Statistiques: Série 14
Corrigé

Exercice 1. Comme $n \geq 30$, on utilise la loi normale.

Le coefficient critique à $\alpha = 95\%$ est $z_\alpha = 1,96$.

Les bornes de l'intervalle de confiance sont :

$$\begin{array}{rcccl} \overline{x} - 1,96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}} & < & \mu & < & \overline{x} + 1,96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}} \\ 74 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{53-1}} & < & \mu & < & 74 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{53-1}} \\ 72,64 & < & \mu & < & 75,36 \end{array}$$

D'où l'intervalle de confiance de niveau 95% pour la taille :

$$[72,64; 75,36].$$

Exercice 2. On a

$$\overline{x} = \frac{36 \cdot 6 + 37 \cdot 11 + 38 \cdot 26 + 39 \cdot 32 + 40 \cdot 14 + 41 \cdot 11}{100} = 38,7.$$

On a alors

$$\overline{x^2} = \frac{36^2 \cdot 6 + 37^2 \cdot 11 + 38^2 \cdot 26 + 39^2 \cdot 32 + 40^2 \cdot 14 + 41^2 \cdot 11}{100} = 1499,42.$$

La variance est donc donnée par

$$V = \overline{x^2} - \overline{x^2}^2 = 1,73$$

et l'écart-type par

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{1,73} \cong 1,315.$$

Au niveau de confiance $\alpha = 90\%$, on a $z_\alpha = 1,645$.

Les bornes de l'intervalle de confiance sont donc :

$$\begin{array}{rcccl} \overline{x} - 1,645 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}} & < & \mu & < & \overline{x} + 1,645 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}} \\ 38,7 - 1,645 \cdot \frac{1,315}{\sqrt{100-1}} & < & \mu & < & 38,7 + 1,645 \cdot \frac{1,315}{\sqrt{100-1}} \\ 38,48 & < & \mu & < & 38,92 \end{array}$$

D'où l'intervalle de confiance de niveau 90% pour la hauteur :

$$[38,48; 38,92].$$

Exercice 3.

a) Le coefficient critique à $\alpha = 95\%$ est $z_\alpha = 1,96$.
Les bornes de l'intervalle de confiance sont :

$$\begin{array}{rcccl} \overline{x} - 1,96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}} & < & \mu & < & \overline{x} + 1,96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}} \\ 520'000 - 1,96 \cdot \frac{90'000}{\sqrt{35-1}} & < & \mu & < & 520'000 + 1,96 \cdot \frac{90'000}{\sqrt{35-1}} \\ 489'747,65 & < & \mu & < & 550'252,35 \end{array}$$

D'où l'intervalle de confiance de niveau 95% pour le prix :

$$[489'747,65; 550'252,35].$$

b) On résout

$$\begin{array}{rcl} 520'000 - z_\alpha \cdot \frac{90'000}{\sqrt{35-1}} & = & 494'609 \\ -z_\alpha \cdot \frac{90'000}{\sqrt{34}} & = & -25'391 \\ z_\alpha \cdot \frac{90'000}{\sqrt{34}} & = & 25'391 \\ z_\alpha \cdot 90'000 & = & 25'391\sqrt{34} \\ z_\alpha & = & \dfrac{25'391\sqrt{34}}{90'000} \\ z_\alpha & \cong & 1,645 \end{array}$$

AInsi, le niveau de confiance est de 90%.

Exercice 4. On a $n = 1500$ et $p = 0,35$.

— Niveau 95% ($z_\alpha = 1,96$) :

$$\begin{array}{rcccl} p - z_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}} & < & \pi & < & p - z_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}} \\ 0,35 - 1,96 \cdot \sqrt{\dfrac{0,35 \cdot 0,65}{1500-1}} & < & \pi & < & 0,35 - 1,96 \cdot \sqrt{\dfrac{0,35 \cdot 0,65}{1500-1}} \\ 0,3259 & < & \pi & < & 0,3741 \end{array}$$

D'où l'intervalle de confiance : $[32,59\%; 37,41\%]$.

— Niveau 99% ($z_\alpha = 2,576$) :

$$\begin{array}{rcccl} p - z_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}} & < & \pi & < & p - z_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}} \\ 0,35 - 2,576 \cdot \sqrt{\dfrac{0,35 \cdot 0,65}{1500-1}} & < & \pi & < & 0,35 - 2,576 \cdot \sqrt{\dfrac{0,35 \cdot 0,65}{1500-1}} \\ 0,3183 & < & \pi & < & 0,3817 \end{array}$$

D'où l'intervalle de confiance : $[31,83\%; 38,17\%]$.

Exercice 5. On a $n = 100$ et $p = 0,55$.

a) On a

— Niveau 95% ($z_\alpha = 1,96$) :

$$\begin{array}{rcccl} p - z_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}} & < & \pi & < & p - z_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}} \\ 0,55 - 1,96 \cdot \sqrt{\dfrac{0,55 \cdot 0,45}{100-1}} & < & \pi & < & 0,55 - 1,96 \cdot \sqrt{\dfrac{0,55 \cdot 0,45}{100-1}} \\ 0,452 & < & \pi & < & 0,648 \end{array}$$

D'où l'intervalle de confiance : $[45,2\%; 64,8\%]$.

— Niveau 99% ($z_\alpha = 2,576$) :

$$\begin{array}{rcccl} p - z_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}} & < & \pi & < & p - z_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}} \\ 0,55 - 2,576 \cdot \sqrt{\dfrac{0,55 \cdot 0,45}{100-1}} & < & \pi & < & 0,55 - 2,576 \cdot \sqrt{\dfrac{0,55 \cdot 0,45}{100-1}} \\ 0,4212 & < & \pi & < & 0,6788 \end{array}$$

D'où l'intervalle de confiance : $[42,12\%; 67,88\%]$.

— Niveau 99,73% ($z_\alpha = 3$) :

$$\begin{array}{rcccl} p - z_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}} & < & \pi & < & p - z_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}} \\ 0,55 - 3 \cdot \sqrt{\dfrac{0,55 \cdot 0,45}{100-1}} & < & \pi & < & 0,55 - 3 \cdot \sqrt{\dfrac{0,55 \cdot 0,45}{100-1}} \\ 0,4 & < & \pi & < & 0,7 \end{array}$$

D'où l'intervalle de confiance : $[40\%; 70\%]$.

b) Il faut faire en sorte que l'intervalle $[0,5; 0,6]$ ait un niveau de confiance de 95%, auquel cas le risque de trouver la fréquence réelle en dessous de 0,5 est limité à $2,5\%$.

On cherche donc n tel que

$$
\begin{aligned}
0,55 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,55 \cdot 0,45}{n-1}} &= 0,5 \\
-1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,2475}{n-1}} &= -0,05 \\
1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,2475}{n-1}} &= 0,05 \\
\sqrt{\frac{0,2475}{n-1}} &= \frac{0,05}{1,96} \\
\frac{0,2475}{n-1} &= \left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2 \\
0,2475 &= \left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2 \cdot (n-1) \\
\frac{0,2475}{\left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2} &= n-1 \\
n &= \frac{0,2475}{\left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2} + 1 \\
n &\cong 381,31
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'échatillon doit être de taille 382.