Fonctions polynômes

Karim Saïd

Ecole technique, Janvier 2020

1 Introduction

Définition. On appelle *fonction polynôme* de degré n toute fonction p dont l'expression fonctionnelle est de la forme

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$$

où les nombres réels a_n, a_{n-1}, ..., a_1 et a_0 sont les *coefficients* de p.

Ci-dessous figurent quelques exemples de graphes de telles fonctions. Dans ce chapitre, nous mettrons en place des outils pour esquisser au mieux le graphe de telles fonctions.

Exemple.

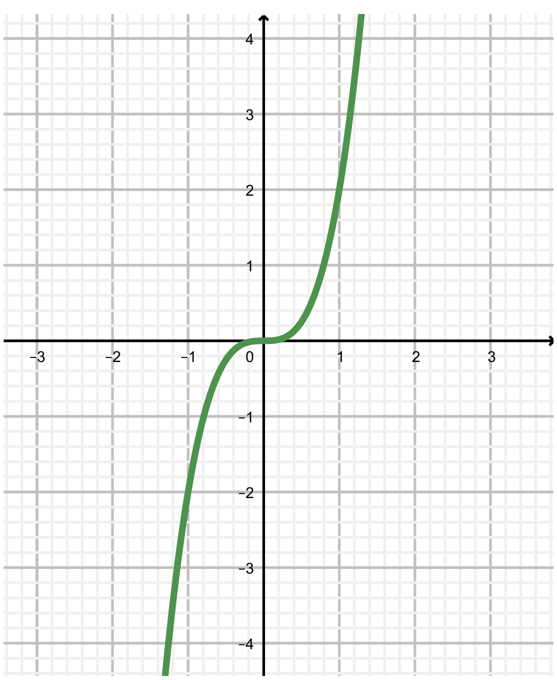


FIGURE 1 – Graphe de $p(x) = 2x^3$.

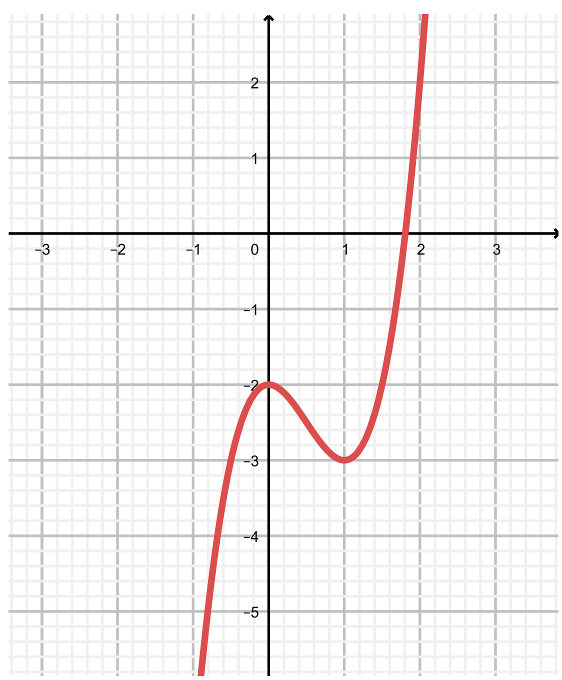


FIGURE 2 – Graphe de $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$.

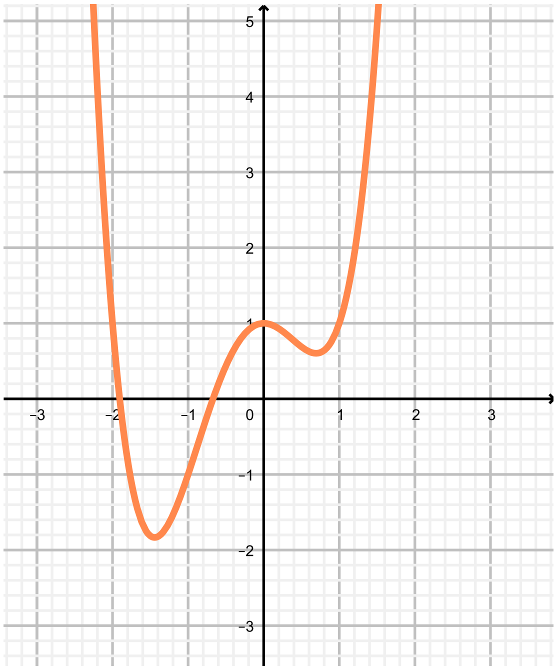


FIGURE 3 – Graphe de $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$.

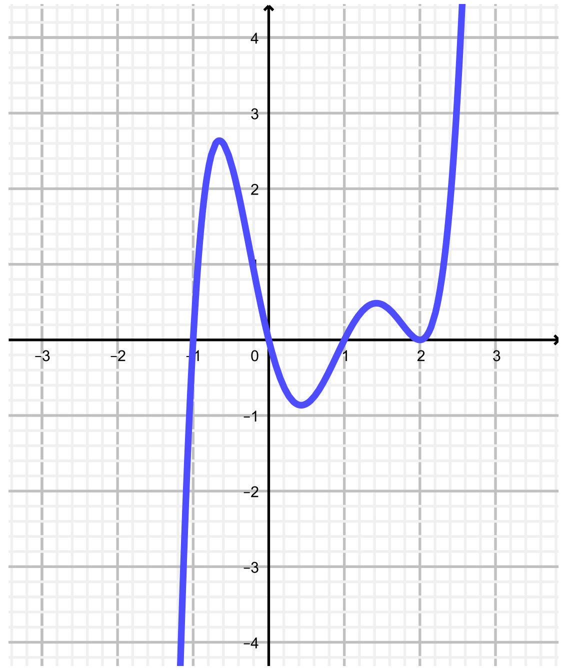


FIGURE 4 – Graphe de $p(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 4x$.

2 Fonctions du troisième degré

2.1 Définition

Définition. La fonction p définie par

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \ a \neq 0$$

est une fonction polynôme du troisième degré.

Exemple.

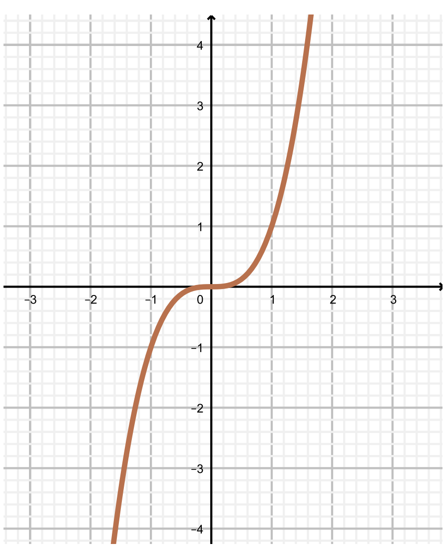


FIGURE 5 – Graphe de $p(x) = x^3$.

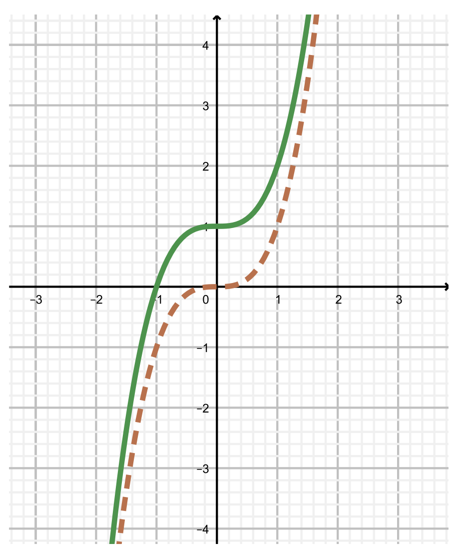


FIGURE 6 – Graphe de $p(x) = x^3 + 1$.

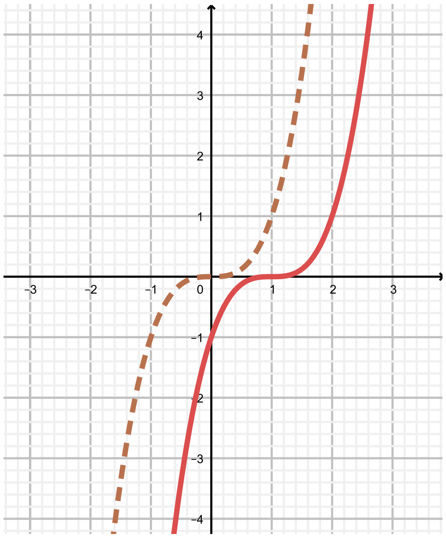


FIGURE 7 – Graphe de $p(x) = (x-1)^3$.

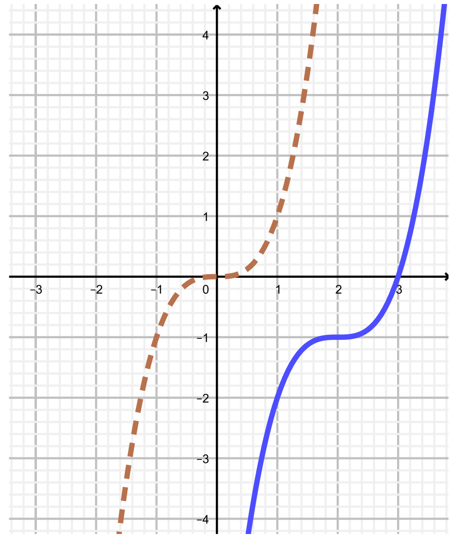


FIGURE 8 – Graphe de $p(x) = (x-2)^3 - 1$.

Exercice 1. Représenter le graphe de f pour les valeurs indiquées de a ou c.

a) $f(x) = -2x^3 + c$, avec $c = 2$ et $c = -2$;

b) $f(x) = a^3 - 3$, avec $a = 2$ et $a = -2$.

Exercice 2. Si $f(x) = 3x^3 - kx^2 + x - 5k$, déterminer la valeur de k telle que le graphe de f contienne le point $(-1; 4)$.

2.2 L'équation du troisième degré

Définition. On appelle *zéro* d'une fonction f toute valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$. On note Z_f l'ensemble des zéros de f.

Exemple. Soit $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Comme $f(x) = (x-2)(x-3)$, on en déduit que les zéros de f sont $x = 2$ et $x = 3$.
Ainsi, $Z_f = \{2; 3\}$.

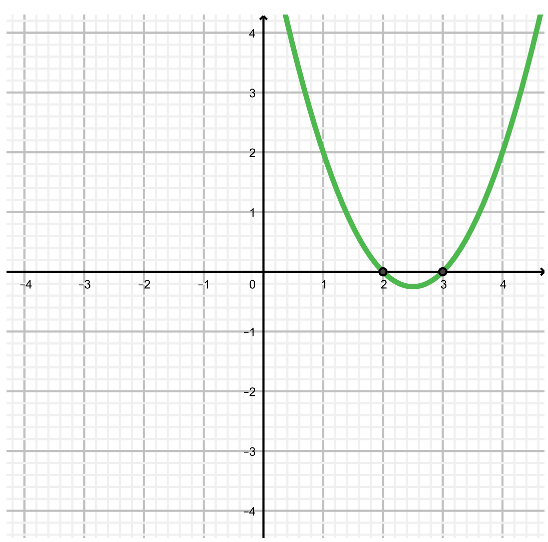


FIGURE 9 – Graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Remarque. Les zéros d'une fonction f correspondent aux abscisses des points d'intersection de f avec l'axe O_x.

Si p est une fonction du troisième degré, il n'est pas toujours aisé de déterminer Z_p. Il cependant possible d'obtenir les solutions d'une équation du troisième degré à l'aide de ladite *formule de Cardan.*

2.2.1 La formule de Cardan

Vers 1510, Scipione del Ferro[1] découvre une méthode de résolution pour l'équation de la forme

$$x^3 + px = q. \tag{1}$$

Mais del Ferro tient sa méthode secrète, comme cela se faisait à cette époque. Mais peu avant sa mort, del Ferro confie sa formule à son élève Antonio Maria Fior. A cette époque, les joutes de mathématiciens dans lesquelles ils devaient répondre à des problèmes qui leur étaient posés, étaient très en vogue. La notoriété d'un mathématicien dépendait beaucoup de ces concours. En 1535, Fior lançe un défi à un mathématicien déjà reconnu, Niccolò Fontana[2], dit Tartaglia (le bègue). Evidemment, Fior propose à Tartaglia une trentaine de problèmes aboutissant à une équation de la forme (1). Après de nombreuses recherches, Tartaglia a réussi à découvrir la formule de résolution de Fior, et même à l'étendre pour l'équation de la forme

$$x^3 = px + q. \tag{2}$$

Tartaglia propose donc à Fior des problèmes aboutissant exclusivement à des équations de la forme (2)[3]. La renommée de Fior a donc pris fin avec ce concours.

Par suite, Girolamo Cardano, connu en France sous le nom de Jerôme Cardan[4], demande à Tartaglia de lui donner sa méthode de résolution de l'équation de troisième degré. Tartaglia refuse dans un premier temps. En 1539, Cardan apprend que le marquis des Vasto désire rencontrer Tartaglia, qui se rendit à Milan à cet effet. Mais le marquis ne vient pas au rendez-vous. Tartaglia n'a pas d'autre choix que d'accepter l'hospitalité de Cardan. Il n'a pu repartir qu'après avoir remis à Cardan sa formule de résolution de l'équation de troisième degré, en l'échange de sa parole de la garder secrète. Or, en 1545, Cardan publie sous son nom dans *Ars Magna* la formule de Tartaglia, appelée injustement aujourd'hui *formule de Cardan*, ce qui a provoqué la rage de Tartaglia.

Formulons alors dans la notation actuelle ladite formule de Cardan permettant de résoudre l'équation du troisième degré de la forme

$$x^3 + px + q = 0. \tag{3}$$

Posons

$$x = u + v. \tag{4}$$

1. Scipione del Ferro (1465-1526) mathématicien italien.
2. Niccolò Fontana (1499-1557), mathématicien italien.
3. A cette époque, l'équation (1) n'était pas considérée comme étant de la même forme que l'équation (2) comme c'est le cas aujourd'hui.
4. Jérôme Cardan, mathématicien, philosophe, astrologue, inventeur et médecin italien (1501-1576).

En substituant (4) dans (3), on obtient

$$\begin{aligned} (u+v)^3 + p(u+v) + q &= 0; \\ u^3 + 3uv(u+v) + v^3 + p(u+v) + q &= 0; \\ (u+v)(3uv+p) + u^3 + v^3 + q &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Dans (5), on a la liberté de poser $3uv + p = 0$, c'est-à-dire

$$v = -\frac{p}{3u}. \tag{6}$$

En injectant (6) dans (5), on obtient :

$$\begin{aligned} u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q &= 0; \\ 27u^6 + 27qu^3 - p^3 &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

L'équation (7) est une équation bicarrée, dont les solutions s'obtiennent à l'aide de la formule de Viète. On a donc

$$\begin{aligned} u^3 &= \frac{-27q \pm \sqrt{27^2q^2 + 4 \cdot 27 \cdot p^3}}{2 \cdot 27} = \frac{-27q \pm \sqrt{27^2\left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)}}{2 \cdot 27} = \frac{-27q \pm 27\sqrt{\left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)}}{2 \cdot 27} \\ &= \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \\ &= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit la valeur de u, puis celle de v par (6) et enfin celle de x par (4).

Remarque. L'équation générale du troisième degré

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

peut se ramener à une équation de la forme $y^3 + py + q = 0$ en posant $x = y - \frac{a}{3}$.

Exemple. Considérons l'équation

$$x^3 - 15x - 126 = 0. \tag{8}$$

Le graphe de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 15x - 126 = 0$ montre que $x = 6$ est l'unique solution de l'équation (8).

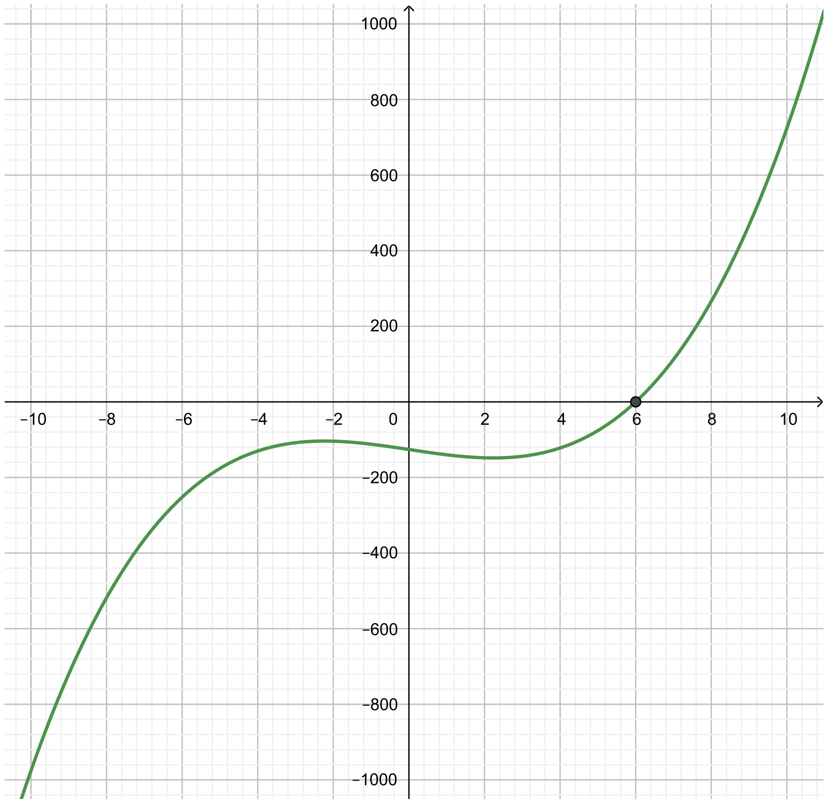


FIGURE 10 – Graphe de la fonction $f(x) = x^3 - 15x - 126$.

Retrouvons cette unique solution à l'aide de la formule de Cardan. On a

$$u^3 = -\frac{-126}{2} \pm \sqrt{\frac{(-126)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}} = 63 \pm \sqrt{3844} = 63 \pm 62.$$

On obtient donc deux valeurs pour u, à savoir

$$u_1 = \sqrt[3]{63+62} = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ et } u_2 = \sqrt[3]{63-62} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

S'ensuivent les valeurs de v_1 et v_2, qui sont données par

$$v_1 = -\frac{-15}{3 \cdot 5} = 1 \text{ et } v_2 = -\frac{-15}{3 \cdot 1} = 5.$$

Ainsi, les deux couples donnent l'unique solution

$$x = u_1 + v_1 = u_2 + v_2 = 1 + 5 = 6.$$

Remarque. Il existe également une méthode de résolution de l'équation générale du quatrième degré. Il s'agit de ladite *formule de Ferrari* [5]. Evariste Galois [6] a démontré que l'équation générale de degré $n \geq 5$ n'est pas résoluble par radicaux, c'est-à-dire à l'aide d'une "formule".

2.2.2 Quelques cas particulers d'équations du troisième degré

La formule de Cardan étant fastidieuse à appliquer, nous nous contenterons d'étudier quelques cas particuliers d'équations du troisième degré pouvant se résoudre par factorisation.

5. LUDOVICO FERRARI (1522 - 1565), un mathématicien italien.
6. EVARISTE GALOIS (1811-1832), mathématicien français.

Exemple.

1. Soit $p(x) = x^3 + x^2 - 2x$.
   On pose $p(x) = 0$:
$$\begin{array}{rcl} x^3 + x^2 - 2x & = & 0 \\ x(x^2 + x - 2) & = & 0 \\ x(x+2)(x-1) & = & 0. \end{array}$$
   D'où les solutions $x = 0$, $x = -2$ et $x = 1$.
   Ainsi, $Z_p = \{0; -2; 1\}$.

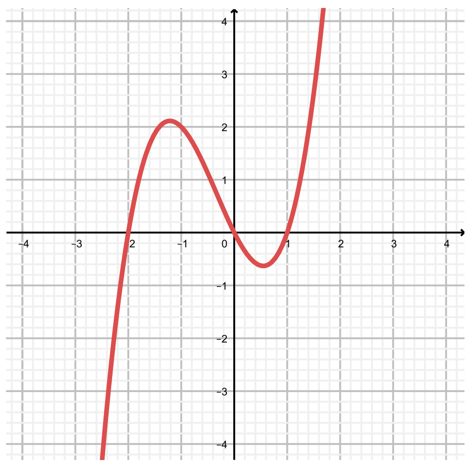


FIGURE 11 – Graphe de $p(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

2. Soit $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.
   On pose $p(x) = 0$:
$$\begin{array}{rcl} x^3 - 3x^2 - x + 3 & = & 0 \\ x^2(x-3) - (x-3) & = & 0 \\ (x-3)(x^2-1) & = & 0 \\ (x-3)(x-1)(x+1) & = & 0. \end{array}$$
   D'où les solutions $x = 3$, $x = 1$ et $x = -1$.
   Ainsi, $Z_p = \{3; 1; -1\}$.

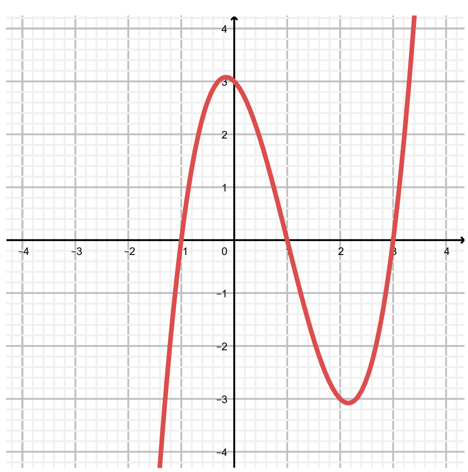


FIGURE 12 – Graphe de $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

3. Soit $p(x) = x^3 + 2x^2$.
   On pose $p(x) = 0$:
$$\begin{array}{rcl} x^3 + 2x^2 & = & 0 \\ x^2(x+2) & = & 0. \end{array}$$
   D'où les solutions $x = 0$ et $x = -2$.
   Ainsi, $Z_p = \{0; -2\}$.

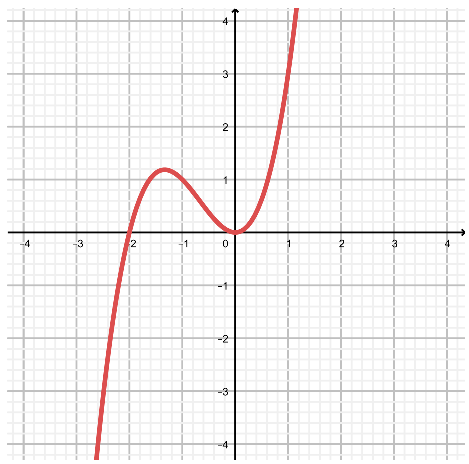


FIGURE 13 – Graphe de $p(x) = x^3 + 2x$.

4. Soit $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
   On pose $p(x) = 0$:
$$\begin{array}{rcl} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & = & 0 \\ (x-1)^3 & = & 0. \end{array}$$
   D'où la solution $x = 1$.
   Ainsi, $Z_p = \{1\}$.

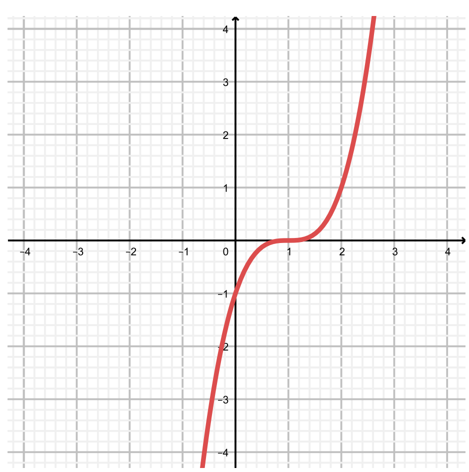


FIGURE 14 – Graphe de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Remarque. Les exemples ci-dessus montrent qu'une fonction du troisième degré admet au moins un zéro.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes par factorisation.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

b) $4x^5 - 12x^4 + 9x^3 = 0$

c) $16x^3 - 16x^2 - 4x + 4 = 0$

d) $2x^3 - 8x^2 + 8x = 0$

e) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

f) $4x^3 - 12x^2 + 9x = 0$

g) $3x^4 - 13x^3 - 10x^2 = 0$

h) $(x^5 - 9x^4)(x - 1)(x^2 - 1) = 0$

i) $2x^4 - 8x^3 + 4x^2 = 0$

j) $(x^2 + 4)(x^2 + 9) = 0$

Exercice 4.

a) Déterminer un polynôme $p(x)$ non nul qui s'annule en $x = -1$, $x = 1$, $x = 4$ et en $x = 0$. (à proposer sous sa forme développée) ;

b) Existe-t-il d'autres polynômes satisfaisant aux mêmes conditions ?

Exercice 5. Déterminer un polynôme $p(x)$ du troisième degré qui a les zéros indiqués et qui vérifie la condition donnée.

a) $Z_p = \{-1; 2; 3\}$ et $f(-2) = 80$;

b) $Z_p = \{-5; 2; 4\}$ et $f(3) = -24$;

c) $Z_p = \{-4; 3; 0\}$ et $f(2) = -36$;

d) $Z_p = \{-3; -2; 0\}$ et $f(-4) = 16$.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, déterminer un polynôme $p(x)$ de coefficient dominant 1, ayant le degré et l'ensemble des zéros indiqués.

a) degré 3, $Z_p = \{-2; 0; 5\}$;

b) degré 3, $Z_p = \{-2; 2; 3\}$;

c) degré 4, $Z_p = \{-2; -1; 1; 4\}$;

d) degré 4, $Z_p = \{-3; 0; 1; 5\}$.

3 Division euclidienne

Le but de cette section consiste à généraliser l'algorithme de division de deux nombres au cas des polynômes. A cet effet, on rappelle ci-dessous comment effectuer une telle division.

Exemple.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 1173 & 5 \\ \cline{3-3}
- & 10 & 234 \\ \cline{2-2}
 & 17 & \\
- & 15 & \\ \cline{2-2}
 & 23 & \\
- & 20 & \\ \cline{2-2}
 & 3 &
\end{array}
$$

Ainsi, le *quotient* est de 234 et le *reste* de 3. Cela permet d'écrire

$$1173 = 5 \cdot 234 + 3$$

ou de manière équivalente

$$\frac{1173}{5} = 234 + \frac{3}{5}.$$

Théorème. *Si le reste de la division du nombre p par le nombre d donne un quotient de q et un reste de r, alors*

$$\boxed{p = d \cdot q + r} \qquad \textit{(Egalité fondamentale I)}$$

ou de manière équivalente

$$\boxed{\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d}.} \qquad \textit{(Egalité fondamentale II)}$$

Définition. On appelle p le *dividende*, d le *diviseur*, q le *quotient* et r le *reste*.

3.1 Algorithme de division euclidienne

Par analogie avec l'exemple ci-dessus, diviser un polynôme $p(x)$ par un polynôme $d(x)$ revient donc à chercher des polynômes $q(x)$ et $r(x)$ tels que

$$\boxed{p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \text{ avec } \deg(r(x)) < \deg(q(x))} \qquad \text{(Egalité fondamentale I)}$$

ou de manière équivalente

$$\boxed{\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.} \qquad \text{(Egalité fondamentale II)}$$

Définition. On appelle $p(x)$ le *dividende*, $d(x)$ le *diviseur*, $q(x)$ le *quotient* et $r(x)$ le *reste*.

Exemple. Effectuons la division de $x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ par $x^2 - 1$.

$$\begin{array}{rr|l}
- & x^3 - 3x^2 + 5x - 1 & x^2 - 1 \\ \cline{3-3}
 & x^3 \qquad\quad - x & x - 3 \\ \cline{2-2}
- & -3x^2 + 6x - 1 & \\
 & -3x^2 \qquad + 3 & \\ \cline{2-2}
 & 6x - 4 &
\end{array}$$

Le quotient de la division est $x - 3$ et le reste est $6x + 4$. On peut écrire

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = (x^2 - 1) \cdot (x - 3) + 6x - 4$$

ou

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 1}{x^2 - 1} = x - 3 + \frac{6x - 4}{x^2 - 1}.$$

En effet, on a bien

$$\begin{aligned}
(x^2 - 1) \cdot (x - 3) + 6x - 4 &= x^3 - 3x^2 - x + 3 + 6x - 4 \\
&= x^3 - 3x^2 + 5x - 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x-3+\frac{6x-4}{x^2-1} &= \frac{(x-3)(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{6x-4}{x^2-1}\\
&= \frac{x^3-x-3x^2+3}{x^2-1}+\frac{6x-4}{x^2-1}\\
&= \frac{x^3-x-3x^2+3+6x-4}{x^2-1}\\
&= \frac{x^3-3x^2+5x-1}{x^2-1}.
\end{aligned}$$

Remarque. Si $p(x)$ est un polynôme de degré n et $d(x)$ est un polynôme de degré m, alors le quotient de la division de $p(x)$ par $d(x)$ est un polynôme de degré $n-m$ et le reste est un polynôme de degré strictement inférieur à m.

Exercice 7. Effectuer les divisions suivantes, puis écrire le quotient sous la forme $d(x)+\dfrac{r(x)}{q(x)}$

a) $3x^4+2x^3-x^2-x-6 : x^2+1$;
b) $3x^3-5x^2-4x-8 : 2x^2+x$;
c) $-5x^2+3 : x^3-3x^2+9$;
d) $7x^2+3x-10 : x^2-x+10$;
e) $x^2-2x+1 : x-1$;
f) $2x^2+3x+4 : x+1$;
g) $3x^2+2x+5 : x+3$;
h) $10x^3-19x^2+26x-8 : 5x-2$;
i) $x^3+1 : x^2-1$;
j) $2x^3-11x^2+23x-20 : 2x^3-5$;
k) $x^6-3x^5+2 : x^2+3x$;
l) $x^3+x^2-8x-12 : x-3$;
m) $2x^3+3x^2-11x : x^2+x-1$;
n) $x^2+7 : x^3+x^2-1$.

Exercice 8. Déterminer un polynôme $p(x)$ tel que le quotient de la division de $p(x)$ par $2x^2+1$ soit égal à $5x^2-3x+1$ et le reste à $-x+1$.

Exercice 9. Déterminer un polynôme $p(x)$ tel que le quotient de la division de $p(x)$ par $5x^2-3$ soit égal à $2x^2-7x+5$ et le reste à $5x+7$.

Exercice 10. Quelle doit être la valeur du nombre m pour que la division ci-dessous n'ait pas de reste ?

$$(x^2-5x+m) : (x-4)$$

3.2 Schéma de Horner

Pour diviser un polynôme par le binôme $x - a$, il existe une méthode schématique appellée *schéma de Horner*[7].

Exemple. Divisons $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x + 2$ par $x - 3$:

$$
\begin{array}{rr|l}
- & x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 & x - 3 \\ \cline{3-3}
 & x^4 - 3x^3 \phantom{+ 2x^2 - x + 2} & x^3 + 2x + 5 \\ \cline{1-2}
- & 2x^2 - x & \\
 & 2x^2 - 6x + 2 & \\ \cline{1-2}
- & 5x + 2 & \\
 & 5x - 15 & \\ \cline{1-2}
 & 17 &
\end{array}
$$

Cette même division peut être effectuée de la manière ci-dessous :

Partons du tableau suivant :

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & -3 & 2 & -1 & 2 & \\
 & & & & & \\
 & & & & & 3 \\ \hline
 & & & & &
\end{array}
$$

Les nombres de la première ligne sont les *coefficients* du polynôme. Le 3 de la deuxième ligne du tableau est le *zéro* de $x - 3$.

Construisont, en commençant par le coin inférieur gauche, le tableau suivant :

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & -3 & 2 & -1 & 2 & \\
 & + & + & + & + & \\
 & 3 & 0 & 6 & 15 & 3 \\ \hline
1 & 0 & 2 & 5 & 17 &
\end{array}
$$

La dernière ligne fournit les coefficients du quotient $x^3 + 2x + 5$ et le reste 17.

Ainsi, les égalités fondamentales s'écrivent

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = (x - 3)(x^3 + 2x + 5) + 17$$

et

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2}{x - 3} = x^3 + 2x + 5 + \frac{17}{x - 3}.$$

Exercice 11. Utiliser le schéma de Horner.

a) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 : x - 2$;

b) $3x^3 - 4x^2 - x - 8 : x + 4$;

c) $x^3 - 8x - 5 : x + 3$;

d) $5x^3 - 6x^2 + 15 : x - 4$;

e) $-2x^4 + 10x - 3 : x - 3$.

7. William G.Horner, mathématicien anglais (1786-1837).

3.3 Divisibilité des polynômes

Définition. On dit qu'un polynôme $p(x)$ est *divisible* par un polynôme $d(x)$ si le reste de la division de $p(x)$ par $d(x)$ est nul.

Exemple. Le polynôme $p(x) = x^4 - 16$ est divisible par $x^2 + 4$, par $x^2 - 4$, par $x + 2$ et par $x - 2$, car

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2).$$

Exercice 12. Décomposer le polynôme $p(x) = 3x^5 - 15x^3 + 12x$ en produit de facteurs irréductibles.

Théorème (Théorème du reste). *Le reste de la division d'un polynôme $p(x)$ par le binôme $x - a$ vaut $p(a)$.*

Preuve. En effet, si $q(x)$ est le quotient et r le reste de la division de $p(x)$ par $x - a$, on a

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a) + r.$$

En remplaçant x par a, on a

$$p(a) = q(a) \overbrace{(a - a)}^{=0} + r = r.$$

□

Exemple. Reprenons l'exemple précédent. On a établi que le quotient de $p(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x + 2$ par $x - 3$ était de $x^3 + 2x + 5$ et le reste de 17, ce qui nous avait permis d'écrire

$$p(x) = (x - 3)(x^3 + 2x + 5) + 17.$$

En évaluant $p(x)$ en $x = 3$, on obtient

$$p(x) = \overbrace{(3 - 3)}^{=0}(3^3 - 2 \cdot 3 + 5) + 17 = 17.$$

Exercice 13. A l'aide du théorème du reste, calculer $p(a)$ dans chacun des cas suivants.

a) $p(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 4$, $a = 2$;
b) $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$, $a = 3$;
c) $p(x) = x^4 - 6x^2 + 4x - 8$, $a = -3$;
d) $p(x) = x^4 + 3x^2 - 12$, $a = -2$;
e) $p(x) = -x^3 + 4x^2 + x$, $a = -2$;
f) $p(x) = 8x^5 - 3x^2 + 7$, $a = \frac{1}{2}$.
g) $p(x) = x^3 - 3x^2 - 8$, $a = 1 + \sqrt{2}$

Exercice 14. Utiliser le schéma de Horner pour calculer la valeur de p en a.

a) $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2,\ a = 2$;
b) $p(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^2 + 2,\ a = -2$;
c) $p(x) = 6x^7 - 3x^6 - 24x^5 + 4x^4 + x^3 - 7x^2 + 3x,\ a = 3$;
d) $p(x) = 3x^3 - x^2 + x + 9,\ a = -2$.

Exercice 15. Calculer le reste de la division de $3x^{100} + 5x^{85} - 4x^{38} + 2x^{17} - 6$ par $x + 1$.

Théorème. *Le nombre a est un zéro de $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ si et seulement si $p(x)$ est divisible par $x - a$.*

Preuve. Par le théorème du reste, on a

$$p(x) = q(x)(x-a) + p(a).$$

On suppose que a est un zéro de $p(x)$. Donc, $p(a) = 0$ et

$$p(x) = q(x)(x-a).$$

Ainsi, $p(x)$ est divisible par $x - a$.

Réciproquement, si $p(x)$ est divisible par $x - a$, le reste doit être nul et donc $p(a) = 0$. $\square$

Exemple.

1. $p(x) = x^5 - 1$ est divisible par $x - 1$ car $p(1) = 0$.
2. Soit à résoudre
$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0.$$
On peut deviner que $x = 2$ est solution de l'équation. Le polynôme $x^3 - x^2 - 14x + 24$ est donc divisible par $x - 2$.
Effectuons alors la division :
$$\begin{array}{rr|l} & x^3 - x^2 - 14x + 24 & x - 2 \\ \cline{3-3} - & x^3 - 2x^2 & x^2 + x - 12 \\ \cline{2-2} & x^2 - 14x + 24 & \\ - & x^2 - 2x & \\ \cline{2-2} & - 12x + 24 & \\ - & - 12x + 24 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$
Le polynôme $x^3 - x^2 - 14x + 24$ s'écrit alors
$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x^2 + x - 12)(x - 2).$$
On a donc
$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 14x + 24 &= 0 \\ (x^2 + x - 12)(x - 2) &= 0 \\ (x + 4)(x - 3)(x - 2) &= 0. \end{aligned}$$
D'où les solutions $x = -4$, $x = 3$ et $x = 2$.

Exercice 16. Montrer que $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$ est divisible par $x - 1$.

Exercice 17. Utiliser la division pour montrer que a est un zéro de $p(x)$.

a) $4x^3 - 9x^2 - 8x - 3$, $a = 3$

b) $27x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, $a = -\frac{1}{3}$

Exercice 18. Déterminer toutes les valeurs de k telles que $p(x)$ soit divisible par le polynôme $q(x)$ donné.

a) $p(x) = kx^3 + x^2 + k^2 x + 3k^2 + 11$, $q(x) = x + 2$;

b) $p(x) = k^2x^3 - 4kx + 3$, $q(x) = x - 1$.

Exercice 19. Déterminer la valeur de a et b pour que $x^5+2x^4+3x^3+4x^2+ax+b$ soit divisible par $x^2 - 5x + 6$.

Exercice 20. Déterminer la valeur du paramètre a pour que $x^4 - ax^3 + 2x^2 + 3ax - a^2$ soit divisible par $x - 2$. Calculer ensuite le quotient.

Exercice 21. Si un zéro de $p(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 16k$ est 2, déterminer la valeur de k et celle des autres zéros.

Exercice 22. Déterminer un polynôme $p(x)$ du troisième degré vérifiant les quatre conditions suivantes :

— $p(0) = 0$;

— $p(1) = 0$;

— il est divisible par $x + 2$;

— le reste de sa division par $x - 3$ vaut -6.

Exercice 23. Déterminer un polynôme $p(x)$ du quatrième degré satisfaisant aux cinq conditions suivantes :

— il admet -2 pour zéro ;

— il est divisible par $x + 1$;

— il admet le facteur x dans sa décomposition en facteurs ;

— il admet 180 pour reste de sa division par $x - 3$;

— $p(2) = 0$.

Exercice 24. Déterminer un polynôme $p(x)$ du cinquième degré satisfaisant aux six conditions suivantes :

— sa valeur en 0 est 0 ;

— il admet 2 pour zéro ;

— il est divisible par $x + 2$;

— il admet $x - 3$ dans sa décomposition en facteurs ;

— il admet 720 pour reste de sa division par $x + 3$;

— $p(1) = 0$.

Exercice 25. Déterminer un polynôme $p(x)$ du cinquième degré satisfaisant aux six conditions suivantes :

— $p(0) = 0$;

— $p(1) = 0$;

— il est divisible par $x + 1$;

— il est divisible par $x + 2$;

— il est divisible par $x - 2$;

— il admet 360 pour reste de sa division par $x - 3$.

Exercice 26. Déterminer un polynôme $p(x)$ du troisième degré satisfaisant aux quatre conditions suivantes :

— sa valeur numérique en 0 est 14 ;

— il est divisible par $x-1$;

— il admet -2 pour zéro ;

— il admet -12 pour reste de sa division par $x-2$.

Exercice 27. Déterminer un polynôme $p(x)$ du quatrième degré satisfaisant aux cinq conditions suivantes :

— sa valeur numérique en 0 est égale à 0 ;

— il est divisible par $x-2$;

— il admet 3 pour zéro ;

— il admet -24 pour reste de sa division par $x+1$;

— $p(1) = 16$.

Définition. Un polynôme est dit *irréductible* s'il ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degré ≥ 1.

Remarque. On peut montrer que les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Tout polynôme peut donc s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles de degré 1 ou 2.

Exemple. $x+1$ est irréductible. Il en est de même pour x^2+x+1.

Théorème. *Un polynôme de degré n a au plus n zéros.*

Théorème. *Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers. Si a est un zéro entier de $p(x)$, alors a est un diviseur de a_0.*

Preuve. Comme a est un zéro entier de $p(x)$, on a

$$\begin{array}{rcl} a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + ... + a_2 a^2 + a_1 a + a_0 & = & 0 \\ a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + ... + a_2 a^2 + a_1 a & = & -a_0 \\ a(a_n a^{n-1} + a_{n-1}a^{n-2} + ... + a_2 a + a_1) & = & -a_0. \end{array}$$

Comme les coefficients de $p(x)$ sont entiers et qu'il en est de même pour $(a_n a^{n-1} + a_{n-1}a^{n-2} + ... + a_2 a + a_1)$, a_0 est donc un multiple de a. Ainsi, a est bien un diviseur de a_0. $\square$

Exemple. Déterminons les zéros de $p(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

Les zéros entiers possibles sont ± 1, ± 2, ± 3 et ± 6, qui sont les diviseurs de -6.

Puisque $p(-3) = p(-2) = p(1) = 0$, on en tire que $x = -3$, $x = -2$ et $x = 1$ sont les zéros de p.

Exercice 28. Deviner une solution des équations suivantes, puis les résoudre par factorisation.

a) $x^3 - 7x + 6 = 0$;

b) $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$;

c) $2x^3 - 9x^2 - 2x + 24 = 0$:

d) $-2x^3 - 2x^2 + 28x + 48 = 0$;

e) $3x^3 + 30x^2 + 57x - 90 = 0$;

f) $2x^4 - 4x^3 - 128x^2 + 4x + 126 = 0$.

4 Fonctions polynômes de degré n

4.1 Tableau de signes

L'objectif de cette section consiste à esquisser le graphe d'une fonction polynômiale de degré n à l'aide de son tableau de signes.

Exemple. Soit la fonction p définie par

$$p(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2).$$

Etablissons le tableau des signes de p :

x		-3		-1		2	
$x+3$	$-$	|	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	|	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	|	$+$
$p(x)$	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$

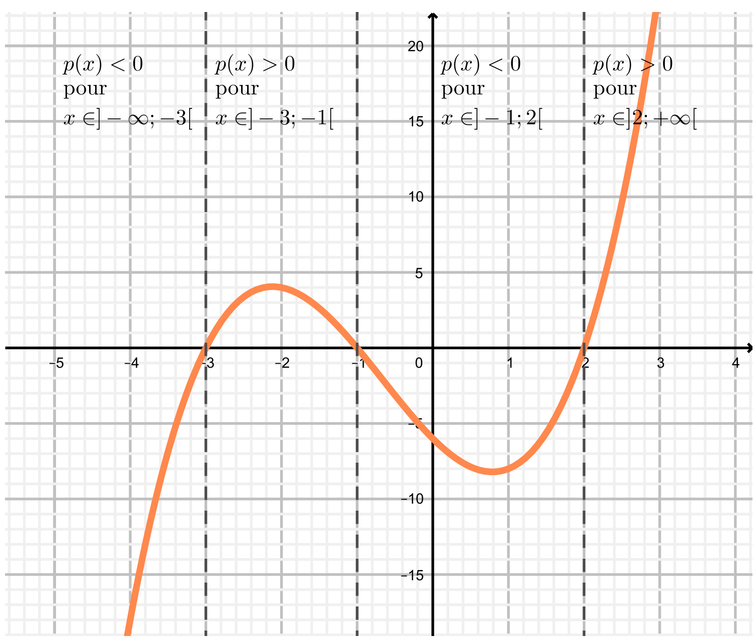


FIGURE 15 – Graphe de $p(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$.

Remarque. Avec les outils vus lors de la formation, il n'est pas possible de déterminer les coordonnées des sommets d'une fonction polynômiale de degré n ; la notion de *dérivée d'une fonction* étant requise.

Exercice 29. Etablir le tableau de signes des polynômes suivants, puis esquisser les graphes des fonctions correspondantes.

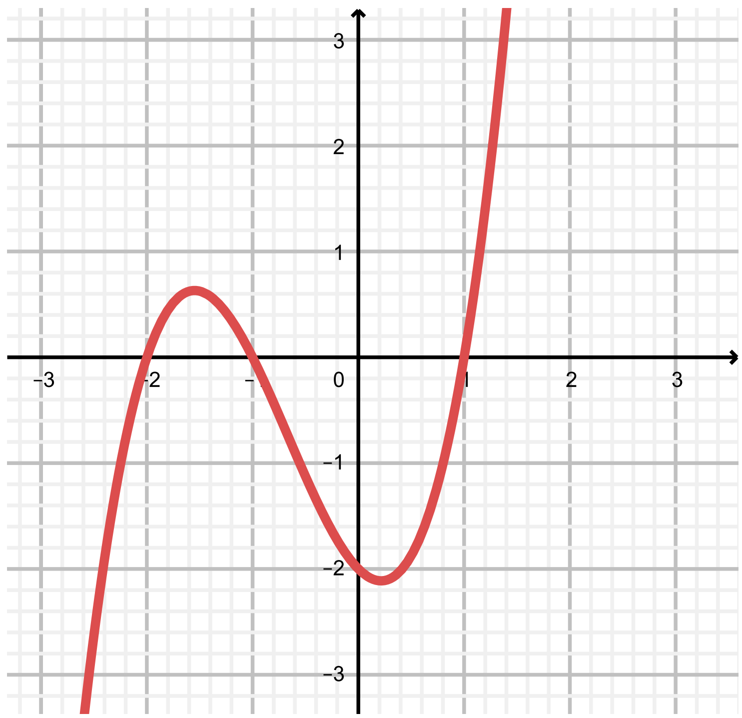
a) $p(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$

b) $p(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

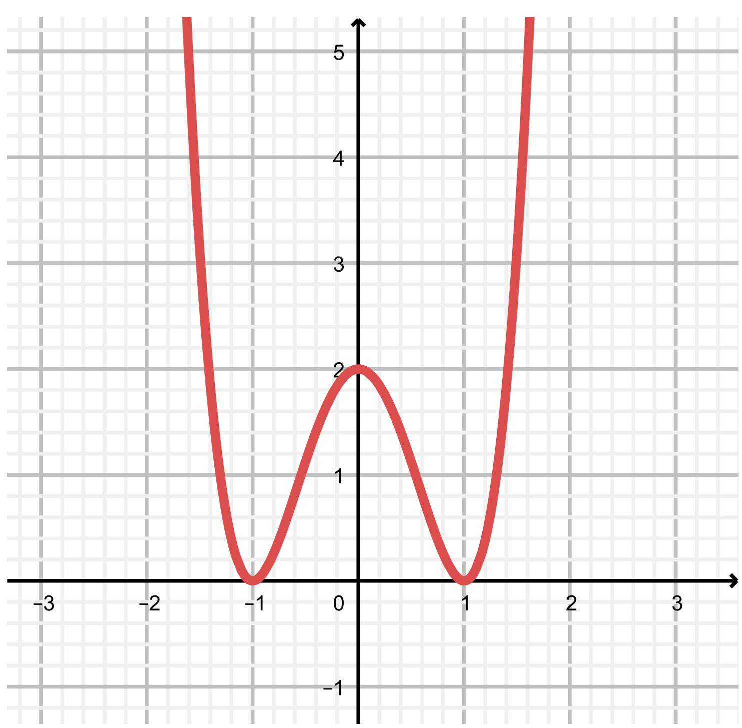
c) $p(x) = x^4 + \dfrac{5}{4}x^3 - \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{25}{16}x$

Exercice 30. Déterminer l'expression fonctionnelle de chacune des fonctions p ci-dessous.

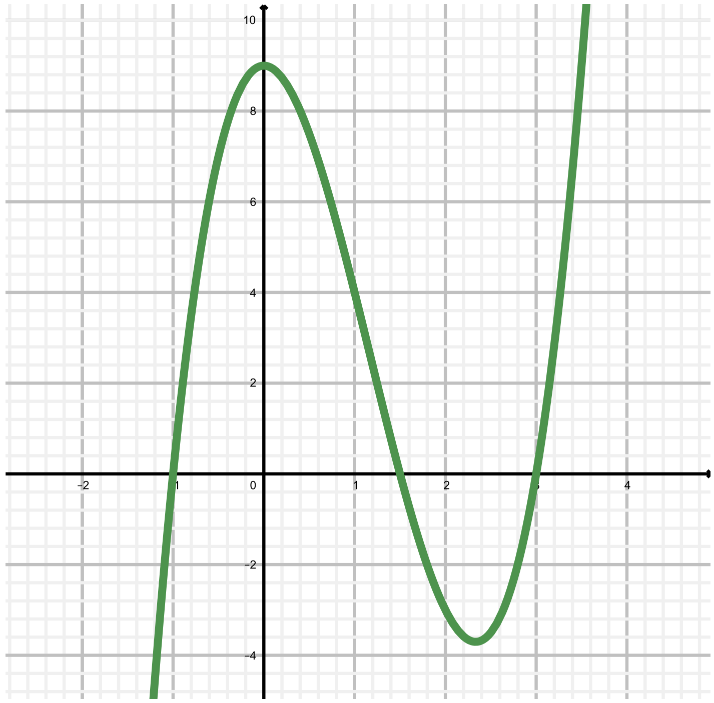
a)



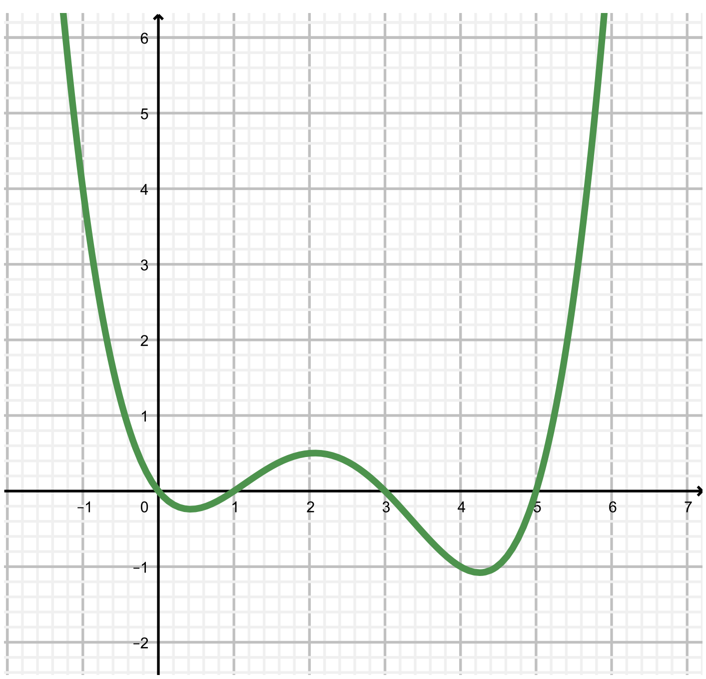
b)



c)



d)



4.2 Multiplicité des zéros d'une fonction

Définition. Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. On dit que $x = a$ est un *zéro de multiplicité* m si il existe $q(x)$ de degré strictement inférieur à $p(x)$ tel que

$$p(x) = (x - a)^m \cdot q(x).$$

Exemple. Soit $p(x) = (x-2)(x-4)(x-2)(x-5)(x-2)(x-5) = (x-2)^3(x-5)^2(x-4)$. On dit que $x = 2$ est un zéro de multiplicité 3, $x = 5$ de multiplicité 2 et $x = 4$ de multiplicité 1.

Exercice 31. Déterminer les zéros de $p(x)$ et donner la multiplicité de chacun d'eux.

a) $p(x) = x^2(2x+3)(2x-5)^3$;
b) $p(x) = x(x+1)^4(3x-7)^2$;
c) $p(x) = 4x^5 + 12x^4 + 9x^3$;
d) $p(x) = (4x^2 - 5)^2$;
e) $p(x) = (x^2 + x - 12)^3(x^2 - 9)^2$;
f) $p(x) = (6x^2 + 7x - 5)^4(4x^2 - 1)^2$.

Exercice 32. Montrer que le nombre donné est un zéro de multiplicité donnée et exprimer $p(x)$ comme un produit de facteurs du premier degré.

a) $p(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 3x - 18$, -3 de multiplicité 2 ;
b) $p(x) = x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 32$, 4 de multiplicité 2 ;
c) $p(x) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 4x - 1$, 1 de multiplicité 5 ;
d) $p(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$, -1 de multiplicité 4.

Exemple. Soit la fonction p définie par

$$p(x) = (x+2)(x-1)^2.$$

Etablissons le tableau des signes de p :

x		-2		1	
$x+2$	$-$	|	$+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	|	$+$
$p(x)$	$-$	|	$+$	|	$+$

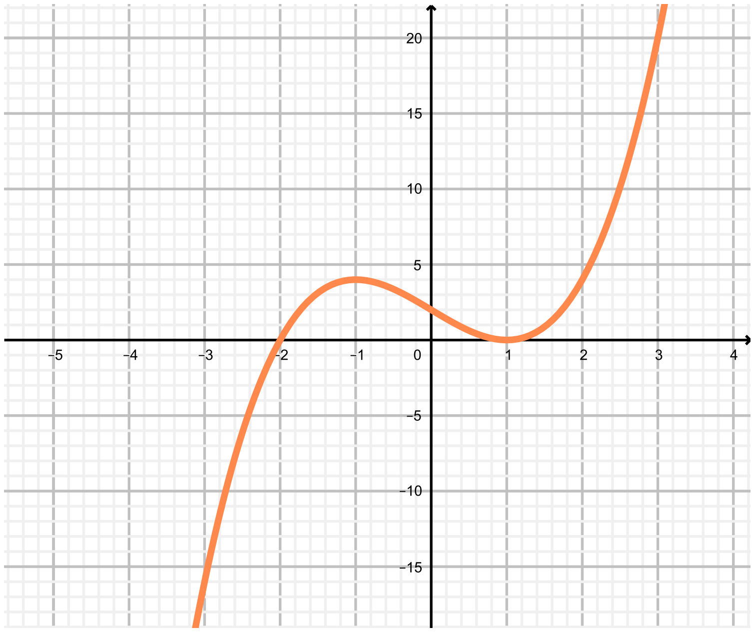


FIGURE 16 – Graphe de $p(x) = (x+2)(x-1)^2$.

Remarque. Si a est un zéro de multiplicité paire de $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, alors p sera tangente à l'axe O_x au point d'abscisse a.

Remarque. Graphiquement, on notera cependant une différence entre un zéro de multiplicité 2 et 4. Pour le premier cas, la fonction sera tangente à l'axe O_x, et au voisinage de ce point, la fonction aura l'allure d'une fonction du deuxième degré. Par contre, pour un zéro de multiplicité 4, la fonction sera également tangente à l'axe O_x au voisinage de ce point, mais plus aplatie.

Exemple.

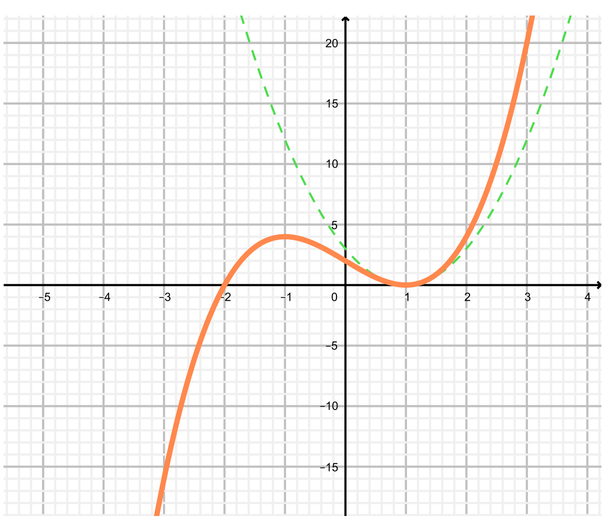


FIGURE 17 – Graphe de $p(x) = (x+2)(x-1)^2$.

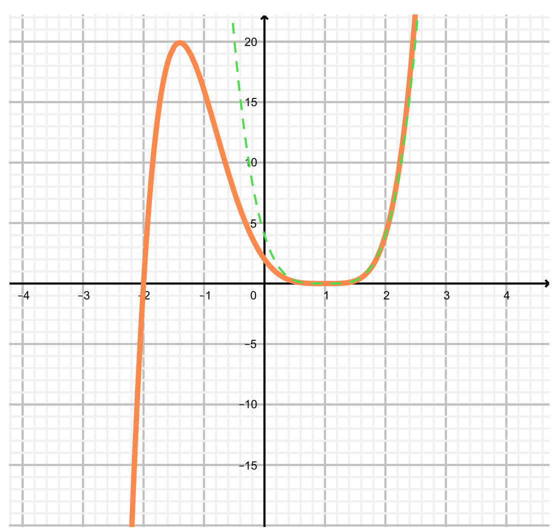


FIGURE 18 – Graphe de $p(x) = (x+2)(x-1)^4$.

Exemple. Soit la fonction p définie par

$$p(x) = (x+2)^2(x-1)^3.$$

Etablissons le tableau des signes de p :

x		-2		1	
$(x+2)^2$	$+$	|	$+$		$+$
$(x-1)^3$	$-$		$-$	|	$+$
$p(x)$	$-$	|	$-$	|	$+$

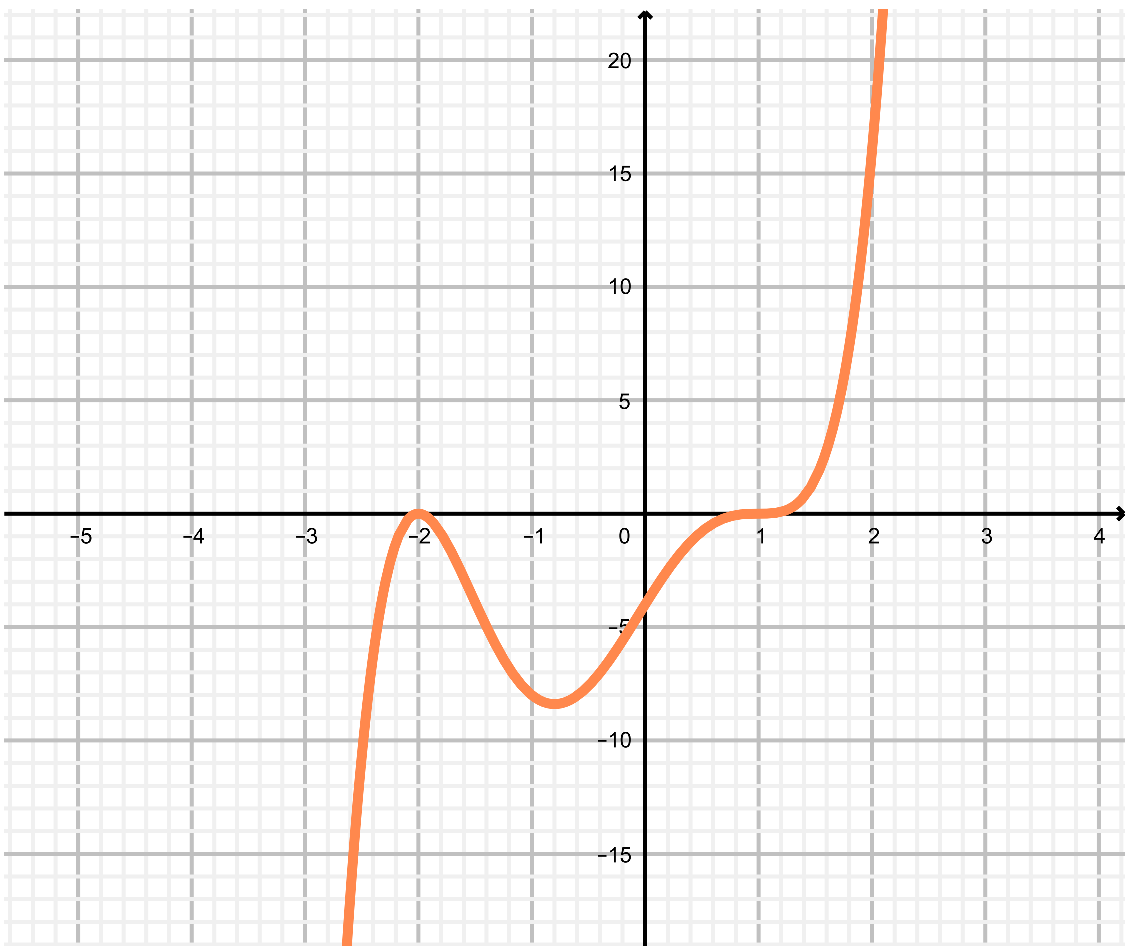


FIGURE 19 – Graphe de $p(x) = (x+2)^2(x-1)^3$.

Remarque. Si a est un zéro de multiplicité impaire de $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, alors p coupera l'axe O_x au point d'abscisse a et le signe de p changera.

Remarque. Graphiquement, on notera cependant une différence entre un zéro de multiplicité 1 et 3. Pour le premier cas, la fonction coupera l'axe O_x, et au voisinage de ce point, la fonction aura l'allure d'une droite. Par contre, pour un zéro de multiplicité 3, la fonction coupera également l'axe O_x au voisinage de ce point, mais aura l'allure d'un polynôme de degré 3.

Exemple.

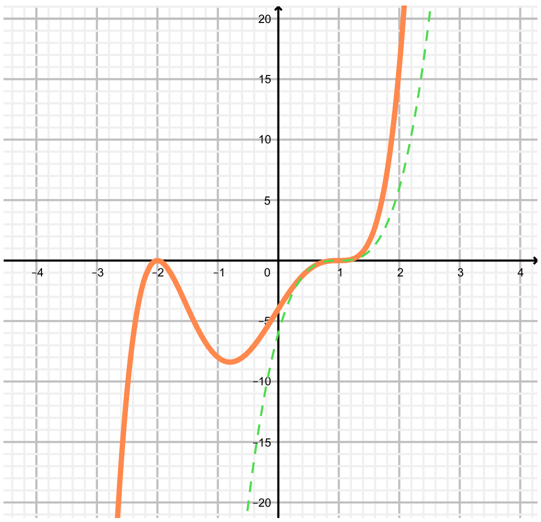


FIGURE 20 – Graphe de $p(x) = (x+2)^2(x-1)^3$.

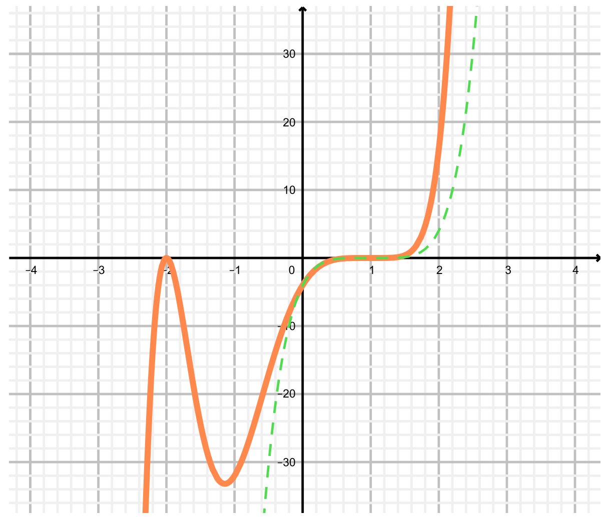


FIGURE 21 – Graphe de $p(x) = (x+2)^2(x-1)^5$.

Exercice 33. Etablir le tableau de signes de chacune des fonctions p suivantes, puis les représenter graphiquement.

a) $p(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - 2$;

b) $p(x) = x^5 + 1$;

c) $p(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2$;

d) $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$;

Exercice 34. Esquisser le graphe de chacune des fonctions p ci-dessous.

a) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 15x$

c) $p(x) = (x^2 - 4)(9 - x^2)(x^2 - x)$

d) $p(x) = (x+2)^2(x-1)$

e) $p(x) = (x^3 - x^2 + x)(2 - x)$

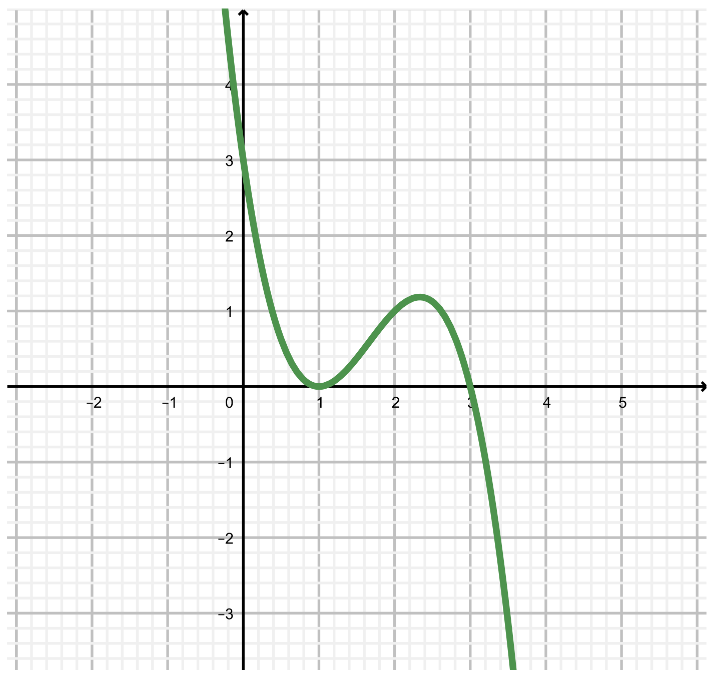
f) $p(x) = -x^3 + 4x$

g) $p(x) = 8x^3 - 4x^2 - 2x + 1$

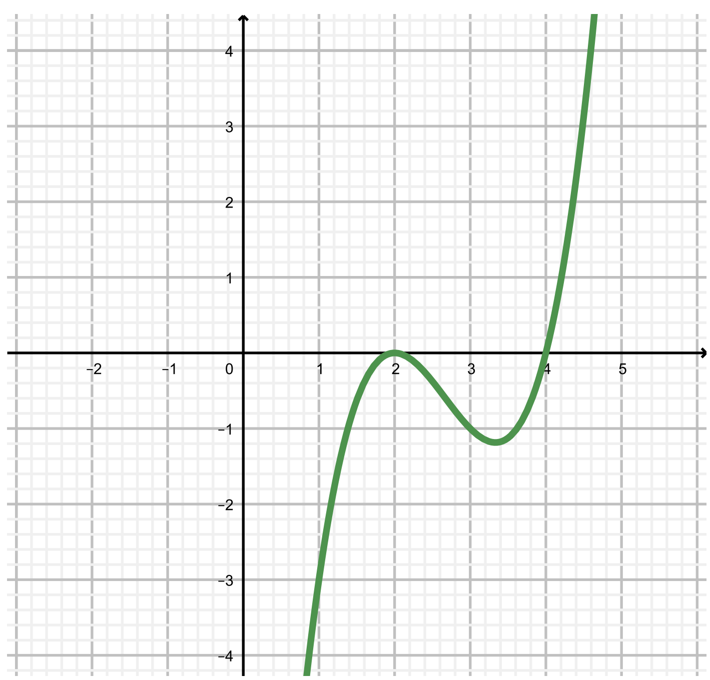
h) $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Exercice 35. Déterminer l'expression fonctionnelle des fonctions du troisième degré ci-dessous.

a)



b)



Exercice 36. Déterminer un polynôme $p(x)$ du quatrième degré et de coefficient dominant 1, admettant -4 et 3 comme zéros de multiplicité 2. Représenter p graphiquement.

Exercice 37. Déterminer un polynôme $p(x)$ du quatrième degré et de coefficient dominant 1, admettant -5 et 2 comme zéros de multiplicité 2. Représenter p graphiquement.

Exercice 38. Déterminer un polynôme $p(x)$ du sixième degré, qui admet 0 et 3 comme zéros de multiplicité 3 et tel que $p(2) = -24$. Représenter p graphiquement.

Exercice 39. Déterminer un polynôme $p(x)$ du septième degré, qui admet -2 et 2 comme zéros de multiplicité 2, ainsi que 0 de multiplicité 3 et tel que $p(-1) = 27$. Représenter p graphiquement.

Exercice 40. Déterminer un polynôme $p(x)$ du quatrième degré satisfaisant aux quatre conditions suivantes :

— il admet 0 comme zéro de multiplicité 2 ;

— il est divisible par $x - 3$;

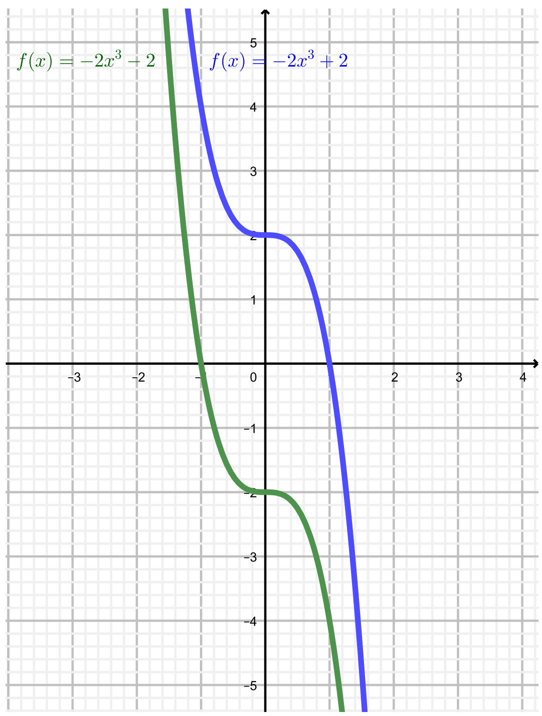
— il admet 2 pour zéro ;

— il admet -630 pour reste de sa division par $x + 3$.

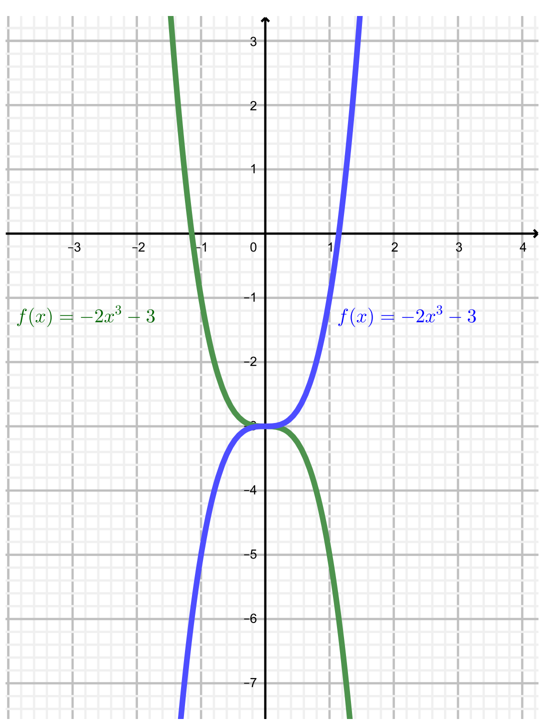
Solutions

Exercice 1.

a) Graphes de $f(x) = -2x^3 + c$, avec $c = 2$ et $c = -2$



b) Graphes de $f(x) = a^3 - 3$



Exercice 2. $k = -\frac{4}{3}$.

Exercice 3.

a) $x = -2$, $x = -1$ et $x = 1$

b) $x = 0$ et $x = \dfrac{3}{2}$

c) $x = 1$, $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = \dfrac{1}{2}$

d) $x = 0$ et $x = 2$

e) $x = 3$, $x = 2$ et $x = -2$

f) $x = 0$ et $x = \dfrac{3}{2}$

g) $x = 0$, $x = 5$ et $x = -\dfrac{2}{3}$

h) $x = 0$, $x = 9$, $x = 1$ et $x = -1$

i) $x = 0$, $x = 2 + \sqrt{2}$ et $x = 2 - \sqrt{2}$

j) Pas de solution

Exercice 4.

a) Par exemple $p(x) = x(x+1)(x-1)(x-4) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x$;

b) Oui, une infinité, on peut proposer $p(x) = -\dfrac{1}{2}x^2(x+1)(1-x)(x-4)^3$ ou plus généralement : $p(x) = x(x+1)(x-1)(x-4) \cdot q(x)$ où $q(x)$ est un polynôme quelconque non nul.

Exercice 5.

a) $p(x) = -4(x+1)(x-2)(x-3)$;

b) $p(x) = 3(x+5)(x-2)(x-4)$;

c) $p(x) = 3x(x+4)(x-3)$;

d) $p(x) = -2x(x+3)(x+2)$.

Exercice 6.

a) $p(x) = x(x+2)(x-5)$;

b) $p(x) = (x-2)(x+2)(x-3)$;

c) $p(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-4)$;

d) $p(x) = x(x+3)(x-1)(x-5)$.

Exercice 7.

a) $3x^2 + 2x - 4 + \dfrac{-3x-2}{x^2+1}$;

b) $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{13}{4} + \dfrac{-\frac{3}{4}x - 8}{2x^2 + x}$;

c) $0 + \dfrac{-5x^2+3}{x^3 - 3x^2 + 9}$;

d) $7+\dfrac{10x-80}{x^2-x+10}$;

e) $x-1+\dfrac{0}{x-1}$;

f) $2x+1+\dfrac{3}{x+1}$;

g) $3x-7+\dfrac{26}{x+3}$;

h) $2x^2-3x+4+\dfrac{0}{5x-2}$;

i) $x+\dfrac{x+1}{x^2-1}$;

j) $1+\dfrac{-11x^2+23x-15}{2x^3-5}$;

k) $x^4-6x^3+18x^2-54x+162+\dfrac{-486x+2}{x^2+3x}$;

l) $x^2+4x+4+\dfrac{0}{x-3}$;

m) $2x+1+\dfrac{-10x+1}{x^2+x-1}$;

n) $0+\dfrac{x^2+7}{x^3+x^2-1}$.

Exercice 8. $p(x)=10x^4-6x^3+7x^2-4x+2$.

Exercice 9. $p(x)=10x^4-35x^3+19x^2+26x-8$.

Exercice 10. $m=4$.

Exercice 11.

a) $2x^2+x+6+\dfrac{7}{x-2}$;

b) $3x^2-16x+63-\dfrac{260}{x+4}$;

c) $x^2-3x+1-\dfrac{8}{x+3}$;

d) $5x^2+14x+56+\dfrac{239}{x-4}$;

e) $-2x^3-6x^2-18x-44-\dfrac{135}{x-3}$.

Exercice 12. $p(x)=3x(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$.

Exercice 13.

a) $p(2)=26$;

b) $p(3)=80$;

c) $p(-3)=7$;

d) $p(-2)=16$;

e) $p(-2) = 22$;
f) $p\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{13}{2}$;
g) $p(1+\sqrt{2}) = -10-\sqrt{2}$.

Exercice 14.

a) $p(2) = 0$;
b) $p(-2) = 190$;
c) $p(3) = 5400$;
d) $p(-2) = -21$.

Exercice 15. -14.

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18.

a) $k = 3$ et $k = 5$;
b) $k = 1$ et $k = 3$.

Exercice 19. $a = -418$ et $b = 732$.

Exercice 20. $a = 4$ et le quotient vaut $x^3 - 2x^2 - 2x + 8$ ou $a = -6$ et le quotient vaut $x^3 + 8x^2 + 18x + 18$.

Exercice 21. $k = 2$, $x = 4$, $x = -4$ et $x = 2$.

Exercice 22. $p(x) = -\dfrac{1}{5}x(x-1)(x+2) = -\dfrac{1}{5}x^3 - \dfrac{1}{5}x^2 + \dfrac{2}{5}x$.

Exercice 23. $p(x) = 3x(x-2)(x+1)(x+2)$.

Exercice 24. $p(x) = -2x(x-2)(x+2)(x-1)(x-3)$.

Exercice 25. $p(x) = 3x(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$.

Exercice 26. $p(x) = (2x-7)(x-1)(x+2)$.

Exercice 27. $p(x) = x(3x+5)(x-2)(x-3)$.

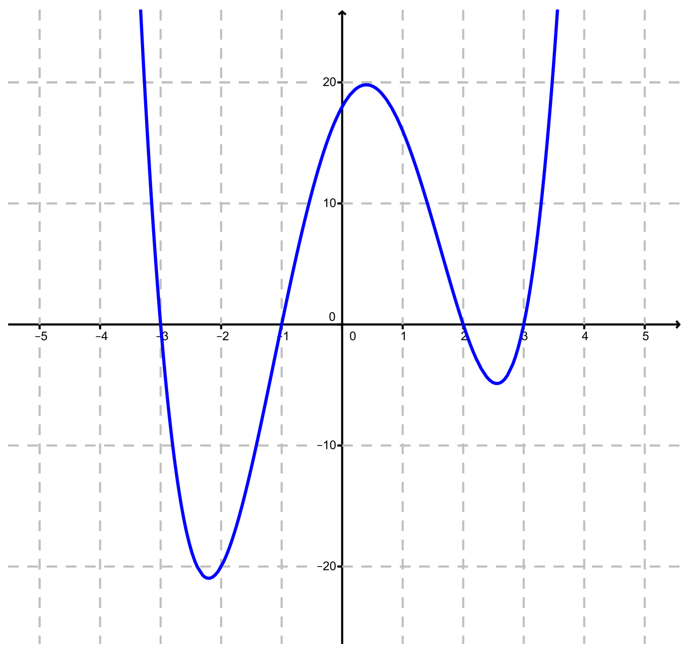
Exercice 28.

a) $x = -3$, $x = 1$ et $x = 2$;
b) $x = -2$;
c) $x = -\dfrac{3}{2}$, $x = 2$ et $x = 4$;
d) $x = 4$, $x = -3$ et $x = -2$;
e) $x = 1$, $x = -5$ et $x = 6$;
f) $x = -1$, $x = 1$, $x = -7$ et $x = 9$.

Exercice 29.

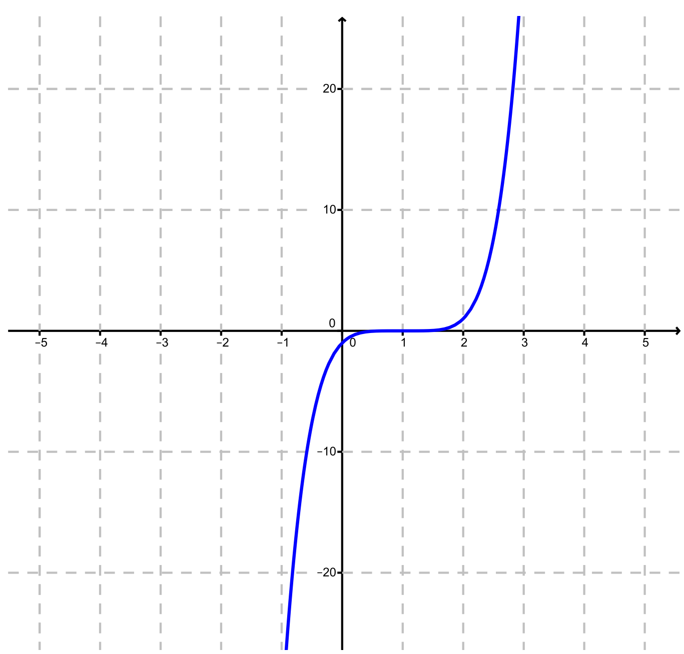
a)

x		-3		-1		2		3	
$p(x)$	$+$	|	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$



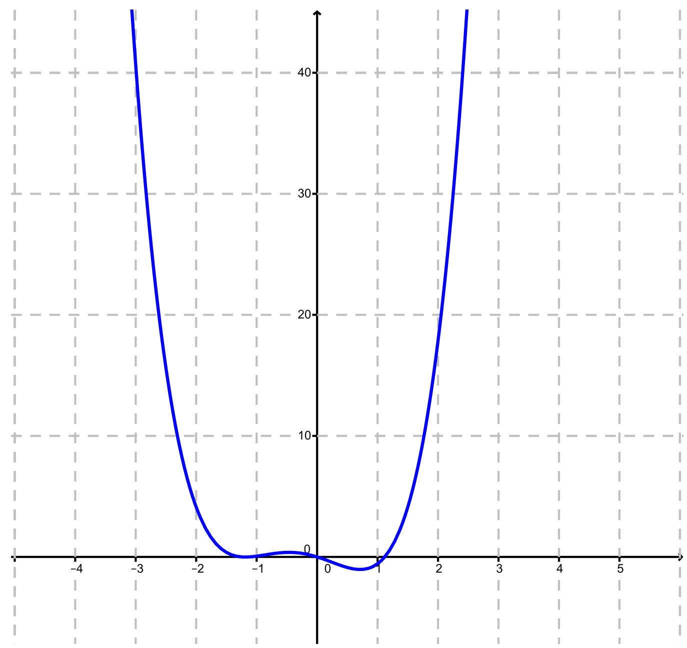
b)

x		1	
$p(x)$	$-$	|	$+$



c)

x		$-\frac{5}{4}$		$-\frac{\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{5}}{2}$	
$p(x)$	$+$	|	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$



Exercice 30.

a) $p(x) = (x+2)(x+1)(x-1)$

b) $p(x) = 2(x+1)^2(x-1)^2$

c) $p(x) = 2(x+1)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)(x-3)$

d) $p(x) = \dfrac{1}{12}x(x-1)(x-3)(x-5)$

Exercice 31.

a) $\dfrac{5}{2}$ de multiplicité 3 ; 0 de multiplicité 2 et $-\dfrac{3}{2}$ de multiplicité 1 ;

b) 0 de multiplicité, -1 de multiplicité 4 et $\dfrac{7}{3}$ de multiplicité 2 ;

c) $-\dfrac{3}{2}$ de multiplicité 2 et 0 de multiplicité 3 ;

d) $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ de multiplicité 2 ;

e) -4 de multiplicité 3, -3 de multiplicité 2 et 3 de multiplicité 5 ;

f) $-\dfrac{5}{3}$ de multiplicité 4, $-\dfrac{1}{2}$ de multiplicité 2 et $\dfrac{1}{2}$ de multiplicité 6.

Exercice 32.

a) $p(x) = (x+3)^2(x+2)(x-1)$;

b) $p(x) = (x-4)^2(x-2)(x+1)$;

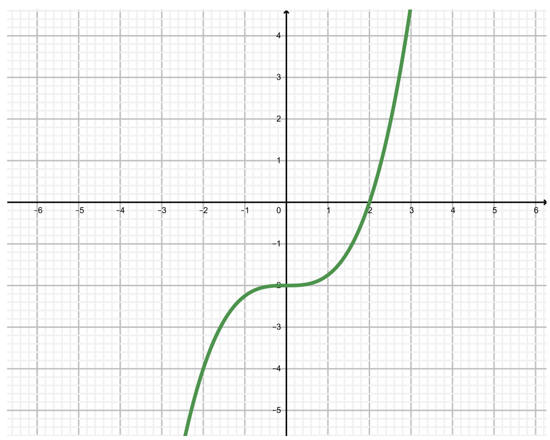
c) $p(x) = (x-1)^5(x+1)$;

d) $p(x) = (x+1)^4(x-3)$.

Exercice 33.

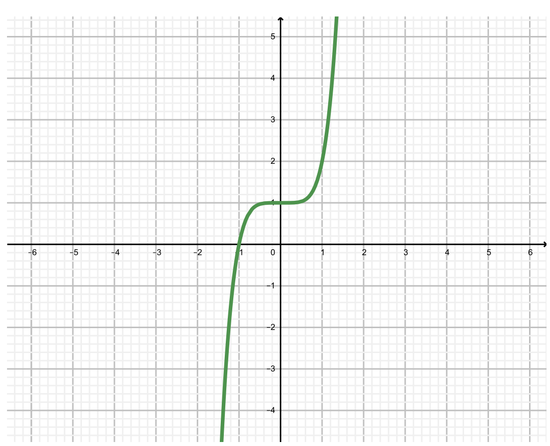
a)

x		2	
$p(x)$	$-$		$+$



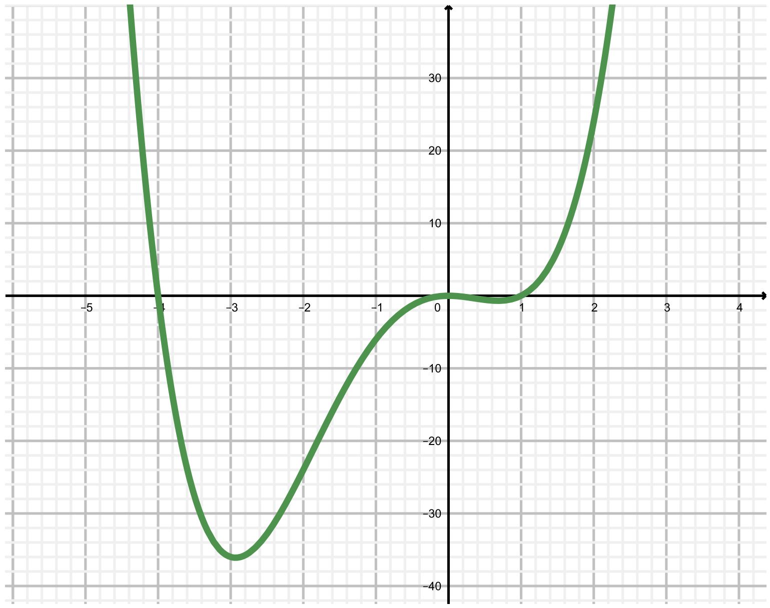
b)

x		-1	
$p(x)$	$-$		$+$



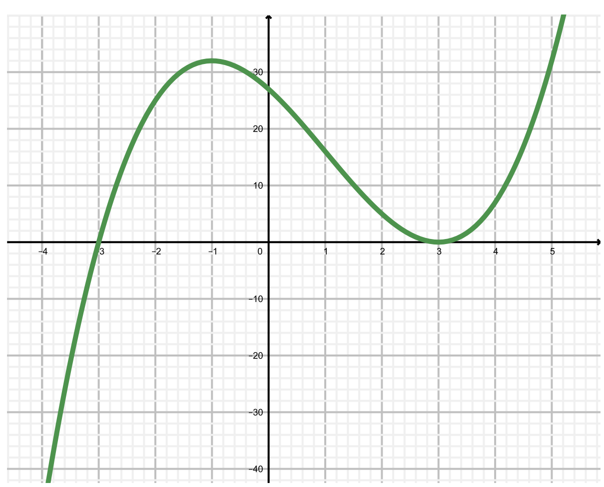
c)

x		-3		0		1	
$p(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$



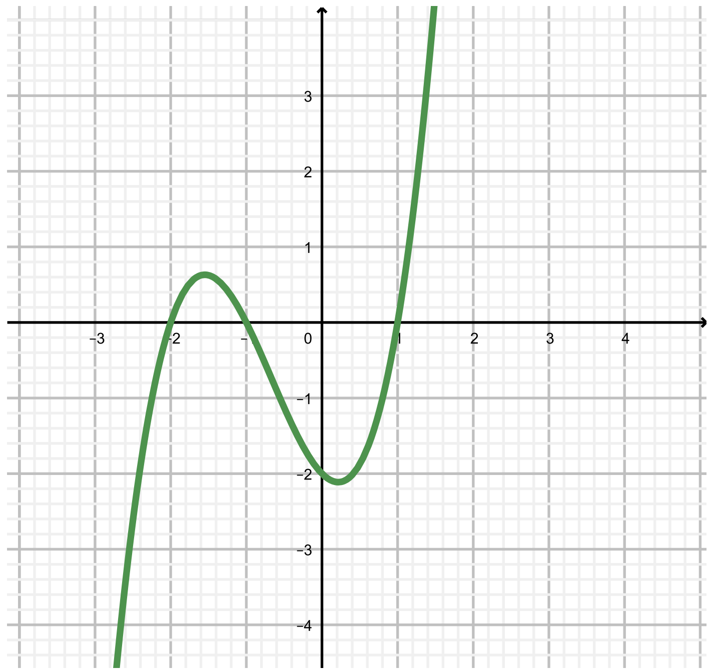
d)

x		-3		3	
$p(x)$	$-$		$+$		$+$

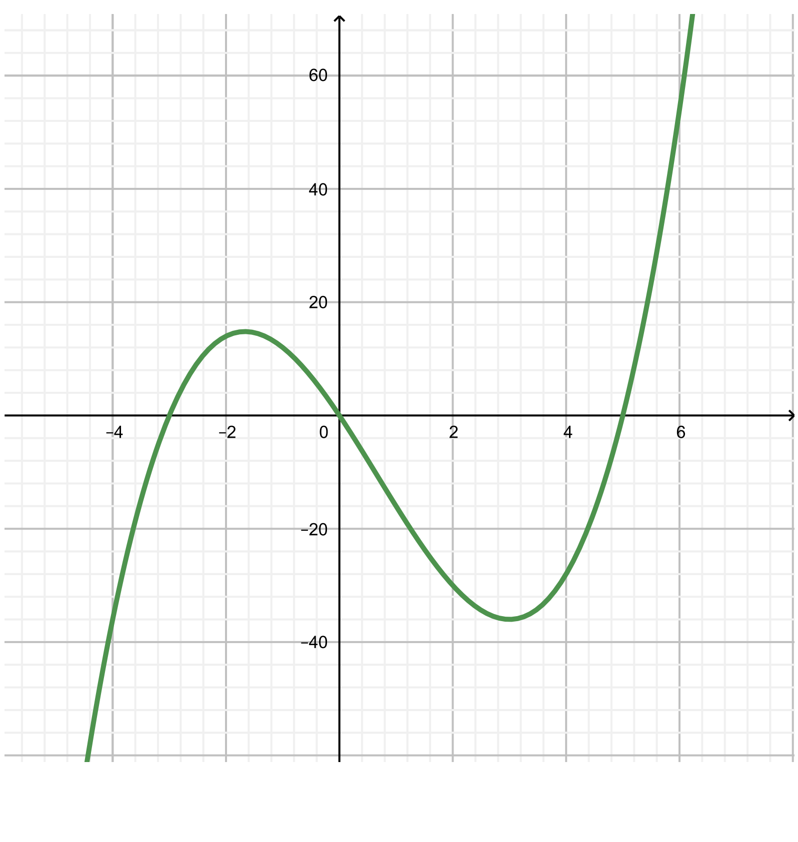


Exercice 34.

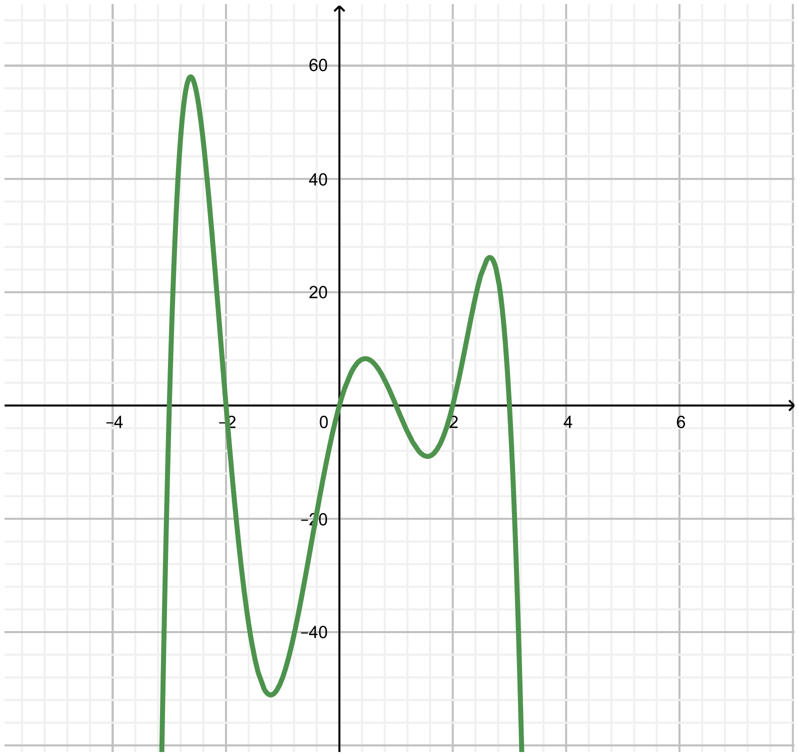
a)



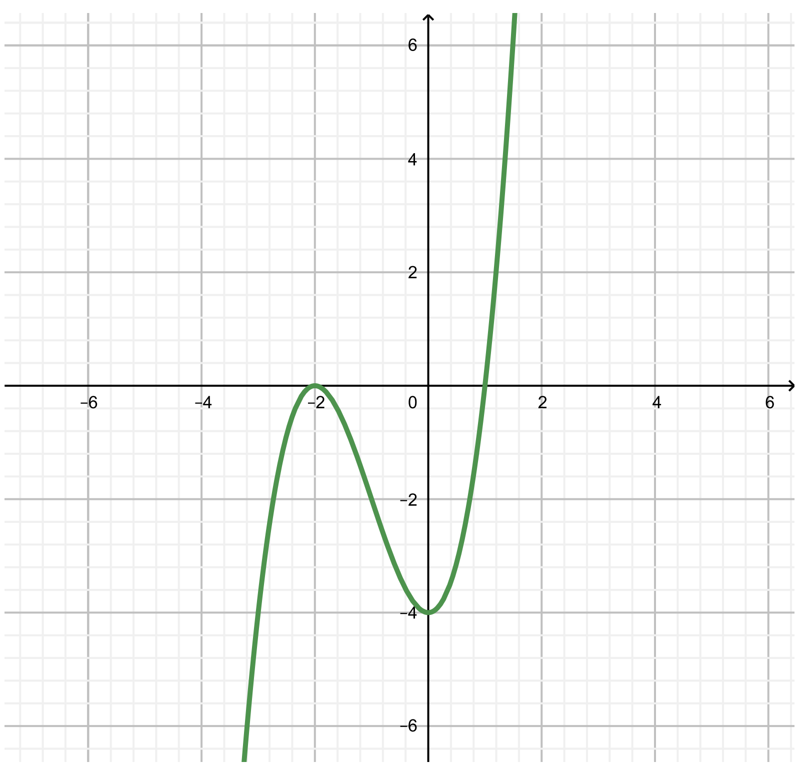
b)



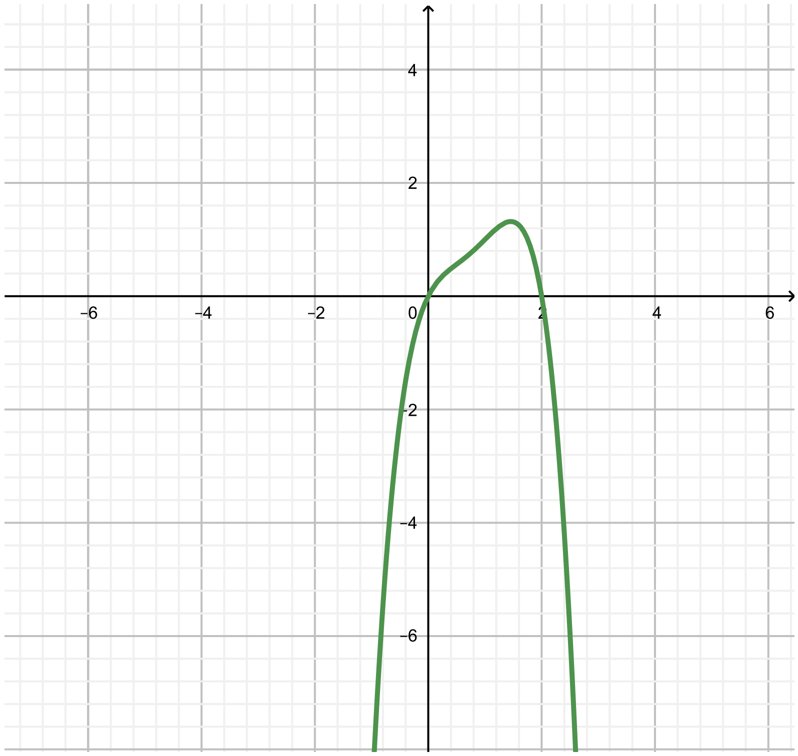
c)



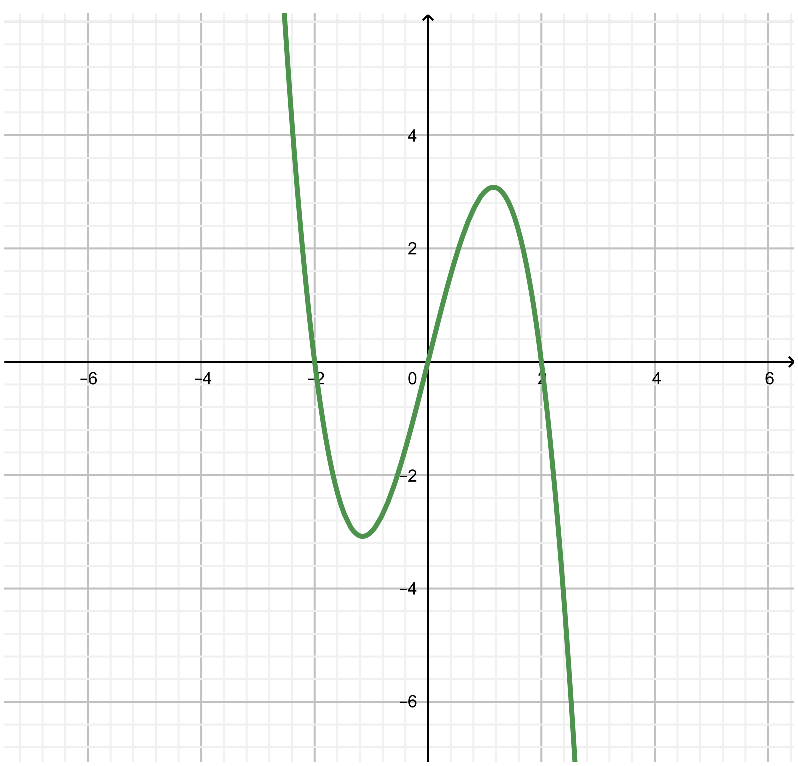
d)



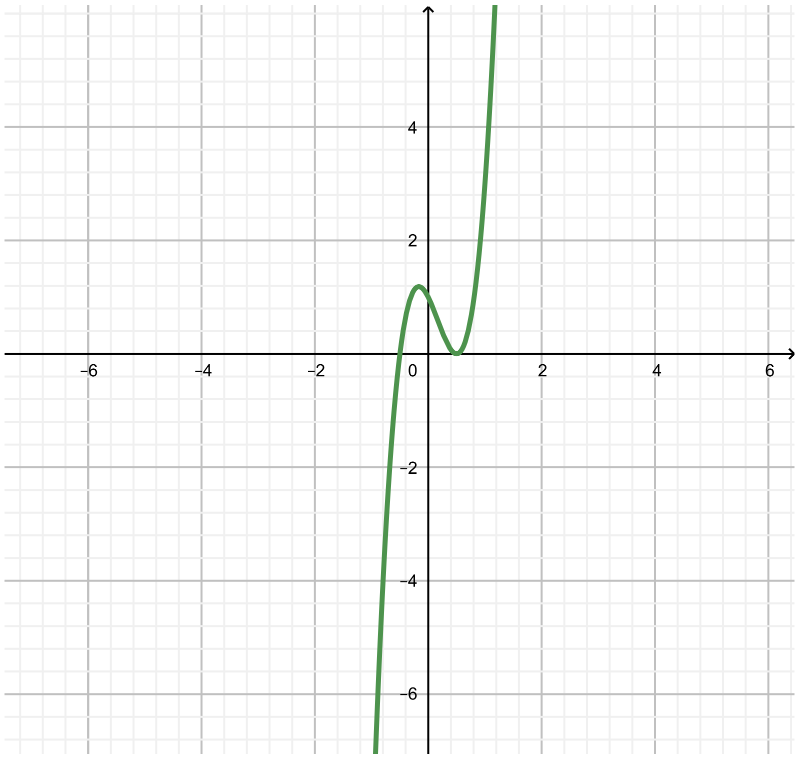
e)



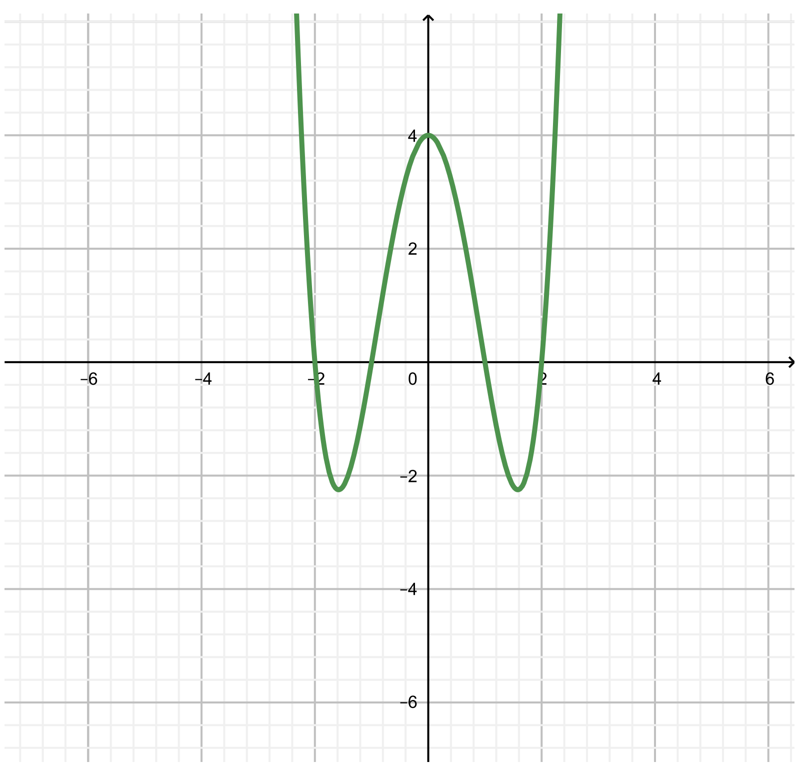
f)



g)



h)

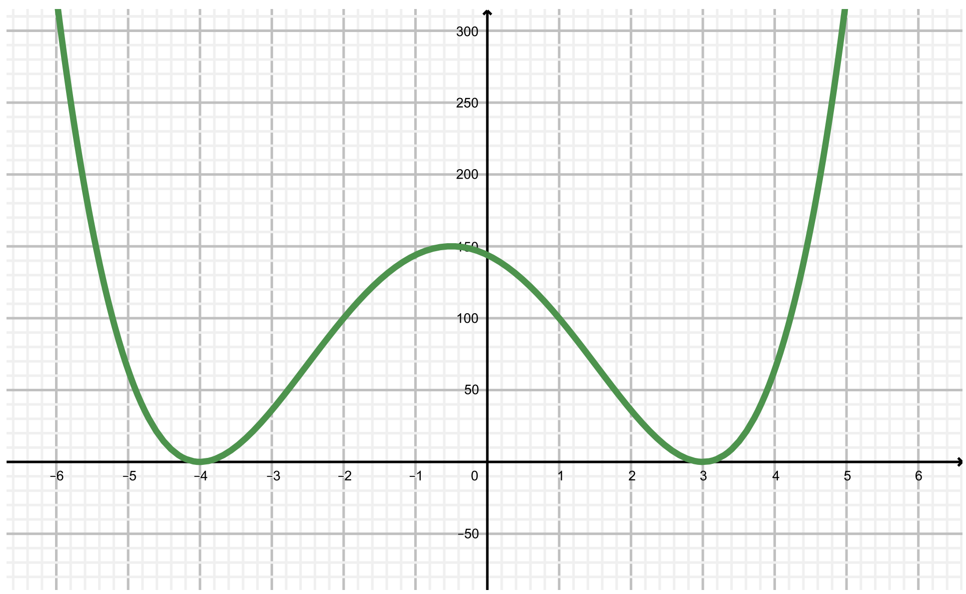


Exercice 35.

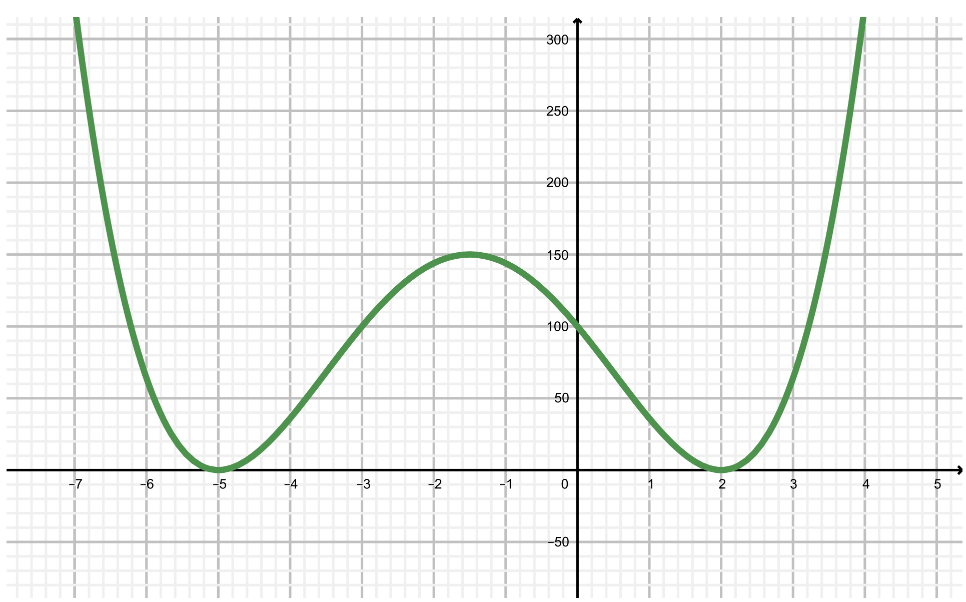
a) $p(x) = (x-1)^2(x-3)\,;$

b) $p(x) = (x-2)^2(x-4)$.

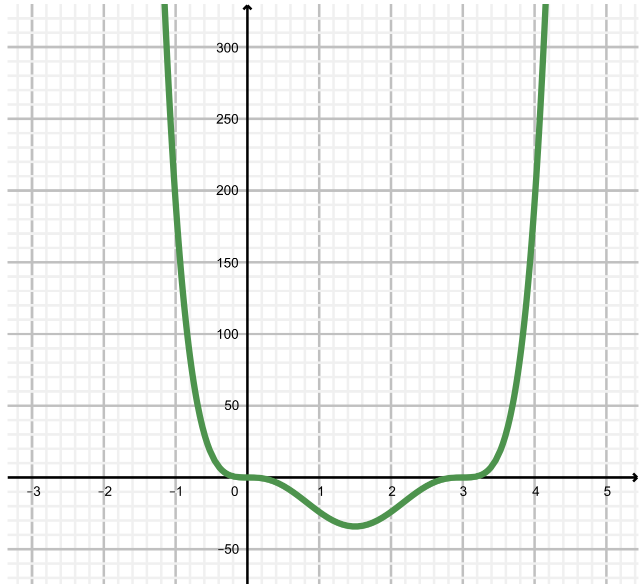
Exercice 36.



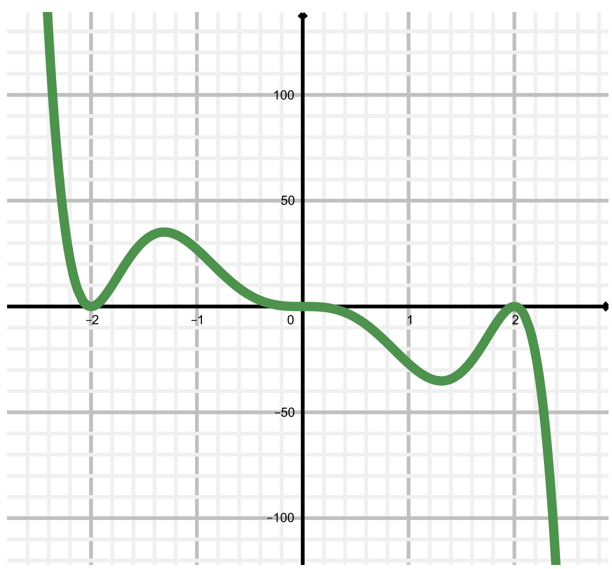
Exercice 37.



Exercice 38.



Exercice 39.



Exercice 40. Par exemple $p(x) = -\dfrac{7}{3}x^2(x-3)(x-2)$.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Fonctions du troisième degré **2**
2.1 Définition . . . 2
2.2 L'équation du troisième degré . . . 3
2.2.1 La formule de Cardan . . . 4
2.2.2 Quelques cas particulers d'équations du troisième degré . . . 6

3 Division euclidienne **9**
3.1 Algorithme de division euclidienne . . . 10
3.2 Schéma de Horner . . . 12
3.3 Divisibilité des polynômes . . . 13

4 Fonctions polynômes de degré n **17**
4.1 Tableau de signes . . . 17
4.2 Multiplicité des zéros d'une fonction . . . 20