Ensembles de nombres

Karim Saïd

Ecole Technique, Année scolaire 2020-2021

1 Introduction

Définition. Une collection d'objets est un *ensemble* lorsque l'on peut dire avec certitude si un objet donné appartient ou non à la collection. Ces objets sont les *éléments* de l'ensemble.

Notation.

— Si l'élément x appartient à l'ensemble E, on note $x \in E$.
— Si l'élément x n'appartient pas à l'ensemble E, on note $x \notin E$.

Exemple. L'ensemble E des nombres de 0 à 10, y compris, se note de la manière suivante.

$$E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

On a par exemple $7 \in E$, mais $17 \notin E$.

Néanmoins, lorsque les objets ne sont pas décrits de façon explicite, mais dépendent d'une condition, on utilise une notation légèrement plus sophistiquée. Par exemple, on traduit la phrase

$$\underbrace{F\text{ est}}_{F=}\ \underbrace{\text{l'ensemble}}_{\{...\}}\ \text{des}\ \underbrace{\text{éléments de }E}_{n\in E}\ \underbrace{\text{tels que}}_{:}\ \underbrace{\text{leur carré est plus grand ou égal à 35}}_{n^2\geq 35}$$

par

$$F = \{n \in E : n^2 \geq 35\}.$$

On constate, en calculant les carrés des éléments de E, que $F = \{6; 7; 8; 9; 10\}$.

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons plus particulièrement aux *ensembles de nombres*. En effet, les nombres ne vérifient pas tous les mêmes propriétés. Il en existe plusieurs sortes que l'on regroupe dans des ensembles. Le but de ce chapitre sera donc de présenter ces quatre principaux ensembles et de définir les opérations à l'intérieur de ceux-ci.

2 Nombres entiers naturels

2.1 Définition

Les *nombres naturels* sont historiquement les premiers dont l'Homme a eu besoin. Il s'agit des nombres entiers positifs, qui forment l'ensemble noté $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}.}$$

Remarque. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres naturels privé du 0.

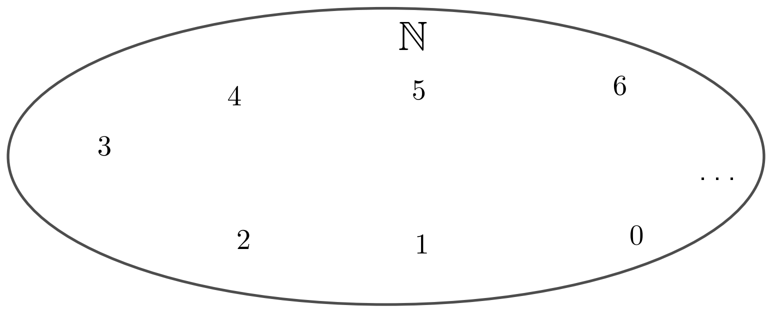


FIGURE 1 – Ensemble des nombres entiers naturels.

2.2 Priorité des opérations

Une expression arithmétique ne se lit pas de gauche à droite comme une phrase française. Les diverses opérations s'effectuent dans l'ordre suivant :

1. Contenu des parenthèses en commençant par celles de premier niveau (plus petite "poupée russe"), c'est-à-dire de l'intérieur vers l'extérieur.
2. Puissances et racines.
3. Multiplications et divisions.
4. Additions et soustractions.

Remarque. Les opérations de même priorité sont effectuées de gauche à droite.

Exemple. Pour calculer $2+3\cdot[4+5\cdot(6-2)]$, on procède comme suit.

$$\begin{aligned} & 2+3\cdot[4+5\cdot\underbrace{(6-2)}] \\ = \ & 2+3\cdot[4+\underbrace{5\cdot\quad(4)}] \\ = \ & 2+3\cdot[\underbrace{4+\quad 20}] \\ = \ & 2+\underbrace{3\cdot\quad[24]} \\ = \ & 2+\quad 72 \\ = \ & 74. \end{aligned}$$

Exercice 1. Calculer sans machine.

a) $60+(7-6)-4\cdot5$ b) $5-(52+3(7-2))$
c) $4+12:4+12$ d) $21+24:3-3\cdot3$
e) $1+19(7-8:4)$ f) $7+3(18:3\cdot2+5)$
g) $3\cdot4+5\cdot12-6\cdot2$ h) $25-10:5+5-1\cdot5\cdot12-6\cdot2$
i) $\{100-[50-(40-9)]\}\cdot2$ j) $(3\cdot4+5)\cdot12-6\cdot2$

Exercice 2. Ajouter les parenthèses nécessaires.

a) $5 \cdot 18 + 4 = 110$	b) $5 + 3 \cdot 1 + 1 = 16$
c) $80 + 40 : 2 = 100$	d) $2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 24$
e) $9 - 9 \cdot 9 + 9 = 9$	f) $3 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 66$
g) $30 : 2 + 8 = 3$	h) $5 - 2 \cdot 9 - 7 = 20$
i) $100 - 1 \cdot 100 - 1 = 9899$	j) $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 - 3 = 36$

2.2.1 Division par 0

La division d'un nombre non nul par 0 est impossible.
Voyons en détail ce qui se passe lorsque l'on essaye de diviser 5 par 0.
Supposons que le quotient de 5 par 0 existe et soit égal à x.
Cette hypothèse s'écrit alors

$$\frac{5}{0} = x.$$

De manière équivalente, cette dernière égalité s'écrit également sous la forme

$$5 = 0 \cdot x = 0.$$

Ainsi, si la division d'un nombre non nul par 0 était possible, cela impliquerait que $5 = 0$, ce qui est *impossible*.

Quant à la division de 0 par 0, elle conduit à une *forme indéterminée*.
En effet, supposons que le quotient de 0 par 0 soit possible et donne x comme solution.
Dans ce cas, on aurait

$$\frac{0}{0} = x.$$

Cette égalité s'écrit aussi sous la forme

$$0 \cdot x = 0.$$

Ainsi, il est impossible de répondre à la devinette suivante :
«Un nombre est multiplié par 0 ; le résultat donne 0. Quel est ce nombre ?».
En effet, n'importe quel nombre (réel) est solution de cette devinette. Ainsi, on dit que $\frac{0}{0}$ est *indéterminé*, car le quotient de 0 par 0 "pourrait donner n'importe quelle solution".
En résumé

$$\boxed{5 \cdot 0 = 0,\ \frac{0}{5} = 0,\ \frac{5}{0} \text{ est impossible },\ \frac{0}{0} \text{ est indéterminé.}}$$

2.3 Décomposition en facteurs premiers

Définition. Un nombre est dit *premier* s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.

Exemple. 2, 3, 5, 7 et 11 sont premier. En revanche, 1, 4, 6, 8 et 9 ne le sont pas.

Théorème (Théorème fondamental de l'arithmétique). *Tout nombre entier naturel peut s'écrire de manière unique comme produit de nombres premiers.*

Exemple.

1. $18 = 2 \cdot 3^2$.
2. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.
3. $6936 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17^2$.

2.3.1 Algorithme de décomposition en facteurs premiers

Soit $n \in \mathbb{N}$ non premier.

On divise n par le plus petit nombre premier p_1 divisant n. On divise alors $\frac{n}{p_1}$ par le plus petit nombre premier p_2 divisant $\frac{n}{p_1}$ et ainsi de suite jusqu'à obtenir 1. Ainsi, n est le produit de tous ces nombres premiers.

Exemple.

1. Décomposons 18 en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

   Ainsi,
$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2.$$

2. Décomposons 9438 en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 9438 & 2 \\ 4719 & 3 \\ 1573 & 11 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

   Ainsi,
$$9438 = 2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 13.$$

Théorème.

1. La décomposition en facteurs premiers du PPMC (Plus Petit Multiple Commun) de deux entiers naturels contient tous les nombres premiers qui apparaissent dans au moins une des décompositions en facteurs premiers de ces deux entiers, chacun affecté du plus grand exposant qui apparait dans celles-ci.
2. La décomposition en facteurs premiers du PGDC (Plus Grand Diviseur Commun) de deux entiers naturels contient tous les nombres premiers qui apparaissent dans les deux décompositions en facteurs premiers de ces deux entiers, chacun affecté du plus petit exposant qui apparait dans celles-ci.

Exemple. Décomposons 36 et 54 en facteurs premiers. On a

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi,

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \text{ et } 54 = 2 \cdot 3^3.$$

Il s'ensuit que

$$\text{PPMC}(36; 54) = 2^2 \cdot 3^3 = 108 \text{ et } \text{PGDC}(36; 54) = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

3 Nombres entiers relatifs

3.1 Définition

Pour des raisons évidentes, l'ensemble $\mathbb{N}$ ne suffit pas à représenter toutes les situations rencontrées dans la vie courante (par exemple des températures exprimées en degré Celsius, le numéro d'un étage situé au sous-sol d'un immeuble,...). D'autre part, certaines opérations, comme la soustraction ne sont pas toujours définies dans $\mathbb{N}$. Par exemple, $2 - 5 = -3 \notin \mathbb{N}$. Il est donc nécessaire d'ajouter à $\mathbb{N}$ les *nombres entiers négatifs*. Pour préciser qu'une quantité donnée est inférieure à 0, on lui ajoute le signe "$-$". L'ensemble de tous les nombres entiers (positifs et négatifs) est noté $\mathbb{Z}$ et est appelé *ensemble des nombres entiers relatifs*.

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{...; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...\}.}$$

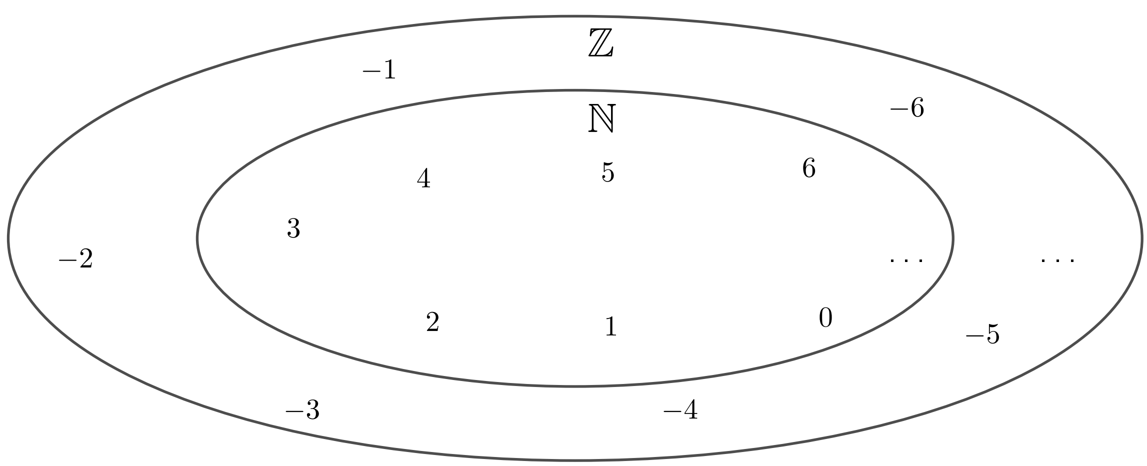


FIGURE 2 – Ensemble des nombres entiers relatifs.

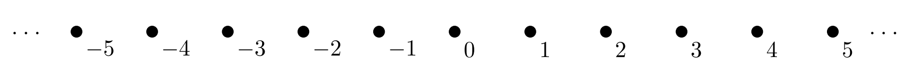


FIGURE 3 – Nombres entiers relatifs.

Exercice 3. Calculer les expressions suivantes.

a) $(-2) + (+15)$	b) $(+5) + (-4)$
c) $(+8) - (-8)$	d) $(-15) - (+25) - (-5)$
e) $(-7) - (+8) - (-4)$	f) $(-25) - (+36) - (+85) - (-100)$

3.2 Règle des signes

Le produit de deux nombres entiers relatifs s'effectue en appliquant la *règle des signes* :

$$
\begin{aligned}
&+ \cdot + = + \\
&+ \cdot - = - \\
&- \cdot + = - \\
&- \cdot - = +
\end{aligned}
$$

Remarque. La règle des signes peut se formuler à l'aide du moyen mnémotechnique ci-dessous.

1. Les amis (+) de mes amis (+) sont mes amis (+).
2. Les amis (+) de mes ennemis (−) sont mes ennemis (−).
3. Les ennemis (−) de mes amis (+) sont mes ennemis (−).
4. Les ennemis (−) de mes ennemis (−) sont mes amis (+).

Remarque. Le signe de la division de deux nombres entiers relatifs repose aussi sur la règle des signes.

Exemple.

1. $15 : 3 = 5$.
2. $(-15) : 3 = -5$.
3. $15 : (-3) = -5$.
4. $(-15) : (-3) = 5$.

Exercice 4. Calculer les expressions suivantes.

a) $(+5) \cdot (-7)$	b) $(+12) : (+4)$
c) $(-30) : (-10)$	d) $(+3) \cdot (-7) \cdot (+11)$
e) $(-8) - (-18) : (+3)$	f) $(+3) \cdot [(-7) + (+11)] : [(-2) - (-8)]$

Exercice 5. Calculer sans machine.

a) $12 - (-14 - 13) + (19 - 50)$	b) $(34 - 45)(145 : (-5))$
c) $((-3 - 3) - 3)(-3 - 3 - 3)$	d) $-5(-3 \cdot 7 + 3)$
e) $11 - 7(3 - 9)$	f) $(-6 + 3 \cdot 2) : [4 + 2 \cdot (-2)]$
g) $[-3 - (-2)] : (-13 - (-13))$	h) $\{[-1 - (-2)] : (-1)\} \cdot (-2)$

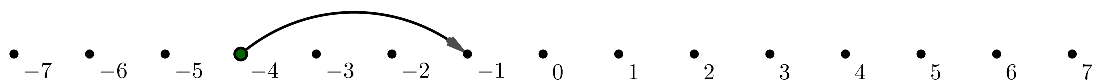
3.3 Somme et différence de deux nombres entiers relatifs

La somme de deux nombres entiers relatifs, s'effectue en raisonnant sur la droite numérique.

Exemple.

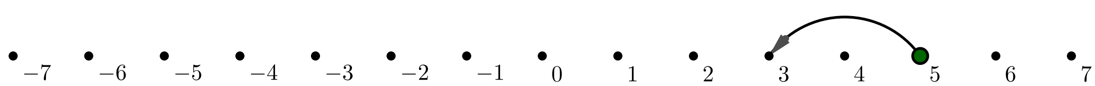
1. $-4+3=-1$

$(-4)+3$ consiste à se déplacer de 3 unités à droite depuis -4



2. $5+(-2)=5-2=3$

$5+(-2)$ consiste à se déplacer de 2 unités à gauche depuis 5



Exemple.

1. $5-2=3$.
2. $(-5)-2=-7$.
3. $5-(-2)=5+2=7$.
4. $(-5)-(-2)=-5+2=-3$.

Définition. On dit de deux nombres entiers relatifs qu'ils sont *opposés* si leur somme est nulle.

Exemple.

1. -9 est l'opposé de 9.
2. 11 est l'opposé de -11.

Exercice 6. Calculer les expressions suivantes.

a) $(-3)\cdot(-5)+(-2)$
b) $(-3)-5\cdot(-2)$
c) $-6:3+2\cdot(-3)$
d) $-6:3:(-2)+2$
e) $-5\cdot(-2)-(-3):(-1)-(-2)$
f) $-1-(-2):(-1)+2$
g) $-1-[(-2):(-1)+2]$
h) $\{[-1-(-2)]:(-1)\}\cdot 2$
i) $4-2\cdot 3+2$
j) $6:(6-3\cdot 2)$
k) $(6-3\cdot 2):3$
l) $0:[-5-(-5)]$
m) $[-5-(-5)]:0$
n) $(2-2\cdot 3):[1-(2\cdot 2-5)]$
o) $2-2\cdot[2-2\cdot(2-2\cdot 2)]$
p) $[-6-(-3)\cdot(-4)]:\{[-7-8:(-2)]\cdot(-6)\}$

Exercice 7. Réecrire les expressions ci-dessous pour $a = -1$, puis calculer.

a) $2a + 3$ b) $(2a - 1) + 3$
c) $2a - 1 + 3$ d) $2(a - 1) + 3$
e) $2a - (1 + 3)$ f) $2[a - (1 + 3)]$

Exercice 8. Réecrire les expressions ci-dessous pour $a = -3$, puis calculer.

a) $[(a + 2)a + 2]$ b) $\{[(a + 5)a + 3]a - 8\}a + 3$
c) $\{40 - [30 - (20 + a)a]a\}a$ d) $a\{1 - a[1 - a(1 - a)]\}$

Exercice 9. Réecrire les expressions ci-dessous pour $x = 36$, $y = 12$, $z = -4$ et $t = -2$, puis calculer.

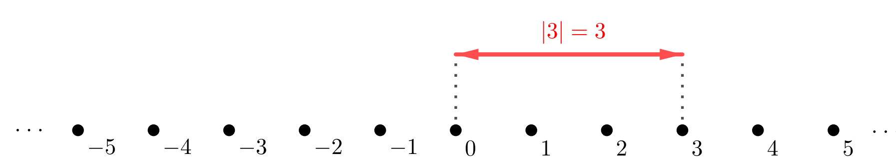
a) $(x - y + z) : t$ b) $x - [(y + z) : t - t]$
c) $x - y : z + t$ d) $x - y + z : t$
e) $(x - y) : (z - t)$ f) $(x - y) : z - t$
g) $x - y : (z - t)$ h) $x - y : z - t$

3.4 Valeur absolue

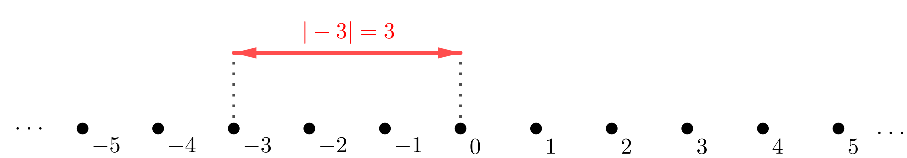
Définition. On appelle *valeur absolue* d'un nombre $a \in \mathbb{Z}$ la distance de a à 0 et on la note $|a|$.

Exemple.

1. $|3| = 3$.



2. $|-3| = 3$.



Des exemples ci-dessus, il en découle le théorème suivant.

Théorème. *Si $a \in \mathbb{Z}$, alors*

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & si \quad a > 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}.}$$

Exercice 10. Réecrire le nombre en supprimant la valeur absolue et simplifier le résultat.

a) $\|-3-2\|$	b) $\|-5\|-\|2\|$
c) $\|7\|+\|-4\|$	d) $\|-11+1\|$
e) $\|6\|-\|-3\|$	f) $\|8\|+\|-9\|$
g) $(-5)\cdot\|3-6\|$	h) $\dfrac{\|-6\|}{-2}$
i) $4\cdot\|6-7\|$	j) $\dfrac{6}{\|-2\|}$
k) $\|-1\|+\|-9\|$	l) $\|5\|+\|-3\|$

4 Nombres rationnels

4.1 Définition

Dès le moment où l'on désire comparer deux quantités, on a besoin d'établir des *rapports*, donc des *divisions*. Or, il apparaît bien vite qu'une division de deux nombres entiers n'en donne pas toujours un. Ainsi, $\mathbb{Z}$ ne conient pas tous les nombres. Par exemple, le quotient de 3 par 2 donne $1,5$. Quant au quotient de 1 par 3, il donne $0,\overline{3} = 0,3333....$ On admettra que tout nombre décimal (admettant un nombre fini de décimales ou dont le développement décimal est périodique) peut s'écrire sous forme de quotient de deux nombres entiers. Un nouvel ensemble qui regroupe tous les résultats de ces divisions est donc nécessaire. Il s'agit de l'ensemble des *nombres rationnels*, noté $\mathbb{Q}$.

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\} = \{\text{Nombres qui peuvent s'écrire comme rapport de deux nombres entiers}\}.}$$

Exemple.

1. $1,3$ est égal au quotient de 13 par 10.
2. $-0,\overline{45}$ est égal au quotient de 5 par 11.
3. -9 est égal au quotient de -9 par 1.

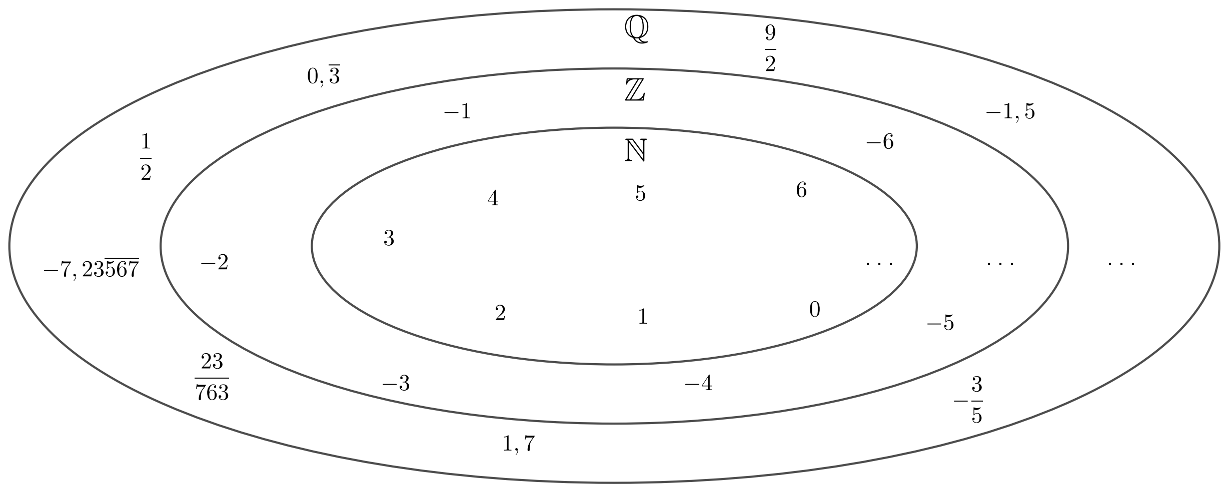


Figure 4 – Ensemble des nombres rationnels.

4.2 Notion de fraction

Définition. On appelle *fraction* tout rapport de deux nombres entiers a et b et on la note $\frac{a}{b}$. Le nombre a (situé en haut) est appelé *numérateur*, tandis que b (situé en bas) est le *dénominateur*.

Exemple.

1. Le nombre $\frac{3}{4}$ représente le quotient de 3 par 4 et peut également s'écrire $0,75$.
2. Le nombre 7 peut également d'écrire sous la forme $\frac{7}{1}$.
3. La fraction $\frac{1}{3}$ est égale au nombre $0,\overline{3}$.
4. La fraction $\frac{1}{7}$ est égale à $0,\overline{142857}$.

Remarque. Lorsque l'on effectue la division de 1 par 7 à l'aide d'une calculatrice, celle-ci affiche comme résultat "$0,142857142$". Il n'est dès lors pas aisé de deviner qu'il s'agit en réalité du nombre décimal périodique $0,\overline{142857}$. Il est donc faux d'écrire

$$\frac{1}{7} = 0,142857143,$$

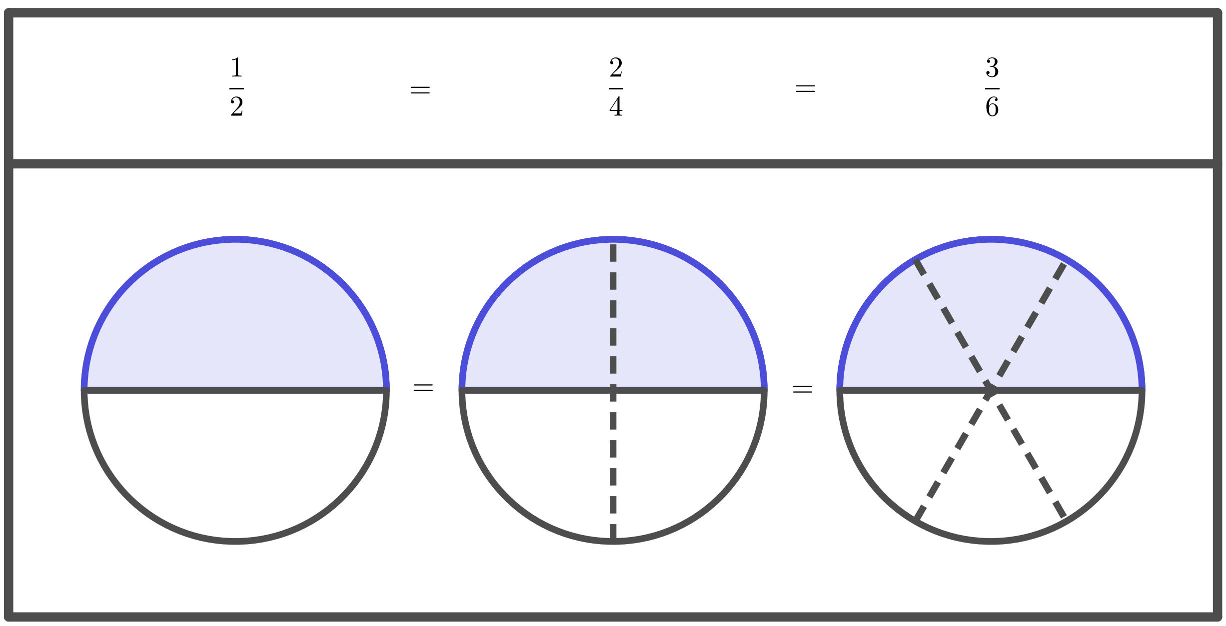
mais correct d'écrire

$$\frac{1}{7} \cong 0,142857143.$$

On préfèrera donc écrire un nombre rationnel en fraction que sous forme de nombre décimal, puisque ceux-ci conduisent fréquemment à des approximations, comme le montre l'exemple ci-dessus.

4.3 Amplification et simplification

La fraction $\frac{1}{2}$ représente le nombre décimal $0,5$. Une situation de la vie courante qui pourrait être représentée par cette même fraction est celle qui consiste à se servir d'une tranche parmi 2 d'un gâteau. Si ce gâteau avait été coupé en 4 tranches identiques, Il eût fallu en prendre 2 pour que la quantité de gâteau consommée demeure identique. De même, cela revient à prendre 3 tranches parmi 6 identiques.



Autrement dit, si le nombre de tranches à disposition double, il en est alors de même pour le nombre de tranches qui seront dégustées. Plus généralement, si l'on multiplie par x (par exemple, on triple, quadruple, multiplie par 37, etc.) le nombre total de tranches à disposition, alors l'on se servira de x fois plus de tranches que dans le cas initial.

Mathématiquement, cette observation se traduit par le fait que les fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, ou encore $\frac{300}{400}$, sont égales. En effet, chacun de ces quotients donnent le nombre décimal $0,75$.

Définition.

1. *Amplifier* une fraction consiste à multiplier son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier.
2. *Simplifier* une fraction consiste à diviser son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier.
3. Une fraction est dite *irréductible* lorsqu'il n'est plus possible de la simplifier.

Remarque. Lorsque l'on amplifie ou simplifie une fraction on obtient une nouvelle fraction égale à celle de départ.

Exemple.

1. Amplifions $\frac{2}{7}$ par 3 :
$$\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}.$$
2. Simplifions $\frac{25}{35}$ par 5 :
$$\frac{25}{35} = \frac{25 : 5}{35 : 5} = \frac{5}{7}.$$
3. Simplifions $\frac{11}{22}$ au maximum :
$$\frac{11}{22} \overset{\text{par } 11}{=} \frac{1}{2}.$$
4. Simplifions $\frac{560}{700}$ au maximum :
$$\frac{560}{700} \overset{\text{par } 10}{=} \frac{56}{70} \overset{\text{par } 7}{=} \frac{8}{10} \overset{\text{par } 2}{=} \frac{4}{5}.$$

Exercice 11. Amplifier les fractions ci-dessous de la manière indiquée.

a) $\frac{7}{5} = \frac{}{25}$	b) $\frac{16}{18} = \frac{64}{}$
c) $\frac{8}{20} = \frac{}{100}$	d) $\frac{3}{14} = \frac{}{42}$
e) $\frac{24}{11} = \frac{}{121}$	f) $\frac{4}{8} = \frac{}{10}$
g) $\frac{30}{24} = \frac{}{32}$	h) $\frac{27}{63} = \frac{}{77}$
i) $\frac{27}{36} = \frac{}{28}$	j) $\frac{21}{15} = \frac{}{25}$

Exercice 12. Simplifier les fractions ci-dessous au maximum.

a) $\frac{42}{39}$	b) $\frac{15}{20}$
c) $\frac{12}{16}$	d) $\frac{22}{28}$
e) $\frac{25}{15}$	f) $\frac{27}{21}$
g) $\frac{40}{45}$	h) $\frac{14}{6}$
i) $\frac{18}{24}$	j) $\frac{1210}{330}$
k) $\frac{35}{56}$	l) $\frac{13}{169}$
m) $\frac{15}{25}$	n) $\frac{640}{48}$
o) $\frac{96}{900}$	p) $\frac{36}{90}$
q) $\frac{96}{360}$	r) $\frac{608}{432}$
s) $\frac{40}{384}$	t) $\frac{768}{64}$

Exercice 13. Dans chacun des cas suivants, déterminer laquelle de ces deux fractions est la plus grande, après les avoir mises au même dénominateur.

a) $\dfrac{5}{8}$ et $\dfrac{6}{19}$

b) $\dfrac{7}{15}$ et $\dfrac{5}{12}$

c) $\dfrac{9}{20}$ et $\dfrac{11}{18}$

d) $\dfrac{11}{36}$ et $\dfrac{9}{32}$

e) $\dfrac{20}{63}$ et $\dfrac{25}{72}$

f) $\dfrac{4}{7}$ et $\dfrac{2}{3}$

g) $\dfrac{14}{85}$ et $\dfrac{7}{51}$

h) $\dfrac{39}{84}$ et $\dfrac{26}{63}$

i) $\dfrac{31}{90}$ et $\dfrac{23}{72}$

j) $\dfrac{37}{80}$ et $\dfrac{29}{60}$

4.4 Addition et soustraction

La somme et la différence de deux fractions peut être illustrée par l'exemple ci-dessous.

Exemple.

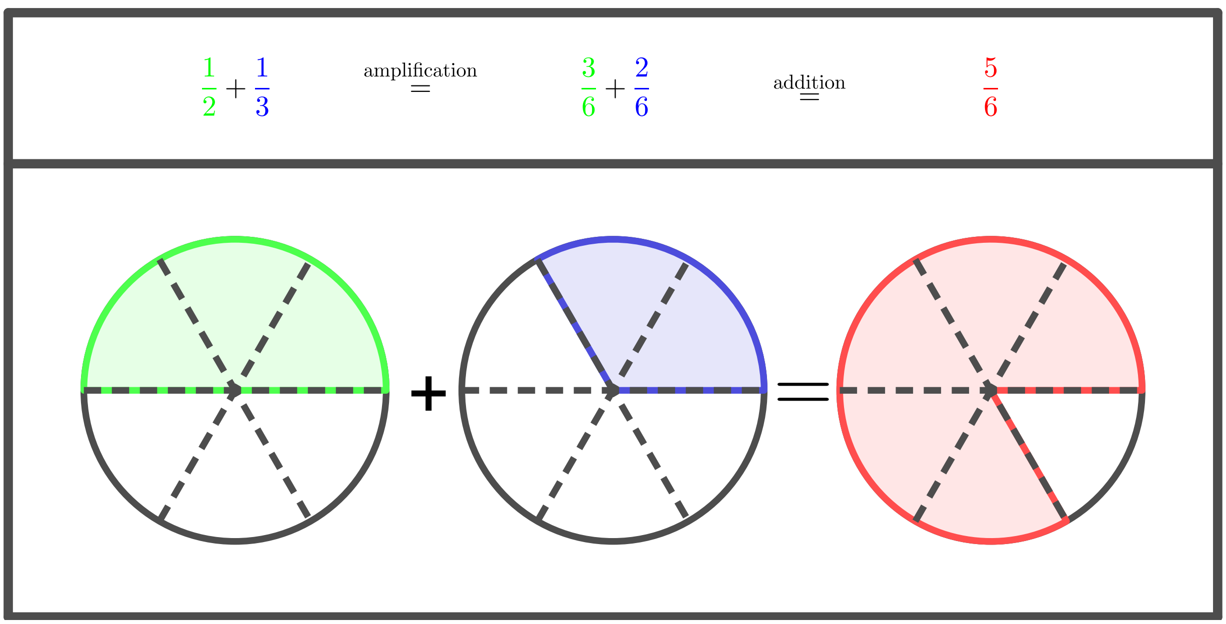


FIGURE 5 – Somme de deux fractions.

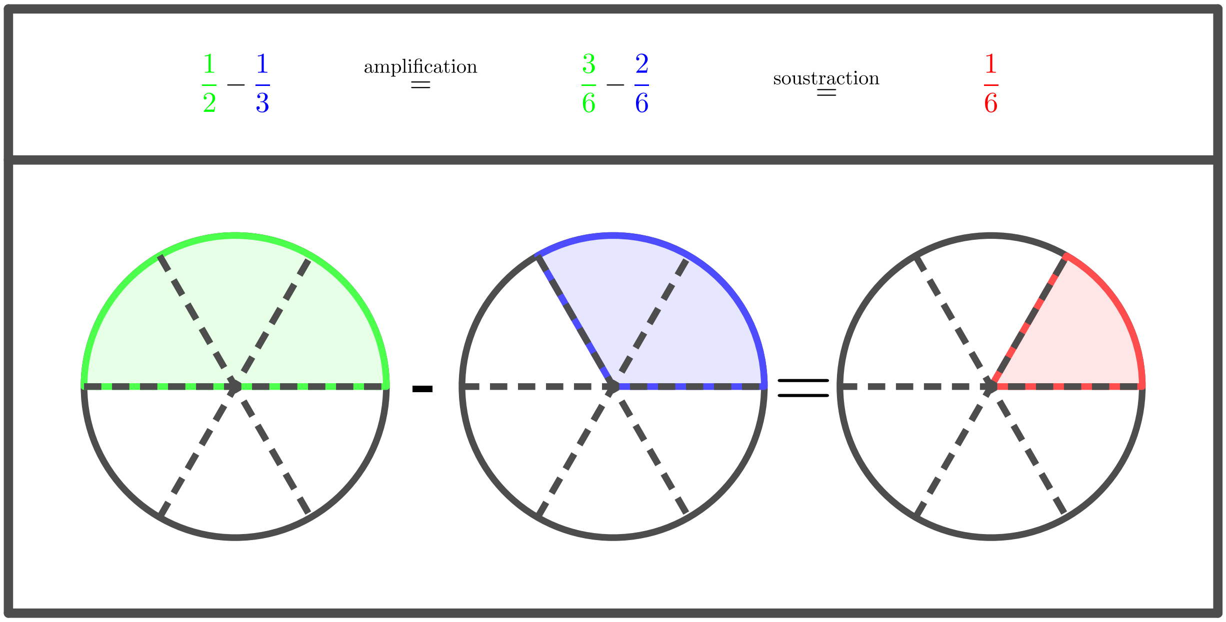


FIGURE 6 – Différence de deux fractions.

Cas général : Comme le montrent les exemples ci-dessus, pour additionner deux fractions, il convient dans un premier temps de les mettre au **même dénominateur** (qui sera un multiple de chacun des dénominateurs des fractions de départ), puis d'additionner les numérateurs et de simplifier au maximum la fraction obtenue le cas échéant.

Par convention, on écrira toujours le résultat sous forme de fraction irréductible ou de nombre entier.

Exemple.

1. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}$.
2. $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} - \frac{5}{6} = \frac{2}{30} + \frac{3}{30} - \frac{25}{30} = \frac{2+3-25}{30} = \frac{-20}{30} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$.

Remarque. La fraction $\frac{-1}{2}$ représente le nombre décimal $-0,5$. Il en est de même pour la fraction $\frac{1}{-2}$. Ces deux fractions étant identiques, il est d'usage de l'écrire sous la forme $-\frac{1}{2}$. Autrement dit, on a

$$-0,5 = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Remarque. Soit à calculer

$$\frac{5}{36}+\frac{7}{54}.$$

Pour mettre les deux fractions au même dénominateur, deux alternatives sont envisageables :

1. **Multiplier 36 par 54 pour obtenir un dénominateur commun**
   On a
   $$\frac{5}{36}+\frac{7}{54}=\frac{270}{1944}+\frac{252}{1944}=\frac{522}{1944}\overset{\text{Par 18}}{=}\frac{29}{108}.$$
2. **Déterminer le plus petit multiple commun de 36 et 54**
   On a
   $$\frac{5}{36}+\frac{7}{54}=\frac{15}{108}+\frac{14}{108}=\frac{29}{108}.$$

Exercice 14. Calculer les expressions ci-dessous.

a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$

c) $\frac{6}{7}-\frac{4}{7}$

d) $\frac{5}{6}+\frac{3}{6}-\frac{7}{6}$

e) $\frac{4}{3}+\frac{3}{2}$

f) $\frac{8}{5}-\frac{4}{3}$

g) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

h) $\frac{4}{20}+\frac{27}{15}$

i) $\frac{9}{10}-\frac{8}{45}$

j) $\frac{7}{15}-\frac{3}{10}$

k) $\frac{11}{4}+\frac{-2}{3}$

l) $\frac{5}{6}+\frac{12}{-15}$

m) $\frac{5}{6}+\left(-\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{2}{15}\right)$

n) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{9}$

o) $\frac{9}{20}+\frac{37}{50}+\frac{63}{10}+\frac{3}{25}$

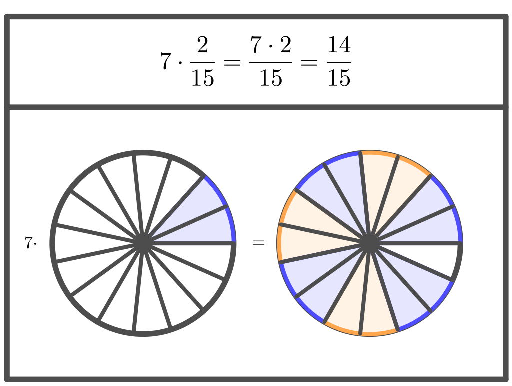
p) $\frac{5}{12}+\frac{7}{18}+\frac{8}{3}+\frac{13}{36}$

4.5 Multiplication et division

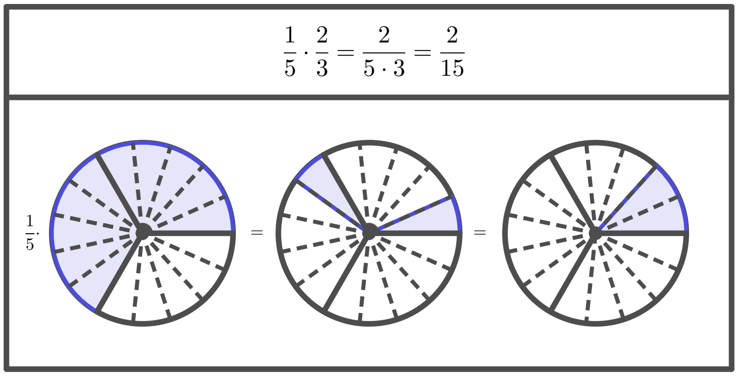
4.5.1 Produit de deux fractions

Le produit de deux fractions peut être illustré par les deux exemples ci-dessous.

Exemple.



Exemple.



Les exemples ci-dessus montrent que le produit de deux fractions s'effectue en multipliant les numérateurs entre eux et en faisant de même avec les dénominateurs.

Autrement dit, on a

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.}$$

Remarque. Il est préférable de simplifier au maximum avant d'effectuer le produit.

Exemple.

1. $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$.
2. $\frac{{}^{1}\cancel{10}}{{}^{3}\cancel{21}} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{7}}{{}^{5}\cancel{50}} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}$.

Exercice 15. Calculer et simplifier, si possible.

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{3}$

b) $\frac{1}{8} \cdot \frac{6}{16}$

c) $\frac{33}{44} \cdot \frac{8}{11}$

d) $100 \cdot \frac{1}{8}$

e) $120 \cdot \frac{1}{12}$

f) $\frac{8}{15} \cdot \frac{9}{4}$

g) $\frac{40}{42} \cdot \frac{21}{56}$

h) $\frac{21}{54} \cdot \frac{27}{28}$

i) $\frac{14}{105} \cdot 45$

j) $18 \cdot \frac{4}{72}$

k) $\frac{1}{7} \cdot \frac{14}{9} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{4}$

l) $\frac{14}{19} \cdot \frac{19}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 0$

m) $\frac{3}{4} \cdot 13 \cdot \frac{12}{9} \cdot \frac{41}{41} \cdot \frac{1}{39}$

n) $\frac{4}{21} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3}$

o) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot (-2)$

p) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{12}\right)$

4.5.2 Quotient de deux fractions

Théorème. *Si* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, *alors*

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}.}$$

Preuve. Il est clair que

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

En divisant cette égalité par $\frac{b}{a}$, on obtient

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}.$$

$\square$

Autrement dit, diviser une fraction par $\frac{b}{a}$ revient à la multiplier par son *inverse* $\frac{a}{b}$.

Exemple.

1. $2 : \frac{5}{11} = 2 \cdot \frac{11}{5} = \frac{22}{5}$.
2. $\frac{4}{3} : 2 = \frac{{}^{2}\cancel{4}}{3} \cdot \frac{1}{{}^{1}\cancel{2}} = \frac{2}{3}$.
3. $5 : \frac{3}{2} = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.
4. $\frac{1}{5} : \frac{2}{7} : \frac{8}{5} = \frac{1}{{}^{1}\cancel{5}} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{5}}{8} = \frac{7}{16}$.
5. $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} : \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3} - \left(\frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}^{1}\cancel{3}} \cdot \frac{{}^{5}\cancel{15}}{{}^{2}\cancel{4}} \right) + \frac{1}{15} = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + \frac{1}{15} = \frac{10}{30} - \frac{75}{30} + \frac{2}{30} = \frac{-63}{30} = -\frac{21}{10}$.

Exercice 16. Effectuer les opérations ci-dessous.

a) $\frac{1}{2} : 2$

b) $\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{8} : \frac{3}{4}$

d) $18 : \frac{6}{17}$

e) $\frac{4}{7} : \frac{16}{21}$

f) $\frac{20}{3} : \left(\frac{7}{4} : \frac{14}{3} \right)$

g) $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{9}}$

h) $\frac{\frac{24}{5}}{64}$

i) $\frac{25}{60} : \frac{24}{800} : \frac{75}{54}$

j) $-\frac{65}{-121} : \frac{-150}{48} : \frac{-13}{50} \cdot \frac{3}{2}$

k) $\frac{-20}{3} : \left(\frac{7}{-4} : \frac{14}{3} \right)$

l) $\frac{2-5}{-60} : \frac{-24}{-800} : \frac{75}{-54}$

Exercice 17. Calculer et simplifier s'il y a lieu.

a) $\dfrac{22}{13} \cdot \dfrac{32}{11} : \dfrac{17}{26}$

b) $\left(\dfrac{14}{5} : \dfrac{5}{8}\right) \cdot \dfrac{3}{7}$

c) $\left(\dfrac{11}{5} - \dfrac{3}{20}\right) - \left(\dfrac{9}{10} - \dfrac{11}{15}\right)$

d) $\dfrac{\dfrac{6}{2} + \dfrac{4}{3}}{3 - \dfrac{8}{3}}$

e) $12 - 2\left(-\dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{5}\right) \cdot 4$

f) $\dfrac{5}{4} - \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{10}$

g) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} + \dfrac{8}{20}$

h) $\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4}\right) \cdot \left(\dfrac{4}{5} + \dfrac{8}{20}\right)$

i) $\left(\dfrac{5}{36} - \dfrac{1}{8}\right) : \left(\dfrac{2}{45} - \dfrac{1}{30}\right)$

j) $\left(\dfrac{4}{3} : \dfrac{5}{6}\right) : \left(\dfrac{10}{15} - \dfrac{10}{18}\right)$

k) $\dfrac{\frac{4}{7} - \frac{1}{6}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}$

l) $\dfrac{1 + \frac{1}{1+1}}{\frac{1+1}{1}}$

m) $\dfrac{1}{2} - \left\{\dfrac{1}{3} - \left[\dfrac{2}{3} - \left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}\right)\right]\right\}$

n) $\dfrac{3 + \frac{1}{5}}{3 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}}$

Exercice 18. Calculer les expressions suivantes.

a) $1 - \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right) - \left[\dfrac{1}{3} - \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\right]$

b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \left\{-\dfrac{1}{2} - \left[\dfrac{1}{2} - \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\right]\right\}$

c) $\dfrac{1 - \dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)}{\dfrac{3}{2} - \left[1 - \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right)\right]}$

Exercice 19. Réecrire les expressions ci-dessous pour $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{2}{3}$, $c = \dfrac{3}{4}$ et $d = 2$, puis calculer.

a) $ab + cd$

b) $\dfrac{ac}{bd}$

c) $\dfrac{a+b}{c+d}$

d) $a - b(c + d)$

5 Nombres réels

5.1 Définition

Enfin, il y a des nombres qui ne peuvent pas être écrits sous forme de fraction. Ce sont les *nombres irrationnels*. Découverts par les Grecs (qui ont eu de la peine à en accepter l'existence), ils apparaissent par exemple lorsqu'on étudie la longueur des côtés d'un triangle, le périmètre d'un cercle ou encore en calculant des intérêts bancaires. Réunis avec les nombres rationnels, ils forment l'ensemble des nombres réels.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \left\{\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt[3]{4}; \pi; e; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; ...\right\}.$$

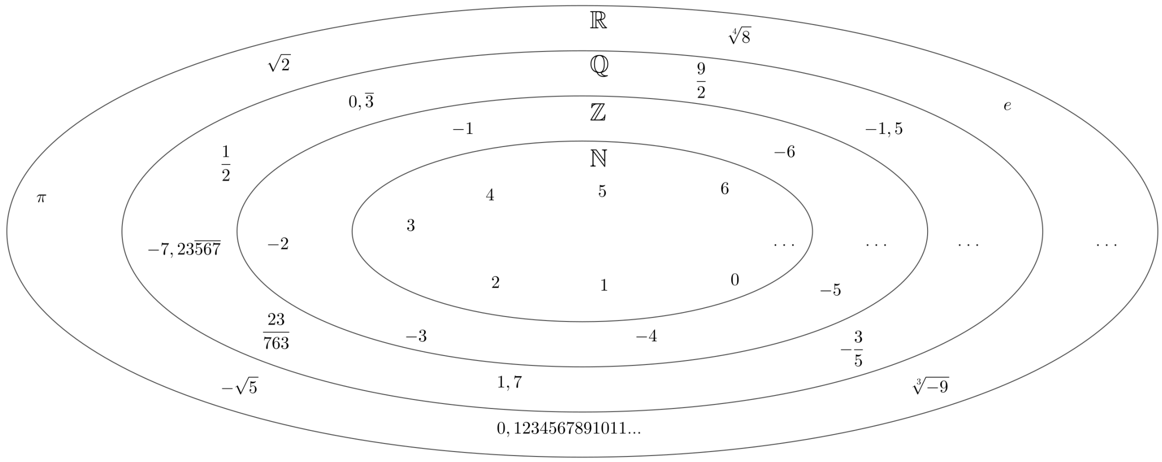


FIGURE 7 – Ensemble des nombres réels.

Contrairement aux ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable, c'est-à-dire que l'on ne peut pas énumérer les nombres réels. On a les inclusions d'ensembles suivantes :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Exercice 20. Cocher les ensembles dont appartiennent les nombres ci-dessous.

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-5,63$				
$9,\overline{2}$				
2π				
$-\dfrac{15}{3}$				
$\sqrt{2}$				
$\sqrt{9}$				

Exercice 21. Déterminer si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses.

a) $-300 \in \mathbb{R}$.

b) $\dfrac{20}{4} \notin \mathbb{N}$.

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{Q}$.

d) $-\dfrac{13}{7} \notin \mathbb{Z}$.

e) $-3,57 \in \mathbb{Z}$.

f) $5 \notin \mathbb{R}$.

Exercice 22. Représenter les quatre ensembles de nombres principaux dans un diagramme de Venn, puis placer les nombres suivants dans la zone correcte de ce diagramme.

a) $\sqrt{36}$	b) $-12,47$
c) $\dfrac{3}{4}$	d) π
e) $2,3 \cdot 10^{12}$	f) $-1'000'000$
g) $\sqrt{2}$	h) $5,12\overline{34}$
i) $-\dfrac{15}{3}$	j) $0,00000345$

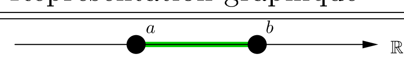
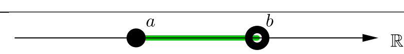
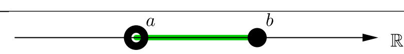
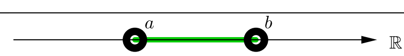
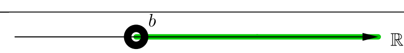
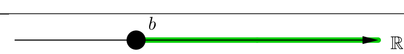
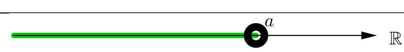
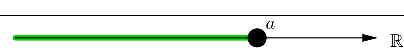
Exercice 23. Compléter.

a)	-1000 appartient à l'ensemble	$-1000 \in$ ....
b)	$-\dfrac{3}{4}$ appartient à l'ensemble	$-\dfrac{3}{4} \in$ ....
c)	2π appartient à l'ensemble	$2\pi \in$ ....
d)	$3,14$ appartient à l'ensemble	$3,14 \in$ ....
e)	Deux nombres dont la somme vaut 12	....
f)	Le quotient de 30 et 5 vaut	....
g)	Le produit de 30 et 5 vaut	....
h)	La différence de 7 et 5 vaut	....

5.2 Intervalles

Les intervalles sont des notations simples pour décrire certains sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On les utilise notamment pour donner les ensembles des solutions d'une inéquation.

Dans le tableau ci-dessous, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, chacune des lignes décrit le même sous ensemble de $\mathbb{R}$ de trois manières équivalentes.

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$	
$a \leq x < b$	$[a;b[$	
$a < x \leq b$	$]a;b]$	
$a < x < b$	$]a;b[$	
$x > b$	$]b;+\infty[$	
$x \geq b$	$[b;+\infty[$	
$x < a$	$]-\infty;a[$	
$x \leq a$	$]-\infty;a]$	

Exercice 24. Ecrire les ensembles suivants sous forme d'intervalle.

a) L'ensemble des nombres plus grands ou égaux à -3 et plus petits ou égaux à 5.
b) L'ensemble des nombres plus grands ou égaux à 4 et plus strictement petits que 5.
c) L'ensemble des nombres strictement plus petits que 1.
d) L'ensemble des nombres plus grands ou égaux à 10.
e) L'ensemble des nombres strictement plus grands que -2 et plus strictement plus petits que 2.
f) L'ensemble des nombres réels strictement positifs.
g) L'ensemble des nombres réels ;

6 Puissances et racines

6.1 Définition

Définition. *La puissance entière positive* d'un nombre a est définie par $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$. On lit *$a$ puissance n* où $n \in \mathbb{N}$. De plus, on appelle *a la base* et *n l'exposant.*

Exemple.

$$\begin{array}{ll} a^1 = a, & 3^1 = 3. \\ a^2 = a \cdot a, & (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4. \\ a^3 = a \cdot a \cdot a, & \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{8}{125}. \end{array}$$

Exercice 25. Effectuer sans calculatrice.

a)	$(-2)^3 =$	$-2^3 =$	$-(-2)^3 =$
b)	$(-2)^4 =$	$-2^4 =$	$-(-2)^4 =$
c)	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 =$	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 =$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 =$

6.2 Propriétés des puissances

Théorème. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$, alors*

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

3. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Preuve. Nous nous contenterons de donner l'idée de la preuve dans le cas particulier où $a = 4$, $b = 7$, $m = 5$ et $n = 3$.

1. $4^5 \cdot 4^3 = (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) = 4^8 = 4^{5+3}$.
2. $\dfrac{4^5}{4^3} = \dfrac{{}^1\cancel{4} \cdot {}^1\cancel{4} \cdot {}^1\cancel{4} \cdot 4 \cdot 4}{{}^1\cancel{4} \cdot {}^1\cancel{4} \cdot {}^1\cancel{4}} = 4^2 = 4^{5-3}$.

3. $\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{4^3}{7^3}$.
4. $(4 \cdot 7)^3 = (4 \cdot 7) \cdot (4 \cdot 7) \cdot (4 \cdot 7) = (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 4^3 \cdot 7^3$.
5. $(4^3)^5 = 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 = 4^{3+3+3+3+3} = 4^{5 \cdot 3}$.

□

Exercice 26. Calculer sans machine.

a) $(2^2)^3$
b) $(2^3)^2$
c) $(\sqrt{2})^4$
d) $(\sqrt{5})^6$

Exercice 27. Calculer sans calculatrice $-2x^3$, $-x^2$ et $(-x)^2$ pour les valeurs de x suivantes :

a) $x = 1$;
b) $x = 2$;
c) $x = 3$;
d) $x = -1$;
e) $x = -2$;
f) $x = -3$.

Exercice 28. Effectuer sans calculatrice.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$	b) $-\left(\frac{3}{4}\right)^2$
c) $-\frac{3^2}{4}$	d) $-\left(\frac{1}{5}\right)^3$
e) $-\left(-\frac{1}{5}\right)^3$	f) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Exercice 29. Sans calculatrice, réduire les expressions ci-dessous au maximum. On demande un résultat sous forme de puissance.

a) $5 \cdot 5^4 \cdot 5^2$	b) $(-2)^3 \cdot (-3)^3 \cdot (-1)^{1234567}$
c) $\frac{(-8)^{10}}{(-8)^8}$	d) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3$
e) $-2,5 \cdot (-2,5) \cdot (-2,5) \cdot (-2,5)$	f) $(-3)^7 \cdot (-3)^8$
g) $2^3 \cdot 2^6 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)^5$	h) $(2^4)^2 \cdot 2^3$
i) $5^3 \cdot (5^2)^3$	j) $3^3 \cdot 4^2 \cdot (3 \cdot 5)^3 \cdot 2^4 \cdot 5^5$
k) $6^9 : (6^2 \cdot 6^3)$	l) $\frac{9^3}{9^5}$

Exercice 30. Trouver, si elle existe, la valeur de x qui vérifie les égalités suivantes.

a) $2^3 \cdot 2^x = 2^5$	b) $(-2)^3 = x$
c) $-x^2 = -25$	d) $(-2)^x = 8$
e) $(2)^{2^x} = 256$	f) $-x^3 = 1$
g) $x^3 : x^1 = 16$	h) $7^5 : 7^x = 7^1$

6.3 Puissances nulles et entières négatives

Théorème. *Si $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, alors*

1. $a^0 = 1$.
2. $a^{-n} = \dfrac{1}{n}$.

Preuve. L'idée consiste à calculer $\dfrac{a^n}{a^n}$, respectivement $\dfrac{a^0}{a^n}$ de deux manières différentes :

1. $$\frac{a^n}{a^n} = \begin{cases} a^{n-n} & = & a^0 \\ 1 & & \end{cases}.$$
2. $$\frac{a^0}{a^n} = \begin{cases} a^{0-n} & = & a^{-n} \\ \dfrac{1}{a^n} & & \end{cases}.$$

□

Remarque. Ces propriétés s'illustrent bien dans le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{rcl} a^3 & = & a \cdot a \cdot a \\ a^2 & = & a \cdot a \\ a^1 & = & a \\ a^0 & = & 1 \\ a^{-1} & = & \frac{1}{a} \\ a^{-2} & = & \frac{1}{a^2} \\ a^{-3} & = & \frac{1}{a^3} \end{array}$$

On remarque que pour aller à la ligne inférieure, on diminue l'exposant de 1 (à gauche de l'égalité) et que l'on divise par a (à droite de l'égalité).

Exemple.

1. $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.
2. $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$.
3. $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$.
4. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = 1 : \dfrac{2}{3} = 1 \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 31. Montrer que

a) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$;

b) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2} = \dfrac{b^2}{a^2}$.

Exercice 32. Effectuer sans calculatrice.

a)	2^{-2}	$(-2)^{-2}$	-2^{-2}
b)	3^0	3^{-1}	-3^{-2}
c)	-5^0	-5^{-1}	$(-5)^{-1}$

Exercice 33. Effectuer sans calculatrice.

a)	$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}$	$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{0}$
b)	$-\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-1}$	$-\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-2}$	$\left(-\dfrac{5}{2}\right)^{2}$
c)	$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{0}$	$\left(\dfrac{-3}{-5}\right)^{-3}$	$\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}$

Exercice 34. Ecrire sous forme de puissance avec la plus petite base possible.

a) $\dfrac{1}{8}$ b) $0,0001$

c) $\dfrac{1}{81}$ d) $0,25$

e) $\dfrac{1}{216}$ f) $0,008$

Exercice 35. Effectuer sans calculatrice, en passant par des fractions.

a)	$0,25^2$	$0,25^{-1}$	$0,25^{-2}$
b)	$0,2^{-1}$	$-0,2^{-2}$	$(-0,2)^{-1}$
c)	$(-0,75)^{-2}$	$-0,125^{-1}$	$0,\overline{3}^{-2}$

6.4 Notation scientifique

Définition. On appelle *notation scientifique* d'un nombre son écriture sous la forme d'un produit de deux facteurs : le premier est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (non compris), ou entre -10 (non compris) et -1, et le deuxième est une puissance entière de 10 :

$$\boxed{a \cdot 10^k \text{ avec } 1 \leq a < 10 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ (ou avec } -10 \leq a < -1 \text{ et } k \in \mathbb{Z}).}$$

Exemple.

1. $24500 = 2,45 \cdot 10^4$.
2. $0,071 = 7,1 \cdot 10^{-2}$.
3. $3'000'000 = 3 \cdot 10^6$.
4. $0,00002 = 2 \cdot 10^{-5}$.
5. $1000 = 1 \cdot 10^3$.
6. $-0,000000324 = -3,24 \cdot 10^{-7}$.

Préfixe	Symbole	10^n
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^9
Méga	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
déca	da	10^1
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}

FIGURE 8 – Multiples et sous-multiples des unités international.

Remarque. Les puissances de 10 sont utiles pour "déplacer" la virgule dans un nombre.

Exercice 36. Ecrire les nombres ci-dessous en notation scientifique.

a) 281 millions
b) 62 milliards
c) $0,35$ trillion
d) $0,02$ billion
e) $456 \cdot 10^{-6}$
f) $0,00018 \cdot 10^{-4}$

Exercice 37. Ecrire les nombres ci-dessous en notation scientifique dans l'unité demandée.

a) $0,081$ km en [mm]
b) 210 m^2 en [cm^2]
c) $0,4$ l en [mm^3]
d) 300000 km $\cdot$ s^{-1} en [m $\cdot$ s^{-1}]
e) 4800 mm^3 en [m^3]
f) 72 mm $\cdot$ h^{-1} en [m $\cdot$ s^{-1}]

Exercice 38. Même consigne.

a) 469 μm en [m]
b) 333 kN en [N]
c) $0,19$ dl en [l]
d) 26 MHz en [Hz]
e) $0,21$ Gt en [t]
f) 600 ns en [s]
g) 56 TW en [W]
h) $0,2$ μs en [s]
i) $1,2$ cl en [l]
j) $0,02$ MV en [V]
k) $0,4$ mA en [A]
l) $8,1$ TJ en [J]
m) 25 pF en [F]
n) 500 ng en [g]

Exercice 39. On estime à 125 milliards le nombre de galaxies dans l'univers. Déterminer le nombre total d'étoiles de l'Univers si l'on admet que chaque Galaxie en comporte environ 100 milliards. Donner la réponse en notation scientifique.

Exercice 40. Effectuer en notation scientifique en notation scientifique sans calculatrice.

a) $400000000 \cdot 90000$ b) $0,0008 : 400000$
c) $(30000000 \cdot 0,000005)^2$ d) $(0,00006 \cdot 0,0005)^3$
e) $10^8 - 10^5$ f) $2 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^5$
g) $\dfrac{3600000 \cdot 0,00002^2}{0,0000003 \cdot 1000^3}$ h) $\dfrac{200 \cdot 10^4 \cdot (10^{10} - 10^8)}{0,0000033}$

6.5 Racines

6.5.1 Définition

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *racine n-ième* de a, noté $\sqrt[n]{a}$, l'unique nombre r positif tel que $r^n = a$. En d'autres termes :

$$\boxed{r = \sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow r^n = a \text{ et } r \geq 0.}$$

Le nombre a s'appelle le *radicande*, le nombre n s'appelle l'indice et $\sqrt[n]{}$ s'appelle le *radical*.

Remarque.

1. Dans le cas où $n = 1$, on a $\sqrt[1]{a} = a$.
2. Dans le cas où $n = 2$, la racine 2-ième s'appelle *racine carrée* et se note $\sqrt{}$ au lieu de $\sqrt[2]{}$.
3. Dans le cas où $n = 3$, la racine 3-ième s'appelle *racine cubique*.

Exemple.

1. $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$.
2. $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}_-^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si $a < 0$ et n impair, on définit la racine n-ième par

$$\boxed{r = \sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow r^n = a.}$$

— Si $a > 0$ et n pair, la racine n-ième de a n'est pas définie.

Exemple.

1. $\sqrt{-9}$ n'existe pas.. En effet, le carré de tout nombre réel est positif.
2. $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$.

Exercice 41. Calculer sans machine.

a) $\sqrt{625}$ b) $\sqrt{0,04}$
c) $\sqrt{0,0009}$ d) $\sqrt{0,0016}$
e) $\sqrt[3]{1000}$ f) $\sqrt[4]{-625}$
g) $\sqrt[3]{343}$ h) $\sqrt[5]{-32}$
i) $\sqrt[3]{-64}$ j) $\sqrt[3]{0,027}$
k) $\sqrt[3]{0,512}$ l) $\sqrt[3]{-0,125}$

Théorème. *Soient a et b deux nombres réels strictement positifs ; m, n et q des entiers strictement positifs ; p un entier quelconque. On a*

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$.
3. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
5. $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$.
6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$.
7. $\sqrt[n\cdot q]{a^{n\cdot p}} = \sqrt[q]{a^p}$.
8. $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

Exemple.

1. $(\sqrt{5})^2 = 5$.
2. $\sqrt[3]{5^3} = 5$.
3. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27}$.
4. $\sqrt{\dfrac{7}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}$.
5. $(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$.
6. $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$.
7. $\sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$.
8. $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.

Exercice 42. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3}$	b) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$
c) $\sqrt[8]{81}\sqrt[8]{27}\sqrt[8]{3}$	d) $\sqrt[6]{125}\sqrt[6]{25}\sqrt[6]{5}$
e) $\sqrt{2^2}$	f) $\sqrt{2^6}$
g) $\sqrt[10]{2^5}$	h) $\sqrt[24]{\sqrt{3^8}}$
i) $\sqrt{4 \cdot 9}$	j) $\sqrt{4 \cdot 25}$
k) $\sqrt{25 \cdot 36}$	l) $\sqrt{4 \cdot 100}$

Exercice 43. Sachant que $\sqrt{27} \cong 5,19$ et $\sqrt{270} \cong 16,43$, approximer les racines suivantes.

a) $\sqrt{2700}$	b) $\sqrt{27000}$
c) $\sqrt{270000}$	d) $\sqrt{0,27}$
e) $\sqrt{0,027}$	f) $\sqrt{0,00027}$

Exercice 44. Sachant que $\sqrt[3]{270} \cong 6,46$ et $\sqrt[3]{2700} \cong 13,92$ approximer les racines suivantes.

a) $\sqrt[3]{27000}$	b) $\sqrt[3]{270000}$
c) $\sqrt[3]{2700000}$	d) $\sqrt[3]{0,27}$
e) $\sqrt[3]{0,027}$	f) $\sqrt[3]{0,00027}$

Exercice 45. Calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{21}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

c) $(\sqrt{5})^3$ d) $(\sqrt{2})^6$

e) $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{20} + \sqrt{5})$ f) $\sqrt{45} : \sqrt{5}$

6.5.2 Décomposition en racines élémentaires

On a vu que si $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}.$$

Soit à calculer $\sqrt{2} + \sqrt{18}$.

A part trouver une approximation de cette somme, il semble à priori impossible de développer davantage cette expression. L'idée consiste à écrire 18 à l'aide de sa décomposition en facteurs premiers, c'est-à-dire $18 = 2 \cdot 3^2$.

On a donc

$$\sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{2} + \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Remarquons au passage que

$$4\sqrt{2} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{32}.$$

De ce qui précède, il est clair que l'intérêt à extraire les carrés parfaits d'une racine est grand.

Exemple.

1. $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5^2} = 5\sqrt{3}$.
2. $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3 \cdot 3^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3^2} = 3\sqrt{3}$.
3. $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2 \cdot 2^4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^4} = 4\sqrt{2}$.
4. $\sqrt{40} = \sqrt{2^3 \cdot 5} = \sqrt{2 \cdot 2^2 \cdot 5} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{2}\sqrt{5}$.

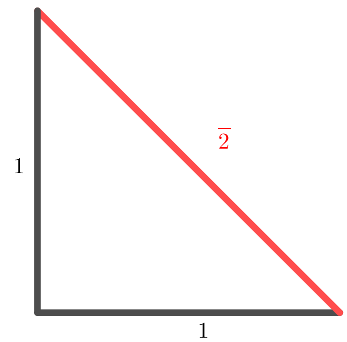
Pour des raions géométriques, on préfère éviter d'avoir des racines au dénominateur d'une fracion. Il convient donc d'amplifier de telles fractions pour faire disparaitre les racines au dénominateur.

Exemple. On a

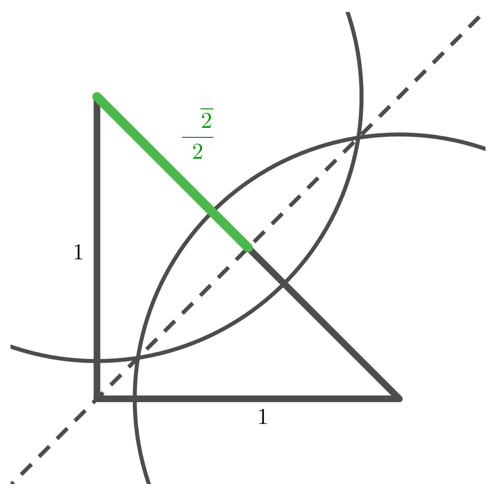
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Cette dernière écriture est privilégiée à la première.

En effet, il est facile de construire géométriquement $\sqrt{2}$; ce nombre étant la mesure de l'hypothénuse d'un triangle isocèle de côté 1.



L'inverse de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ n'est pas commode à construire, alors que $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ l'est en construisant la médiatrice du segment représentatif de $\sqrt{2}$.



Exercice 46. Extraire les carrés parfaits.

a) $\sqrt{8}$	b) $\sqrt{20}$
c) $\sqrt{50}$	d) $\sqrt{72}$
e) $\sqrt{125}$	f) $\sqrt{288}$
g) $\sqrt{1000}$	h) $\sqrt{50000}$
i) $\sqrt{120000}$	j) $\sqrt{250000}$

Exercice 47. Rendre rationnel le dénominateur et simplifier s'il y a lieu.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$	b) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$
c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
e) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$	f) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

Exercice 48. Rendre rationnel le dénominateur et simplifier s'il y a lieu.

a) $\dfrac{4}{3-\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{7}}{6+\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{18}{4-\sqrt{7}}$ d) $\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

e) $\dfrac{\sqrt{6}}{-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{7-5\sqrt{15}}{3-2\sqrt{15}}$ h) $\dfrac{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

Exercice 49. Calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{112}-\sqrt{7}$ b) $5\sqrt{6}-\sqrt{6}$

c) $2\sqrt{2}-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{12}-\sqrt{3}$

e) $\sqrt{48}-\sqrt{3}$ f) $\sqrt{96}-\sqrt{6}$

g) $\sqrt{50}-\sqrt{2}$ h) $6\sqrt{27}+4\sqrt{45}-2\sqrt{75}-4\sqrt{80}$

Solutions

Exercice 1.

a) 41	b) -62
c) 19	d) 20
e) 96	f) 58
g) 60	h) -44
i) 162	j) 192

Exercice 2.

a) $5 \cdot (18+4) = 110$	b) $(5+3) \cdot (1+1) = 16$
c) $80 + 40 : 2 = 100$	d) $(2+2) \cdot (2+2 \cdot 2) = 24$
e) $(9-9) \cdot 9 + 9 = 9$	f) $(3 \cdot 2 + 5) \cdot 6 = 66$
g) $30 : (2+8) = 3$	h) $(5-2) \cdot 9 - 7 = 20$
i) $(100-1) \cdot 100 - 1 = 9899$	j) $3 \cdot (3 + 3 \cdot 3) + 3 - 3 = 36$ ou $(3 \cdot 3 + 3) \cdot 3 + 3 - 3$

Exercice 3.

a) 13	b) 1
c) 16	d) -35
e) -11	f) -46

Exercice 4.

a) -35	b) 3
c) 3	d) -231
e) -2	f) 2

Exercice 5.

a) 8	b) 319
c) 81	d) 90
e) 53	f) Indéterminé
g) Impossible	h) 2

Exercice 6.

a) 13
b) 7
c) -8
d) 3
e) 9
f) -1
g) -5
h) -4
i) 0
j) Impossible
k) 0
l) Indéterminé
m) Indéterminé
n) -2
o) -10
p) -1

Exercice 7.

a) 1
b) 0
c) 0
d) -1
e) -6
f) -10

Exercice 8.

a) 5
b) 0
c) -849
d) -120

Exercice 9.

a) -10
b) 38
c) 37
d) 26
e) -12
f) -4
g) 42
h) 41

Exercice 10.

a) 5
b) 3
c) 11
d) 10
e) 3
f) 17
g) -15
h) -3
i) 4
j) 3
k) 10
l) 8

Exercice 11.

a) $\dfrac{7}{5} = \dfrac{35}{25}$
b) $\dfrac{16}{18} = \dfrac{64}{72}$
c) $\dfrac{8}{20} = \dfrac{40}{100}$
d) $\dfrac{3}{14} = \dfrac{9}{42}$
e) $\dfrac{24}{11} = \dfrac{264}{121}$
f) $\dfrac{4}{8} = \dfrac{5}{10}$
g) $\dfrac{30}{24} = \dfrac{40}{32}$
h) $\dfrac{27}{63} = \dfrac{33}{77}$
i) $\dfrac{27}{36} = \dfrac{21}{28}$
j) $\dfrac{21}{15} = \dfrac{35}{25}$

Exercice 12.

a) $\frac{14}{13}$	b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{3}{4}$	d) $\frac{11}{14}$
e) $\frac{5}{3}$	f) $\frac{9}{7}$
g) $\frac{8}{9}$	h) $\frac{7}{3}$
i) $\frac{3}{4}$	j) $\frac{11}{3}$
k) $\frac{5}{8}$	l) $\frac{1}{13}$
m) $\frac{3}{5}$	n) $\frac{40}{3}$
o) $\frac{8}{75}$	p) $\frac{2}{5}$
q) $\frac{4}{15}$	r) $\frac{38}{27}$
s) $\frac{5}{48}$	t) 12

Exercice 13.

a) $\frac{5}{8}$	b) $\frac{7}{15}$
c) $\frac{11}{18}$	d) $\frac{11}{36}$
e) $\frac{25}{72}$	f) $\frac{2}{3}$
g) $\frac{14}{85}$	h) $\frac{39}{84}$
i) $\frac{31}{90}$	j) $\frac{29}{60}$

Exercice 14.

a) 1	b) $\frac{7}{5}$
c) $\frac{2}{7}$	d) $\frac{1}{6}$
e) $\frac{17}{6}$	f) $\frac{4}{15}$
g) $\frac{13}{12}$	h) 2
i) $\frac{13}{18}$	j) $\frac{1}{6}$
k) $\frac{25}{12}$	l) $\frac{1}{30}$
m) $\frac{1}{6}$	n) $\frac{41}{18}$
o) $\frac{761}{100}$	p) $\frac{23}{6}$

Exercice 15.

a) $\frac{7}{4}$ b) $\frac{3}{64}$

c) $\frac{6}{11}$ d) $\frac{25}{2}$

e) 10 f) $\frac{6}{5}$

g) $\frac{5}{14}$ h) $\frac{3}{8}$

i) 6 j) 1

k) $\frac{7}{4}$ l) 0

m) $\frac{1}{3}$ n) $\frac{4}{9}$

o) $-\frac{4}{27}$ p) $\frac{7}{20}$

Exercice 16.

a) $\frac{1}{4}$ b) 1

c) $\frac{1}{2}$ d) 51

e) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{160}{9}$

g) $\frac{21}{5}$ h) $\frac{3}{40}$

i) 10 j) $\frac{120}{121}$

k) $\frac{160}{9}$ l) $-\frac{6}{5}$

Exercice 17.

a) $\frac{128}{17}$ b) $\frac{48}{25}$

c) $\frac{113}{60}$ d) 13

e) $\frac{43}{5}$ f) $\frac{3}{20}$

g) $\frac{7}{15}$ h) $-\frac{1}{10}$

i) $\frac{5}{4}$ j) $\frac{72}{5}$

k) $\frac{2}{7}$ l) $\frac{3}{4}$

m) $\frac{7}{6}$ n) $\frac{24}{19}$

Exercice 18.

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{21}{4}$

Exercice 19.

a) $\frac{11}{6}$ b) $\frac{9}{32}$

c) $\frac{14}{33}$ d) $-\frac{4}{3}$

Exercice 20.

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-5,63$			x	x
$9,\overline{2}$			x	x
2π				x
$-\frac{15}{3}$		x	x	x
$\sqrt{2}$				x
$\sqrt{9}$	x	x	x	x

Exercice 21.

a) Vrai.

b) Faux.

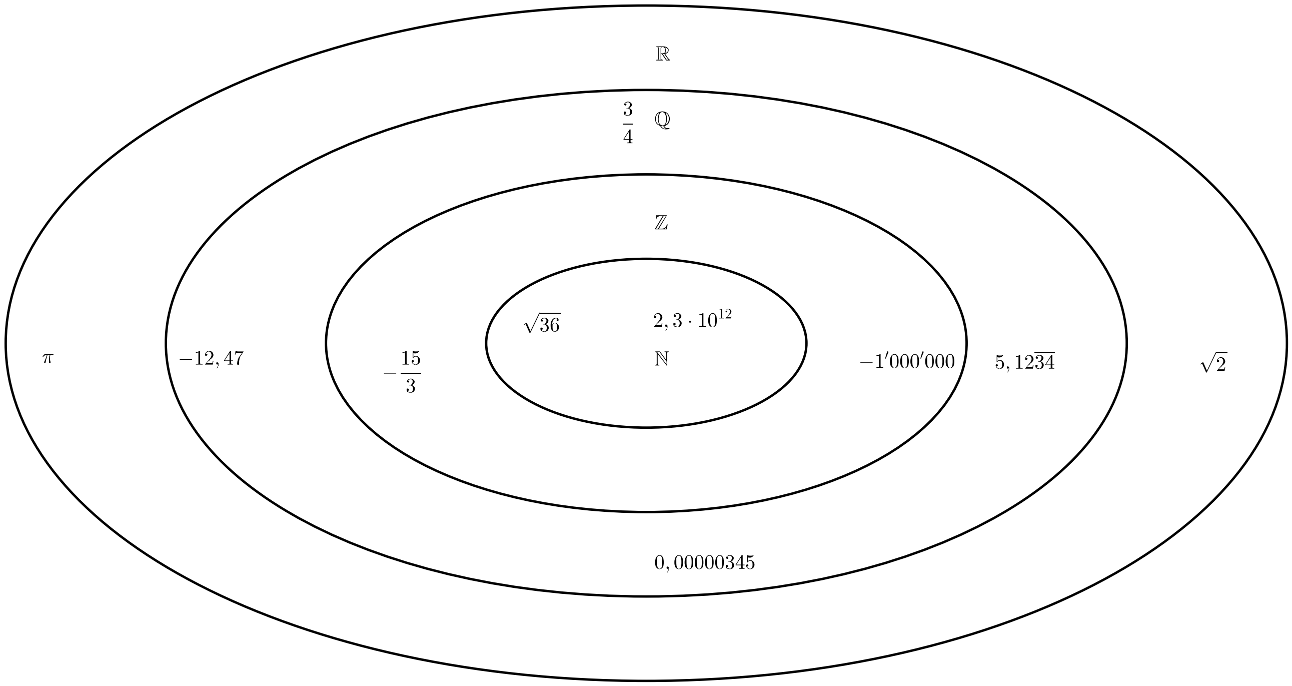
c) Faux.

d) Vrai.

e) Faux.

f) Faux.

Exercice 22.



Exercice 23.

a) $-1000 \in \mathbb{Z}$, mais aussi $-1000 \in \mathbb{Q}$ et $-1000 \in \mathbb{R}$, car $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

b) $-\dfrac{3}{4} \in \mathbb{Q}$, mais aussi $-\dfrac{3}{4} \in \mathbb{R}$, car $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

c) $2\pi \in \mathbb{R}$.

d) $3,14 \in \mathbb{Q}$, mais aussi $3,14 \in \mathbb{R}$, car $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

e) Par exemple $4 + 8 = 12$.

f) $\dfrac{30}{5} = 6$.

g) $30 \cdot 5 = 150$.

h) 2.

Exercice 24.

a) $[-3; 5]$.

b) $[4; 5[$.

c) $]-\infty; 1[$.

d) $[10; +\infty[$.

e) $]-2; 2[$.

f) $]0; +\infty[$.

g) $]-\infty; +\infty[$.

Exercice 25.

a)	-8	-8	8
b)	16	-16	-16
c)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{9}$

Exercice 26.

a) 64

b) 64

c) 4

d) 125

Exercice 27.

a)	-2	-1	1
b)	-16	-4	4
c)	-54	-9	9
d)	2	-1	1
e)	16	-4	4
f)	54	-9	9

Exercice 28.

a) $\dfrac{9}{16}$ b) $-\dfrac{9}{16}$

c) $-\dfrac{9}{4}$ d) $-\dfrac{1}{125}$

e) $\dfrac{1}{125}$ f) $\dfrac{1}{36}$

Exercice 29.

a) 5^7 b) -6^3

c) 8^2 d) $\dfrac{1}{2^6}$

e) $2,5^4$ f) $(-3)^{15}$

g) -2^{18} h) 2^{11}

i) 5^9 j) $2^4 \cdot 3^6 \cdot 4^2 \cdot 5^8$

k) 6^4 l) 9^{-2}

Exercice 30.

a) $x = 2$ b) $x = -8$

c) $x = 5$ d) Impossible

e) $x = 3$ f) $x = -1$

g) $x = 4$ et $x = -4$ h) $x = 4$

Exercice 31.

a) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}\right) = \left(\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}\right) = \dfrac{1}{a} \cdot b = \dfrac{b}{a}\,;$

b) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\dfrac{a^{-2}}{b^{-2}}\right) = \left(\dfrac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}\right) = \dfrac{1}{a^2} \cdot b^2 = \dfrac{b^2}{a^2}\,;.$

Exercice 32.

a)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
b)	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$
c)	-1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Exercice 33.

a)	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	1
b)	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{25}$	$\frac{25}{4}$
c)	1	$\frac{125}{27}$	$\frac{25}{9}$

Exercice 34.

a) 2^{-3} b) 10^{-4}
c) 3^{-4} d) 2^{-2}
e) 6^{-3} f) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$

Exercice 35.

a)	$0,0625$	4	16
b)	5	-25	-5
c)	$\frac{16}{9}$	-8	9

Exercice 36.

a) $2,81 \cdot 10^8$ b) $6,2 \cdot 10^{10}$
c) $3,5 \cdot 10^{14}$ d) $2 \cdot 10^{10}$
e) $4,56 \cdot 10^{-4}$ f) $1,8 \cdot 10^{-8}$

Exercice 37.

a) $8,1 \cdot 10^4$ mm b) $2,1 \cdot 10^6$ cm^2
c) $4 \cdot 10^5$ mm^3 d) $3 \cdot 10^6$ m $\cdot$ s^{-1}
e) $4,8 \cdot 10^{-6}$ m^3 f) $2 \cdot 10^{-5}$ m $\cdot$ s^{-1}

Exercice 38.

a) $4,69 \cdot 10^{-4}$ m	b) $3,33 \cdot 10^{5}$ N
c) $1,9 \cdot 10^{-2}$ l	d) $2,6 \cdot 10^{7}$ Hz
e) $2,1 \cdot 10^{8}$ t	f) $6 \cdot 10^{-7}$ s
g) $5,6 \cdot 10^{13}$ W	h) $2 \cdot 10^{-7}$ s
i) $1,2 \cdot 10^{-2}$ l	j) $2 \cdot 10^{4}$ V
k) $4 \cdot 10^{-4}$ A	l) $8,1 \cdot 10^{12}$ J
m) $2,5 \cdot 10^{-13}$ F	n) $5 \cdot 10^{-7}$ g

Exercice 39. $1,25 \cdot 10^{22}$ étoiles.

Exercice 40.

a) $3,5 \cdot 10^{13}$	b) $2 \cdot 10^{-9}$
c) $2,25 \cdot 10^{4}$	d) $2,7 \cdot 10^{-23}$
e) $9,99 \cdot 10^{7}$	f) $1,7 \cdot 10^{6}$
g) $4,8 \cdot 10^{-6}$	h) $6 \cdot 10^{21}$

Exercice 41.

a) 25	b) $0,2$
c) $0,03$	d) $0,04$
e) 10	f) Pas défini
g) 7	h) -2
i) -4	j) $0,3$
k) $0,8$	l) $-0,5$

Exercice 42.

a) 3	b) 2
c) 3	d) 5
e) 2	f) 8
g) $\sqrt{2}$	h) $\sqrt[3]{3}$
i) 6	j) 10
k) 30	l) 20

Exercice 43.

a) $51,9$	b) $164,3$
c) 519	d) $0,519$
e) $0,1643$	f) $0,01643$

Exercice 44.

a) 30	b) $64,6$
c) $139,2$	d) $0,646$
e) $0,3$	f) $0,0646$

Exercice 45.

a) 21 b) $3 \cdot \sqrt{6}$
c) $5 \cdot \sqrt{5}$ d) 8
e) 15 f) 3

Exercice 46.

a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$
c) $5\sqrt{2}$ d) $6\sqrt{2}$
e) $5\sqrt{5}$ f) $12\sqrt{2}$
g) $10\sqrt{10}$ h) $100\sqrt{5}$
i) $200\sqrt{3}$ j) 500

Exercice 47.

a) $\sqrt{3}$ b) 5
c) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
e) $3\sqrt{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

Exercice 48.

a) $\dfrac{2\sqrt{3}+6}{3}$ b) $\dfrac{6\sqrt{7}-7}{29}$
c) $2\sqrt{7}+8$ d) $\dfrac{\sqrt{10}+2}{3}$
e) $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ f) $4-\sqrt{15}$
g) $\dfrac{\sqrt{15}+129}{51}$ h) $6\sqrt{35}-35$

Exercice 49.

a) $3\sqrt{7}$ b) $4\sqrt{6}$
c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$
e) $3\sqrt{3}$ f) $3\sqrt{6}$
g) $4\sqrt{2}$ h) $8\sqrt{3}-4\sqrt{5}$

Table des matières