end{cases}$;
b) $d:\begin{cases} x = 8 \\ y = 12+k \end{cases}$.

Exercice 68.

a) oui b) oui c) non

Exercice 69.



Exercice 70.

a) $(10;0)$;
b) $(0;4)$;

c) $\left(3; \frac{14}{5}\right)$;
d) $\left(-\frac{55}{2}; 15\right)$;
e) $\left(\frac{20}{7}; \frac{20}{7}\right)$.

Exercice 71. $d : 5x - 3y - 9 = 0$.

Exercice 72. $x + y - 7 = 0$.

Exercice 73. $d : 7x + 5y - 2 = 0$.

Exercice 74. par exemple $d : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 6k \\ y & = & -\dfrac{7}{6} + 5k \end{array} \right.$.

Exercice 75.

a) horizontale ;
b) verticale.

Exercice 76. $d : 11x - 3y + 5 = 0$.

Exercice 77. $d : -2x + 3y + 6 = 0$.

Exercice 78. $d_2 : x - 4y + 23 = 0$.

Exercice 79. $p = 0$.

Exercice 80. $p = 3$.

Exercice 81. $p = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 82. $d : y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{11}{4}$.

Exercice 83. $d : y = 2x - 10$.

Exercice 84. $d : y = 3x - 4$.

Exercice 85.

Exercice 86. par exemple $d : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & k \\ y & = & -7 + 5k \end{array} \right.$.

Exercice 87.

Exercice 88.

α	$\sim 5,71°$	$\sim 8,53°$	$45°$	$60°$	$\sim 71,57°$
p	10%	50%	100%	$\sim 173,21\%$	300%

Exercice 89. $d : y = 4x - 10$.

Exercice 90.

a) sécantes (point d'intersection $I(-4;7)$) ;
b) strictement parallèles ;
c) sécantes (point d'intersection $I(3;2)$) ;
d) confondues ;
e) sécantes (point d'intersection $I(4;0)$) ;
f) sécantes (point d'intersection $I(0;6)$) ;
g) sécantes (point d'intersection $I(13;4)$) ;
h) strictement parallèles.

Exercice 91. $A(2;-1)$, $B(-1;3)$ et $C(2;4)$.

Exercice 92. $A(-3;5)$, $B(-4;3)$, $C(0;1)$ et $D(1;3)$.

Exercice 93. $d_2 : y+4=0$ et $A(-4;4)$, $B(1;-5)$, $C(3;-4)$ et $D(-2;-3)$.

Exercice 94.

a) $45°$;
b) $15°$;
c) $90°$;
d) $30°$.

Exercice 95.

a) $d_1 : 5x-y-19=0$ ou $d_1 : x+5y+17=0$;
b) $d_1 : \sqrt{3}x+y+\sqrt{3}-2=0$ ou $d_1 : y-2=0$.

Exercice 96.

a) $P'\left(\frac{3}{5};-\frac{19}{5}\right)$ et $\delta(P;d)=3$;
b) $P'(-1;4)$ et $\delta(P;d)=39$;
c) $P'(-4;6)$ et $\delta(P;d)=0$;
d) $P'(5;-5)$ et $\delta(P;d)=\sqrt{40}$;
e) $P'(5;2)$ et $\delta(P;d)=\sqrt{40}$;

Exercice 97.

a) $\delta(d_1;d_2)=\frac{24}{13}$;
b) $\delta(d_1;d_2)=0$;
c) $\delta(d_1;d_2)=0$;

Exercice 98. 6.

Exercice 99. $d_1 : 4x+3y-7=0$ et $d_2 : 3x-4y+1=0$.

Exercice 100. $d_1 : 5x+y+7=0$ et $d_2 : x+6y-16=0$.

Exercice 101. $P'(1;-7)$.

Exercice 102. $d' : 2x-5y+4=0$.

Exercice 103.

$$b_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2+3k \\ y & = & 1+11k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad b_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2-11k \\ y & = & 1+3k \end{array} \right. .$$

Exercice 104.

$$b_1 : 2x-y+21=0 \quad \text{et} \quad b_2 : x+2y-27=0.$$

Exercice 105.

$$b_1 : 7x-6y-4=0 \quad \text{et} \quad b_2 : 12x+14y+19=0.$$

Exercice 106. $b : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2+7k \\ y & = & -1-3k \end{array} \right. .$

Exercice 107. $d_1 : 29x-2y+120=0$.

Exercice 108.

a) $m_A : x+7y-10=0$;

b) $m_B : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2+k \\ y & = & 5-10k \end{array} \right.$;

c) $G\left(-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Exercice 109.

Exercice 110. $G\left(-\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$.

Exercice 111. $C(5;7)$.

Exercice 112.

a) $d : 2x+y-7=0$;

b) $m_{AB} : 2x+y-12=0$.

Exercice 113.

$m_{AB} : x-5y-3=0$;
$m_{AC} : 16x+22y+39=0$;
$m_{BC} : 6x+4y+11=0$;
$h_A : 3x+2y-21=0$;
$h_B : 8x+11y-26=0$;
$h_C : x-5y-37=0$.

Exercice 114.

a) $h_A : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 4-5k \\ y & = & -4+k \end{array} \right.$;

b) $H(-1;-3)$.

Exercice 115.

a) $h_A : \begin{cases} x = -1-4k \\ y = 2+3k \end{cases}$, $h_B : \begin{cases} x = 1+k \\ y = -4-4k \end{cases}$ et $h_C : \begin{cases} x = 7+3k \\ y = 4+k \end{cases}$

b) $H\left(-\frac{5}{13}; \frac{20}{13}\right)$;

c) $M\left(\frac{48}{13}; \frac{3}{13}\right)$;

d) $G\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)$;

e)

Exercice 116.

a) $b_1 : 3x + y + 6 = 0$, $b_2 : x + 7y + 2 = 0$ et $b_3 : 2x - y + 4 = 0$;

b) rayon : $r = 10$; centre du cercle inscrit : $I(-2; 0)$.

Exercice 117. $B(8; 7)$ et $C(4; 5)$.

Exercice 118. $c_1 : 3y + 2y - 10 = 0$, $c_2 : 3x + 7y - 5 = 0$ et $c_3 : 9x + 11y + 5 = 0$.

Exercice 119.

a) A et E ;

b) $\mathcal{C} : (x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$;

c) $\mathcal{C} : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Exercice 120.

a) $\mathcal{C} : (x+3)^2 + (y-5)^2 = 36$;

b) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 53$;

c) $\mathcal{C} : (x+3)^2 + (y-5)^2 = 34$;

d) $\mathcal{C} : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 29$;

e) $\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$;

f) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 9$;

g) $\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$;

h) $\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Exercice 121.

a) $\mathcal{C} : (x+4)^2 + y^2 = 25$;

b) $I_1(0; 3)$, $I_2(0; -3)$, $I_3(-9; 0)$ et $I_4(1; 0)$;

c) non.

Exercice 122.

a) oui, $C(5; -8)$, $r = 11$	g) non
b) oui, $C(3; -2)$, $r = 4$	h) oui, $C(-5; 0)$, $r = 6$
c) oui, $C(2; 3)$, $r = 4$	i) oui, $C(0; 0)$, $r = \sqrt{35}$
d) oui, $C(7; 5)$, $r = 4$	j) non, car $r = 0$
e) oui, $C(-2; 5)$, $r = 8$	k) non
f) oui, $C\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, $r = 4$	l) oui, $C\left(-\frac{8}{3}; 2\right)$, $r = \frac{10}{3}$

Exercice 123.

1. d_1 et $\mathcal{C}$ sont sécants et d'intersectent en $I_1(1;1)$ et $I_2(2;0)$;
2. pas d'intersection ;
3. d_3 et $\mathcal{C}$ sont tangents au point $T(-4;3)$.

Exercice 124.

a) $m = \pm\frac{3}{4}$;
b) $|m| < \frac{3}{4}$.

Exercice 125. $I_1(3;6)$ et $I_2\left(-\frac{33}{5};\frac{6}{5}\right)$.

Exercice 126.

a) $t_1 : 3x - 4y + 10 = 0$;
b) $t_2 : x + 7y - 31 = 0$;
c) $t_3 : x + y - 2 - 4\sqrt{2} = 0$;
d) $t_4 : x - 5 = 0$.

Exercice 127. $t_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-4k \\ y & = & 3+3k \end{array}\right.$ et $t_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-4k \\ y & = & -3-3k \end{array}\right.$.

Exercice 128. $t_1 : x = 8$, $t_2 : x = -2$, $t_3 : 3x - 4y + 16 = 0$ et $t_4 : 3x + 4y + 16 = 0$,

Exercice 129.

a) -58	c) 170
b) 1	d) 0

Exercice 130.

Exercice 131. $A_p = 88$ et $A_t = 44$.

Table des matières