Mathématiques

Maturité professionnelle Economie et Services, type économie

Filière Plein Temps

Dagris Musitelli et Karim Saïd

CPNE - Pôle Commerce et Gestion

Année scolaire 2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

Ensembles de nombres

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux *ensembles de nombres*. En effet, les nombres ne vérifient pas tous les mêmes propriétés. Il en existe plusieurs sortes que l'on regroupe dans des *ensembles*. Le but de ce chapitre sera donc de présenter les quatre principaux ensembles et de définir les opérations à l'intérieur de ceux-ci.

1.2 Nombres naturels

1.2.1 Définition

Les *nombres naturels* sont historiquement les premiers dont l'Homme a eu besoin. Il s'agit des nombres entiers positifs, qui forment l'ensemble noté $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}.}$$

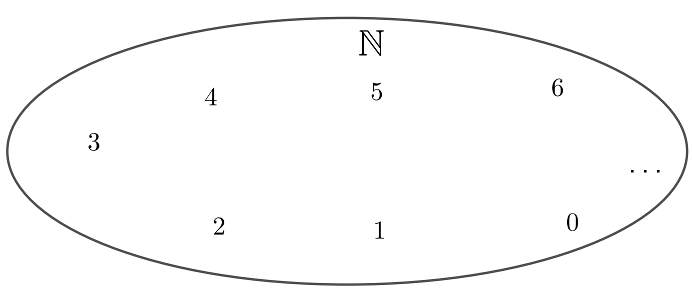


FIGURE 1.1 – Ensemble des nombres entiers naturels.

Remarque. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres naturels privé du 0.

1.2.2 Priorité des opérations

Soit à calculer $3 + 5 \cdot 4$. Est-ce que cela donne 32 ou 23 ? En fait, cela donne 23. En effet, une expression arithmétique ne se lit pas de gauche à droite comme une phrase française. Les diverses opérations s'effectuent dans l'ordre suivant :

1. Contenu des parenthèses en commençant par celles de premier niveau (plus petite "poupée russe"), c'est-à-dire de l'intérieur vers l'extérieur.
2. Puissances et racines.
3. Multiplications et divisions.
4. Additions et soustractions.

Remarque. Les opérations de même priorité sont effectuées de gauche à droite.

Exemple. Pour calculer $2 + 3 \cdot [4 + 5 \cdot (6 - 2) - 7]$, on procède comme suit.

$$\begin{aligned} & 2 + 3 \cdot [4 + 5 \cdot \underbrace{(6 - 2)} - 7] \\ = \; & 2 + 3 \cdot [4 + \underbrace{5 \cdot \quad (4)} - 7] \\ = \; & 2 + 3 \cdot [\underbrace{4 + \quad 20 - 7}] \\ = \; & 2 + \underbrace{3 \cdot \quad [17]} \\ = \; & 2 + \quad 51 \\ = \; & 53. \end{aligned}$$

Division par 0

La division d'un nombre non nul par 0 est impossible.
Voyons en détail ce qui se passe lorsque l'on essaye de diviser de 5 par 0.
Supposons qu'il soit possible de diviser 5 par 0 et que la réponse soit égale à x.
Cette hypothèse s'écrit alors

$$\frac{5}{0} = x.$$

De manière équivalente, cette dernière égalité s'écrit également sous la forme

$$5 = 0 \cdot x = 0.$$

Ainsi, si la division d'un nombre non nul par 0 était possible, cela impliquerait que $5 = 0$, ce qui est *impossible*.

Quant à la division de 0 par 0, elle conduit à une *forme indéterminée*.
En effet, supposons que le quotient de 0 par 0 soit possible et donne x comme réponse.
Dans ce cas, on aurait

$$\frac{0}{0} = x.$$

Cette égalité s'écrit aussi sous la forme

$$0 \cdot x = 0.$$

Ainsi, il est impossible de répondre à la devinette suivante :
"Un nombre est multiplié par 0 ; le résultat donne 0. Quel est ce nombre ?".
En effet, n'importe quel nombre (réel) est solution de cette devinette. Ainsi, on dit que $\frac{0}{0}$ est *indéterminé*, car la division de 0 par 0 "pourrait donner n'importe quelle réponse".
En résumé

$$\boxed{5 \cdot 0 = 0, \qquad \frac{0}{5} = 0, \qquad \frac{5}{0} \text{ est impossible,} \qquad \frac{0}{0} \text{ est indéterminé.}}$$

Exercice 1.1. Donner

a) La somme de 12 et 25.
b) La différence de 108 et 73.
c) Le produit de 7 et 15.
d) Le quotient de 84 par 7.
e) Deux facteurs dont le produit vaut 42 (donner trois possibilités).

Exercice 1.2. Calculer sans machine.

a) $4 + 12 : 4 + 12$	b) $21 + 24 : 3 - 3 \cdot 3$
c) $60 + (7 - 6) - 4 \cdot 5$	d) $3 \cdot 4 + 5 \cdot 12 - 6 \cdot 2$
e) $150 - (100 + 50) : 5$	f) $(5 \cdot 3 - 15) : [6 - 3 \cdot 2]$
g) $1 + 19(7 - 8 : 4)$	h) $[5 + 3 \cdot 4] : (16 - 16)$
i) $(3 \cdot 4 + 5) \cdot 12 - 6 \cdot 2$	j) $\{100 - [50 - (40 - 9)]\} \cdot 2$

Exercice 1.3. Ajouter les parenthèses nécessaires.

a) $5 \cdot 18 + 4 = 110$	b) $5 + 3 \cdot 1 + 1 = 16$
c) $80 + 40 : 2 = 100$	d) $2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 24$
e) $9 - 9 \cdot 9 + 9 = 9$	f) $3 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 66$
g) $30 : 2 + 8 = 3$	h) $5 - 2 \cdot 9 - 7 = 20$
i) $100 - 1 \cdot 100 - 1 = 9899$	j) $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 - 3 = 36$

1.3 Nombres entiers relatifs

1.3.1 Définition

Pour des raisons évidentes, l'ensemble $\mathbb{N}$ ne suffit pas à représenter toutes les situations rencontrées dans la vie courante (par exemple des températures exprimées en degré Celsius, le numéro d'un étage situé au sous-sol d'un immeuble, ...). D'autre part, certaines opérations, comme la soustraction, ne sont pas toujours définies dans $\mathbb{N}$. Par exemple, $2 - 5 = -3 \notin \mathbb{N}$. Il est donc nécessaire d'ajouter à $\mathbb{N}$ les *nombres entiers négatifs*. Pour préciser qu'une quantité donnée est inférieure à 0, on lui ajoute le signe "$-$". L'ensemble de tous les nombres entiers (positifs et négatifs) est noté $\mathbb{Z}$ et est appelé *ensemble des nombres entiers relatifs*.

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{...; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...\}.}$$

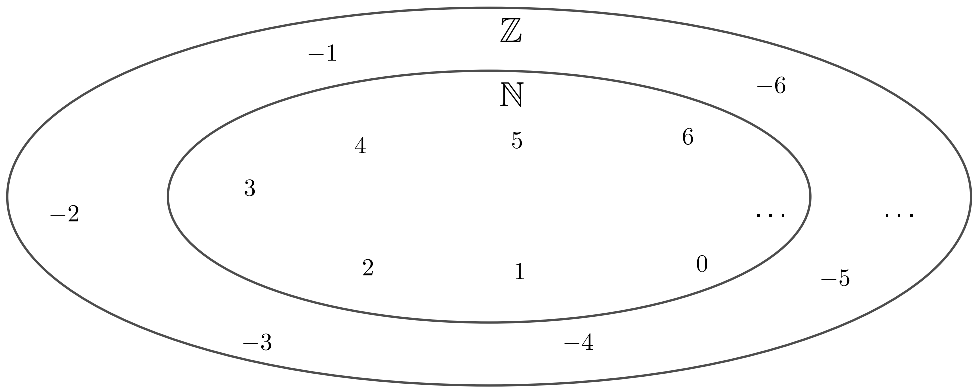


FIGURE 1.2 – Ensemble des nombres entiers relatifs.

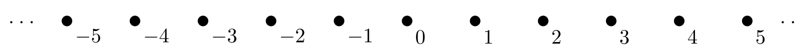


FIGURE 1.3 – Nombres entiers relatifs.

1.3.2 Règle des signes

Le produit (résultat de la multiplication) de deux nombres entiers relatifs s'effectue en appliquant la *règle des signes* :

$$+ \cdot + = +$$
$$+ \cdot - = -$$
$$- \cdot + = -$$
$$- \cdot - = +$$

Remarque. La règle des signes peut se formuler à l'aide du moyen mnémotechnique ci-dessous.

1. Les amis (+) de mes amis (+) sont mes amis (+).
2. Les amis (+) de mes ennemis (−) sont mes ennemis (−).
3. Les ennemis (−) de mes amis (+) sont mes ennemis (−).
4. Les ennemis (−) de mes ennemis (−) sont mes amis (+).

Exemple.

1. $5 \cdot 3 = 15$.
2. $5 \cdot (-3) = -15$.
3. $(-5) \cdot 3 = -15$.
4. $(-5) \cdot (-3) = 15$.

Remarque. Le signe de la division de deux nombres entiers relatifs repose aussi sur la règle des signes.

Exemple.

1. $15 : 3 = 5$.
2. $15 : (-3) = -5$.
3. $(-15) : 3 = -5$.
4. $(-15) : (-3) = 5$.

Exercice 1.4. Calculer les expressions suivantes.

a) $(+5) \cdot (-7)$ b) $(+12) : (+4)$
c) $(-25) : (+5)$ d) $(-30) : (-10)$
e) $(-5) \cdot (-8) \cdot (+6)$ f) $(+3) \cdot (-7) \cdot (+11)$
g) $(-8) \cdot (-18) : (+3)$ h) $(-15) : (-5) \cdot (+3)$

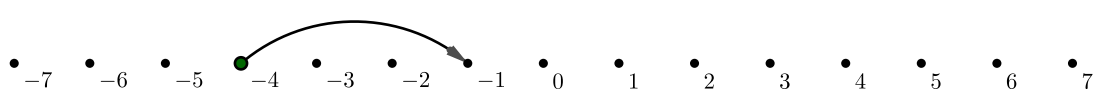
1.3.3 Somme et différence de deux nombres entiers relatifs

La somme de deux nombres entiers relatifs s'effectue en raisonnant sur la "droite numérique".

Exemple.

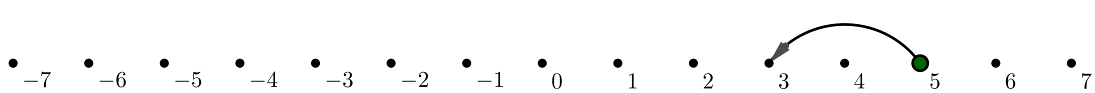
1. $(-4) + 3 = -1$

$(-4) + 3$ consiste à se déplacer de 3 unités à droite depuis -4



2. $5 + (-2) = 5 - 2 = 3$

$5 + (-2)$ consiste à se déplacer de 2 unités à gauche depuis 5



Exemple.

1. $5 - 2 = 3$.
2. $(-5) - 2 = -7$.
3. $5 - (-2) = 5 + 2 = 7$.
4. $(-5) - (-2) = -5 + 2 = -3$.

Définition. On dit de deux nombres entiers relatifs qu'ils sont *opposés* si leur somme est nulle.

Exemple.

1. -9 est l'opposé de 9.
2. 11 est l'opposé de -11.

Remarque. Géométriquement, l'opposé d'un nombre entier relatif s'obtient par symétrie centrale de centre 0.

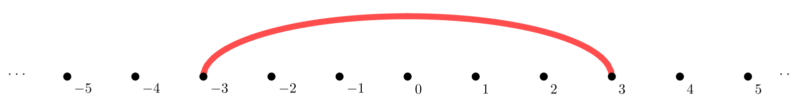


Figure 1.4 – opposé d'un nombre entier relatif.

Exercice 1.5. Calculer les expressions suivantes.

a) $(-2) + (+15)$	b) $(+5) + (-4)$
c) $(+8) - (-8)$	d) $(-15) - (+25) - (-5)$
e) $(-7) - (+8) - (-4)$	f) $(-25) - (+36) - (+85) - (-100)$

Exercice 1.6. Calculer sans machine.

a) $(-3) - 5 \cdot (-2)$	b) $(-8) - (-18) : (+3)$
c) $25 - 10 : 5 + 5 - 1 \cdot 5 \cdot 12 - 6 \cdot 2$	d) $-5 \cdot (-2) - (-3) : (-1) - (-2)$
e) $-5(-3 \cdot 7 + 3)$	f) $[-3 - (-2)] : [-13 - (-13)]$
g) $0 : [-5 - (-5)]$	h) $[-5 - (-5)] : 0$
i) $[(-3 - 3) - 3](-3 - 3 - 3)$	j) $(-6 + 3 \cdot 2) : [4 + 2 \cdot (-2)]$
k) $-1 - [(-2) : (-1) + 2]$	l) $\{[-1 - (-2)] : (-1)\} \cdot (-2)$
m) $(+3) \cdot [(-7) + (+11)] : [(-2) - (-8)]$	n) $[-6 - (-3) \cdot (-4)] : \{[-7 - 8 : (-2)] \cdot (-6)\}$

Exercice 1.7. Réécrire les expressions ci-dessous pour $a = -1$, puis calculer.

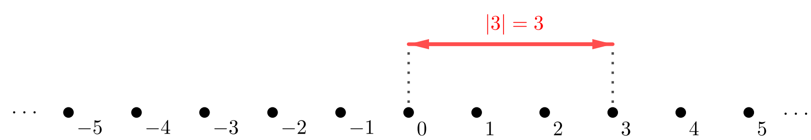
a) $2a + 3$	b) $(2a - 1) + 3$
c) $2a - 1 + 3$	d) $2(a - 1) + 3$
e) $2a - (1 + 3)$	f) $2[a - (a + 3)]$

1.3.4 Valeur absolue

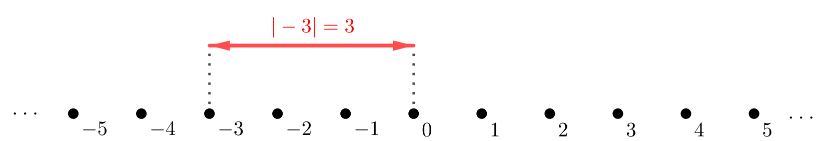
Définition. On appelle *valeur absolue* d'un nombre $a \in \mathbb{Z}$ la distance de a à 0 et on la note $|a|$.

Exemple.

1. $|3| = 3$.



2. $|-3| = 3$.



Des exemples ci-dessus, il en découle le théorème suivant.

Théorème. *Si $a \in \mathbb{Z}$, alors*

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & si \quad a > 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}.}$$

Autrement dit, la valeur absolue d'un nombre entier relatif n'est rien d'autre que le nombre auquel on enlève le signe $-$.

Exercice 1.8. Réécrire le nombre en supprimant la valeur absolue et simplifier le résultat.

a) $\|-11+1\|$	b) $\|-3-2\|$
c) $\|7\|+\|-4\|$	d) $\|-7\|+\|4\|$
e) $\|8\|+\|-9\|$	f) $\|-1\|+\|-9\|$
g) $\|6\|-\|-3\|$	h) $\|-5\|-\|2\|$
i) $\dfrac{6}{\|-2\|}$	j) $\dfrac{\|-6\|}{-2}$
k) $4\cdot\|6-7\|$	l) $(-5)\cdot\|3-6\|$

1.4 Nombres rationnels

1.4.1 Définition

Définition. La division fait apparaitre trois nombres :
— Le nombre qui est divisé s'appelle le *dividende*.
— Le nombre qui divise s'appelle le *diviseur*.
— Le résultat de l'opération s'appelle le *quotient*.

Exemple. Losque l'on divise 18 par 6, on obtient 3.
— Le dividende est 18.
— Le diviseur est 6.
— Le quotient est 3.

Exercice 1.9. Donner
a) Le quotient si le dividende vaut 12 et le diviseur 0.
b) Le quotient si le dividende vaut 0 et le diviseur 12.
c) Le dividende si le diviseur est 8 et le quotient 7.
d) Le diviseur si le dividende vaut 72 et le quotient 12.

Dès le moment où l'on désire comparer deux quantités, on a besoin d'établir des *rapports*, donc des *divisions*. Or, il apparaît bien vite qu'une division de deux nombres entiers n'en donne pas toujours un. $\mathbb{Z}$ ne contient donc pas tous les nombres. Par exemple, le quotient de 3 par 2 donne $1,5$. Quant au quotient de 1 par 3, il donne $0,\overline{3} = 0,3333...$. On admettra que tout nombre décimal, admettant un nombre fini de décimales ou dont le développement décimal est périodique peut s'écrire sous forme de quotient de deux nombres entiers. Un nouvel ensemble qui regroupe tous les résultats de ces divisions est donc nécessaire. Il s'agit de l'ensemble des *nombres rationnels*, noté $\mathbb{Q}$.

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\} = \{\text{Nombres pouvant s'écrire comme rapport de deux entiers}\}.}$$

Exemple.
1. $1,3$ est égal au quotient de 13 par 10.
2. $0,\overline{45}$ est égal au quotient de 5 par 11.
3. -9 est égal au quotient de -9 par 1.

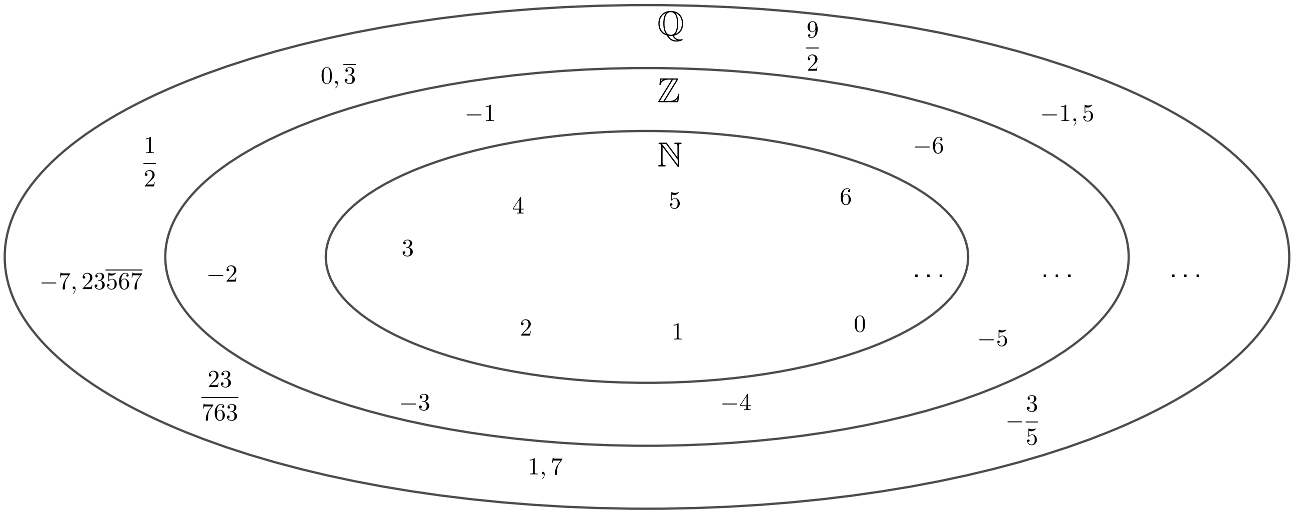


FIGURE 1.5 – Ensemble des nombres rationnels.

1.4.2 Notion de fraction

Définition. On appelle *fraction* tout rapport de deux nombres entiers a et b et on la note $\frac{a}{b}$. Le nombre a (situé en haut) est appelé *numérateur*, tandis que b (situé en bas) est le *dénominateur*.

Exemple.

1. Le nombre $\dfrac{3}{4}$ représente le quotient de 3 par 4 et peut également s'écrire $0,75$.
2. Le nombre 7 peut également s'écrire sous la forme $\dfrac{7}{1}$.
3. La fraction $\dfrac{1}{3}$ est égale au nombre $0,\overline{3}$.
4. La fraction $\dfrac{1}{7}$ est égale à $0,\overline{142857}$.

Remarque. Lorsque l'on effectue la division de 1 par 7 à l'aide d'une calculatrice, celle-ci affiche comme résultat "$0,142857143$". Il n'est dès lors pas aisé de deviner qu'il s'agit en réalité du nombre décimal périodique $0,\overline{142857}$. Il est donc faux d'écrire

$$\frac{1}{7} = 0,142857143,$$

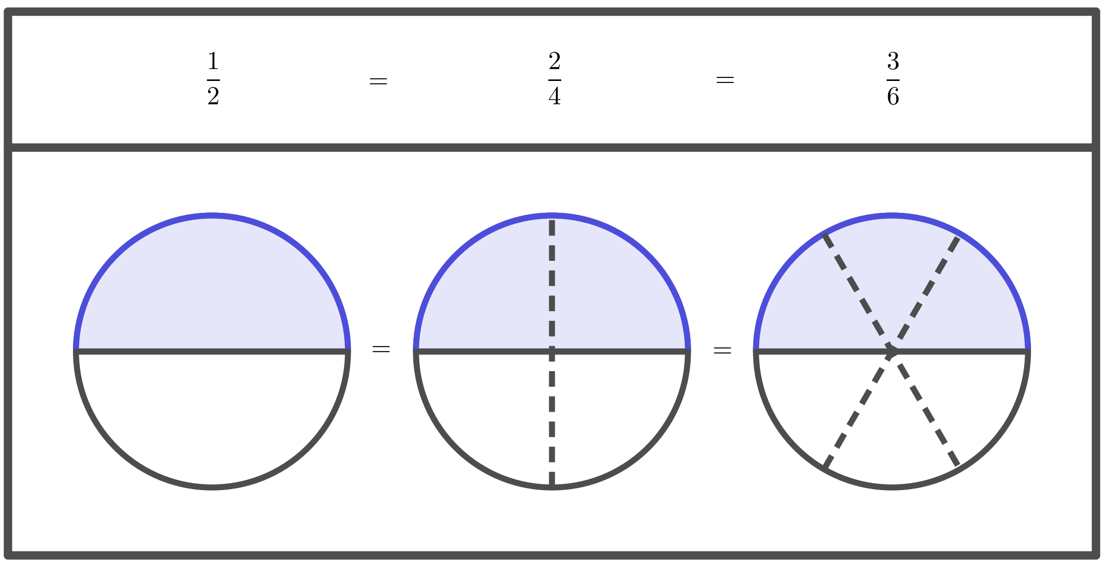
mais correct d'écrire

$$\frac{1}{7} \cong 0,142857143.$$

On préférera donc écrire un nombre rationnel en fraction que sous forme de nombre décimal, puisque ceux-ci conduisent fréquemment à des approximations, comme le montre l'exemple ci-dessus.

1.4.3 Amplification et simplification

La fraction $\frac{1}{2}$ représente le nombre décimal $0,5$. Une situation de la vie courante qui pourrait être représentée par cette même fraction est celle qui consiste à se servir d'une tranche parmi 2 d'un gâteau. Si ce gâteau avait été coupé en 4 tranches identiques, il aurait fallu en prendre 2 pour que la quantité de gâteau consommée demeure identique. De même, cela revient à prendre 3 tranches parmi 6 identiques.



Autrement dit, si le nombre de tranches à disposition double, il en est alors de même pour le nombre de tranches qui seront dégustées. Plus généralement, si l'on multiplie par x (par exemple, on triple, quadruple, multiplie par 37, etc.) le nombre total de tranches à disposition, alors l'on se servira de x fois plus de tranches que dans le cas initial.

Mathématiquement, cette observation se traduit par le fait que les fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, ou encore $\frac{300}{400}$, sont égales. En effet, chacun de ces quotients donnent le nombre décimal $0,75$.

Définition.

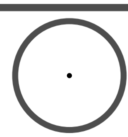
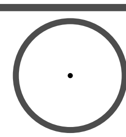
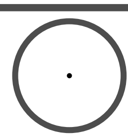
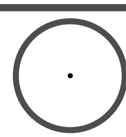
1. *Amplifier* une fraction consiste à multiplier son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier.
2. *Simplifier* une fraction consiste à diviser son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier.
3. Une fraction est dite *irréductible* lorsqu'il n'est plus possible de la simplifier.

Remarque. Lorsque l'on amplifie ou simplifie une fraction on obtient une nouvelle fraction égale à celle de départ.

Exemple.

1. Amplifions $\frac{2}{7}$ par 3 :
$$\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}.$$
2. Simplifions $\frac{25}{35}$ par 5 :
$$\frac{25}{35} = \frac{25 : 5}{35 : 5} = \frac{5}{7}.$$
3. Simplifions $\frac{11}{22}$ au maximum :
$$\frac{11}{22} \overset{\text{par } 11}{=} \frac{1}{2}.$$
4. Simplifions $\frac{560}{700}$ au maximum :
$$\frac{560}{700} \overset{\text{par } 10}{=} \frac{56}{70} \overset{\text{par } 7}{=} \frac{8}{10} \overset{\text{par } 2}{=} \frac{4}{5}.$$

Exercice 1.10. Répondre aux questions suivantes. Donner un argument géométrique et un argument algébrique.

Alice mange $\frac{1}{2}$ pizza	Alain mange $\frac{2}{5}$ pizza	Qui en mange le plus?
		
Alice mange $\frac{3}{4}$ pizza	Alain mange $\frac{4}{5}$ pizza	Qui en mange le plus?
		

Exercice 1.11. Amplifier les fractions ci-dessous de la manière indiquée.

a) $\frac{7}{5} = \frac{}{25}$ b) $\frac{16}{18} = \frac{64}{}$

c) $\frac{8}{20} = \frac{}{100}$ d) $\frac{3}{14} = \frac{}{42}$

e) $\frac{24}{11} = \frac{}{121}$ f) $\frac{4}{8} = \frac{}{10}$

g) $\frac{30}{24} = \frac{}{32}$ h) $\frac{27}{63} = \frac{}{77}$

i) $\frac{27}{36} = \frac{}{28}$ j) $\frac{21}{15} = \frac{}{25}$

Exercice 1.12. Simplifier les fractions ci-dessous au maximum.

a) $\dfrac{15}{20}$	b) $\dfrac{14}{6}$
c) $\dfrac{27}{21}$	d) $\dfrac{12}{16}$
e) $\dfrac{22}{28}$	f) $\dfrac{25}{15}$
g) $\dfrac{42}{39}$	h) $\dfrac{15}{25}$
i) $\dfrac{40}{45}$	j) $\dfrac{18}{24}$
k) $\dfrac{35}{56}$	l) $\dfrac{13}{169}$
m) $\dfrac{36}{90}$	n) $\dfrac{40}{384}$
o) $\dfrac{96}{900}$	p) $\dfrac{640}{48}$
q) $\dfrac{1210}{330}$	r) $\dfrac{96}{360}$
s) $\dfrac{768}{64}$	t) $\dfrac{608}{432}$

Exercice 1.13.

1. Donner cinq fractions équivalentes à $\dfrac{3}{4}$ et à $\dfrac{5}{6}$.
2. Pour chacune de ces fractions, donner une fraction équivalente dont
   a) Le dénominateur est 120.
   b) Le numérateur est 120.
   c) Le dénominateur est une puissance de 12.
   d) Le dénominateur est une puissance de 10.
   e) Le numérateur est le même et est compris entre 100 et 110.
   f) Le dénominateur est le même et est compris entre 50 et 60.

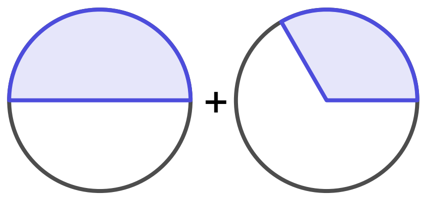
Exercice 1.14. Dans chacun des cas suivants, déterminer laquelle des deux fractions est la plus grande, après les avoir mises au même dénominateur.

a) $\dfrac{5}{8}$ et $\dfrac{6}{19}$	b) $\dfrac{7}{15}$ et $\dfrac{5}{12}$
c) $\dfrac{9}{20}$ et $\dfrac{11}{18}$	d) $\dfrac{11}{36}$ et $\dfrac{9}{32}$

1.4.4 Addition et soustraction

La somme et la différence de deux fractions peut être illustrée par l'exemple ci-dessous.

Exemple. Soit à calculer $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$.



Ces deux "tranches" n'étant pas de tailles identiques, il n'est pas commode de les additionner. Par analogie, on pourrait se demander ce que vaut 1 franc + 2 euros. Pour palier à ce problème, il convient d'amplifier les fractions pour les mettre au *même dénominateur*, comme le montre la figure ci-dessous.

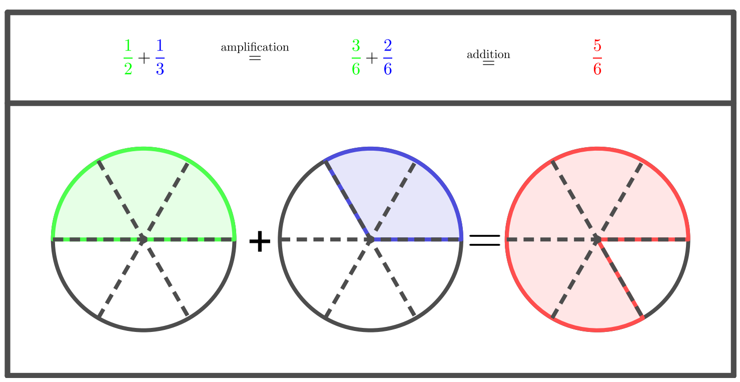


FIGURE 1.6 – Somme de deux fractions.

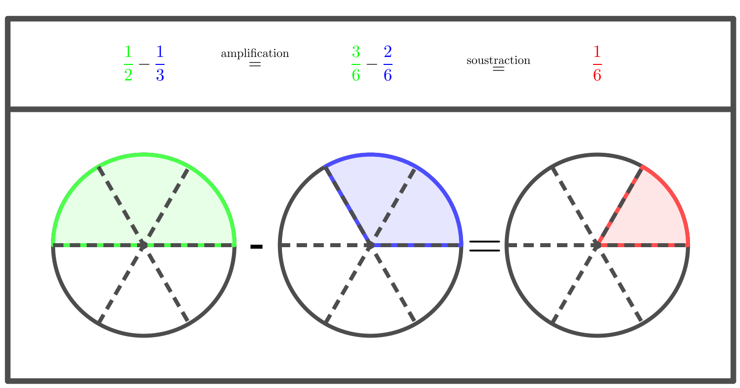


FIGURE 1.7 – Différence de deux fractions.

Cas général : Comme le montrent les exemples ci-dessus, pour additionner deux fractions, il convient dans un premier temps de les mettre au **même dénominateur** (qui sera un multiple de chacun des dénominateurs des fractions de départ), puis d'additionner uniquement les numérateurs et de simplifier au maximum la fraction obtenue le cas échéant.

Par convention, on écrira toujours le résultat sous forme de fraction irréductible ou de nombre entier.

Exemple.
1. $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{8}{12}+\dfrac{9}{12}=\dfrac{8+9}{12}=\dfrac{17}{12}$.
2. $\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{10}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{2}{30}+\dfrac{3}{30}-\dfrac{25}{30}=\dfrac{2+3-25}{30}=\dfrac{-20}{30}=\dfrac{-2}{3}=-\dfrac{2}{3}$.

Remarque. La fraction $\dfrac{-1}{2}$ représente le nombre décimal $-0,5$. Il en est de même pour la fraction $\dfrac{1}{-2}$. Ces deux fractions étant identiques, il est d'usage de l'écrire sous la forme $-\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, on a

$$-0,5=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

Remarque. Soit à calculer

$$\frac{5}{36}+\frac{7}{54}.$$

Pour mettre les deux fractions au même dénominateur, deux alternatives sont envisageables :

1. **Multiplier 36 par 54 pour obtenir un dénominateur commun**
   On a
   $$\frac{5}{36}+\frac{7}{54}=\frac{270}{1944}+\frac{252}{1944}=\frac{522}{1944}\overset{\text{par } 18}{=}\frac{29}{108}.$$
2. **Déterminer le plus petit multiple commun de 36 et 54**
   On a
   $$\frac{5}{36}+\frac{7}{54}=\frac{15}{108}+\frac{14}{108}=\frac{29}{108}.$$

Exercice 1.15. Calculer les expressions ci-dessous et simplifier s'il y a lieu.

a) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}$	b) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{6}-\dfrac{7}{6}$
c) $\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{2}$	d) $\dfrac{4}{20}+\dfrac{27}{15}$
e) $\dfrac{2}{21}+\dfrac{7}{4}$	f) $\dfrac{3}{25}+\dfrac{25}{3}$
g) $\dfrac{12}{42}+\dfrac{15}{6}$	h) $\dfrac{9}{10}-\dfrac{8}{45}$
i) $\dfrac{11}{4}+\dfrac{-2}{3}$	j) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{12}{-15}$
k) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$	l) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{16}+\dfrac{5}{32}$
m) $\dfrac{5}{6}+\left(-\dfrac{4}{5}\right)-\left(-\dfrac{2}{15}\right)$	n) $\dfrac{5}{12}+\dfrac{7}{18}+\dfrac{8}{3}+\dfrac{13}{36}$
o) $\dfrac{7}{5}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{13}{20}+1$	p) $\dfrac{9}{20}+\dfrac{37}{50}+\dfrac{63}{10}+\dfrac{3}{25}$

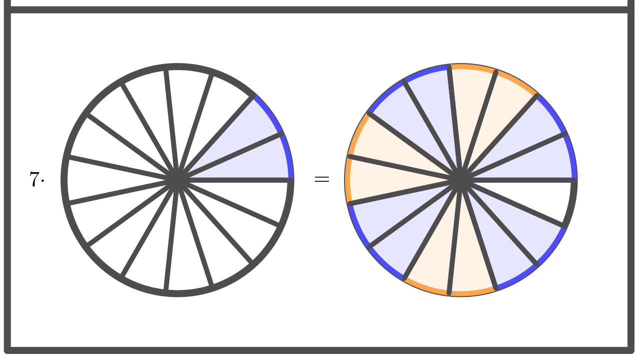
1.4.5 Multiplication et division

Produit de deux fractions

Le produit de deux fractions peut être illustré par les deux exemples ci-dessous.

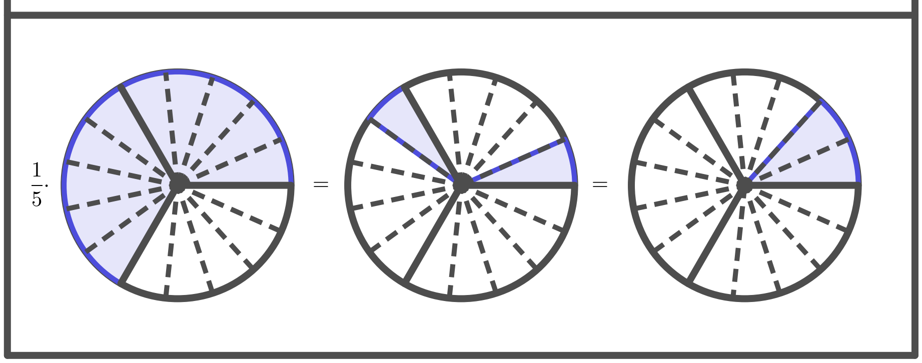
Exemple.

$$7 \cdot \frac{2}{15} = \frac{7 \cdot 2}{15} = \frac{14}{15}$$



Exemple.

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$



Les exemples ci-dessus montrent que le produit de deux fractions s'effectue en multipliant les numérateurs entre eux et en faisant de même avec les dénominateurs.

Autrement dit, on a

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.}$$

Remarque. Il est préférable de simplifier au maximum avant d'effectuer le produit.

Exemple.

1. $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$.
2. $\frac{{}^{1}\cancel{10}}{{}^{3}\cancel{21}} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{7}}{{}^{5}\cancel{50}} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}$.

Exercice 1.16. Calculer et simplifier si nécessaire.

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{3}$
b) $\frac{1}{8} \cdot \frac{6}{16}$
c) $\frac{35}{21} \cdot \frac{7}{20}$
d) $\frac{21}{54} \cdot \frac{27}{28}$
e) $\frac{40}{42} \cdot \frac{21}{56}$
f) $\frac{9}{3} \cdot 25$
g) $18 \cdot \frac{4}{72}$
h) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{12}\right)$
i) $-5 \cdot \frac{4}{7}$
j) $\left(-\frac{7}{9}\right) \cdot 2$
k) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot (-2)$
l) $\frac{1}{7} \cdot \frac{14}{9} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{4}$
m) $\frac{14}{19} \cdot \frac{19}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 0$
n) $\frac{3}{4} \cdot 13 \cdot \frac{12}{9} \cdot \frac{41}{41} \cdot \frac{1}{39}$

Quotient de deux fractions

Théorème. *Diviser une fraction par* $\frac{b}{a}$ *revient à la multiplier par son inverse* $\frac{a}{b}$.

Exemple.

1. $2 : \frac{5}{11} = 2 \cdot \frac{11}{5} = \frac{22}{5}$.
2. $\frac{4}{3} : 2 = \frac{{}^{2}\cancel{4}}{3} \cdot \frac{1}{{}^{1}\cancel{2}} = \frac{2}{3}$.
3. $5 : \frac{3}{2} = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.
4. $\frac{1}{5} : \frac{2}{7} : \frac{8}{5} = \frac{1}{{}^{1}\cancel{5}} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{5}}{8} = \frac{7}{16}$.
5. $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} : \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3} - \left(\frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}^{1}\cancel{3}} \cdot \frac{{}^{5}\cancel{15}}{{}^{2}\cancel{4}}\right) + \frac{1}{15} = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + \frac{1}{15} = \frac{10}{30} - \frac{75}{30} + \frac{2}{30} = \frac{-63}{30} = -\frac{21}{10}$.

Exercice 1.17. Effectuer les opérations ci-dessous.

a) $\frac{4}{5} : \frac{2}{10}$

b) $\frac{4}{7} : \frac{3}{11}$

c) $\frac{2}{5} : \frac{8}{25}$

d) $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{9}}$

e) $\frac{1}{2} : 2$

f) $18 : \frac{6}{17}$

g) $\frac{\frac{24}{5}}{64}$

h) $\frac{24}{\frac{5}{4}}$

i) $\frac{25}{60} : \frac{24}{800} : \frac{75}{54}$

j) $\frac{20}{3} : \left(\frac{7}{4} : \frac{14}{3}\right)$

k) $\frac{4}{-9} : \left(\frac{2}{-3} : \frac{-40}{-36}\right)$

l) $-\frac{65}{-121} : \frac{-150}{48} : \frac{-13}{50} \cdot \frac{3}{2}$

Exercice 1.18. Calculer et simplifier s'il y a lieu.

a) $\frac{22}{13} \cdot \frac{32}{11} : \frac{17}{26}$

b) $\frac{7}{12} \cdot \frac{5}{14} + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7}$

c) $\frac{7}{4} \cdot 2 + \frac{8}{15} : 4$

d) $\left(\frac{11}{5} - \frac{3}{20}\right) - \left(\frac{9}{10} - \frac{11}{15}\right)$

e) $\dfrac{\frac{6}{2} + \frac{4}{3}}{3 - \frac{8}{3}}$

f) $\left(\frac{12}{13} : 5\right)\left(\frac{2}{3} - 4\right)$

g) $\frac{1}{2} - \left\{\frac{1}{3} - \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)\right]\right\}$

h) $12 - 2\left(-\frac{3}{8} + \frac{4}{5}\right) \cdot 4$

1.4.6 Applications

Exercice 1.19. Un test porte sur 30 points. André a obtenu $\frac{3}{5}$ des points. Combien de points a-t-il obtienu ?

Exercice 1.20. Une classe comporte 32 élèves. Parmi eux, $\frac{3}{8}$ viennent à l'école en bus. Combien d'élèves est-ce que cela représente ?

Exercice 1.21. Dans une rue, se trouvent 20 maisons et le $\frac{3}{4}$ d'entre elles ont la television par satellite. Combien de maisons est-ce que cela représente ?

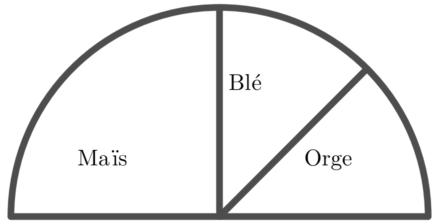
Exercice 1.22. Une citerne de 20'000 litres est remplie aux $\frac{3}{5}$. Combien de litres contient-elle ?

Exercice 1.23. Dans ce diagramme semi-circulaire, nous voyons la repartition des plantes cultivées par M. Eugene sur 140 hectares. Combien d'hectares sont occupés par :

a) Du maïs ?

b) Du blé ?

c) De l'orge ?



Exercice 1.24. Lors d'un tournoi de basket, Joachim a tiré 8 lancers francs et en a réussi 6. Dans le même tournoi, Tony a tiré 13 lancers francs et en a réussi 9. Lequel est le plus adroit ?

Exercice 1.25. Un couple gagne 600 francs à la loterie. Il décide de partager cette somme de la manière suivante :

— un tiers ira à la banque sur leur compte épargne ;

— un quart sera consacré à un grand repas au restaurant ;

— deux sixièmes serviront à réparer les vélos de leur fille.

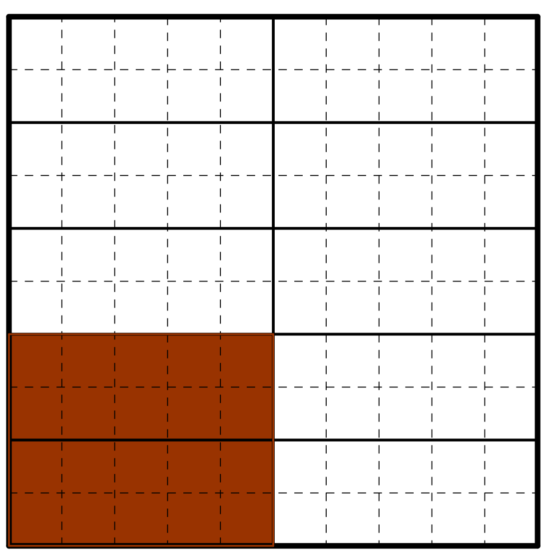
Que restera-t-il de la somme ?

Exercice 1.26. Pendant les 50 minutes du cours de Maths, Julie a passé la moitié du temps à bavarder, le quart du temps à ricaner, le sixième du temps à dormir, le trentième du temps à lancer des boulettes et le reste du temps à travailler. Combien de temps Julie a-t-elle travaillé ?

1.4.7 Pourcentages

Définition. Un *pourcentage* est une manière d'exprimer un rapport à l'aide d'une fraction de dénominateur 100. Généralement, ce nombre est suivi du symbole %.

Exemple. La fraction $\dfrac{2}{10}$ est égale à $\dfrac{20}{100} = 20\% = 0,2$.



Calculer un pourcentage

Exemple. 56 personnes parmi 400 ont les yeux bleus.

Cette proportion s'exprime à l'aide de la fraction $\frac{56}{400}$.

Comme

$$\frac{56}{400} = \frac{14}{100},$$

cela signifie que 14% des 400 personnes ont les yeux bleus.

Appliquer un pourcentage

Exemple.

1. Si une assemblée de 120 personnes compte 15% de femmes, alors il y a 18 femmes dans cette assemblée. En effet, par la règle de trois, on a

$$\begin{array}{ccc} 120 & \to & 100\% \\ x & \to & 15\% \end{array}$$

et donc

$$120 \cdot 15\% = 120 \cdot \frac{15}{100} = 18.$$

2. Dans une assemblée il y a 36 femmes, elles représentent 30% de l'assemblée. Par conséquent, l'assemblée est formée de 120 individus En effet, par la règle de trois, on a

$$\begin{array}{ccc} 36 & \to & 30\% \\ x & \to & 100\% \end{array}$$

et donc

$$\frac{36}{30\%} = 36 \cdot \frac{100}{30} = 120.$$

Exercice 1.27. Calculer

a) 18% de 350.

b) 32% de 500.

c) $20,6\%$ de 1'200.

Exercice 1.28. Un commerçant offre un rabais de 15% sur tous les articles de son magasin. Combien paierait-on pour un téléviseur affiché à 1'564 francs ?

Exercice 1.29. Le prix d'une voiture (qui est de 34'500 francs) est diminué de 7%, puis ensuite encore de 4%. Quel est le nouveau prix de la voiture ?

Exercice 1.30. Le prix initial d'un téléphone portable est de 205 francs. Après une réduction, il est vendu à 161,95 francs. Quel était le pourcentage de la remise accordée par le commerçant ?

Exercice 1.31. Lors d'une liquidation, un grand magasin fait sur certains articles un premier rabais de 50%, puis un rabais supplémentaire de 20% sur le prix baissé. Quel est le prix payé pour un article affiché initialement à 50 francs ? Quel est en % le rabais total accordé ?

Exercice 1.32. Steve a payé son garagiste 202,50 francs après une réduction de 17%. Quel était le prix avant la reduction ?

Exercice 1.33. Après une augmentation de 12%, un article est vendu 1'377,50 francs. Quel était le prix de l'article avant l'augmentation ?

Exercice 1.34. Un ordinateur est soldé pour 1'615 francs. Quel était son prix initial sachant que le rabais accordé représente le 15% du prix initial ?

Exercice 1.35. Sur une voiture de 20'000 francs, est-il préférable de choisir

— une réduction de 10% ?

— une réduction de 6% suivie d'une réduction de 10% ?

— une réduction de 8% suivie d'une réduction de 8% ?

— une réduction de 16% ?

1.5 Nombres réels

Enfin, il y a des nombres qui ne peuvent pas être écrits sous forme de fraction. Ce sont les *nombres irrationnels*. Découverts par les Grecs (qui ont eu de la peine à en accepter l'existence), ils apparaissent par exemple lorsqu'on étudie la longueur des côtés d'un triangle ou le périmètre d'un cercle. Réunis avec les nombres rationnels, ils forment l'ensemble des *nombres réels*.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \left\{ \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt[3]{4}; \pi; e; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; ... \right\}.$$

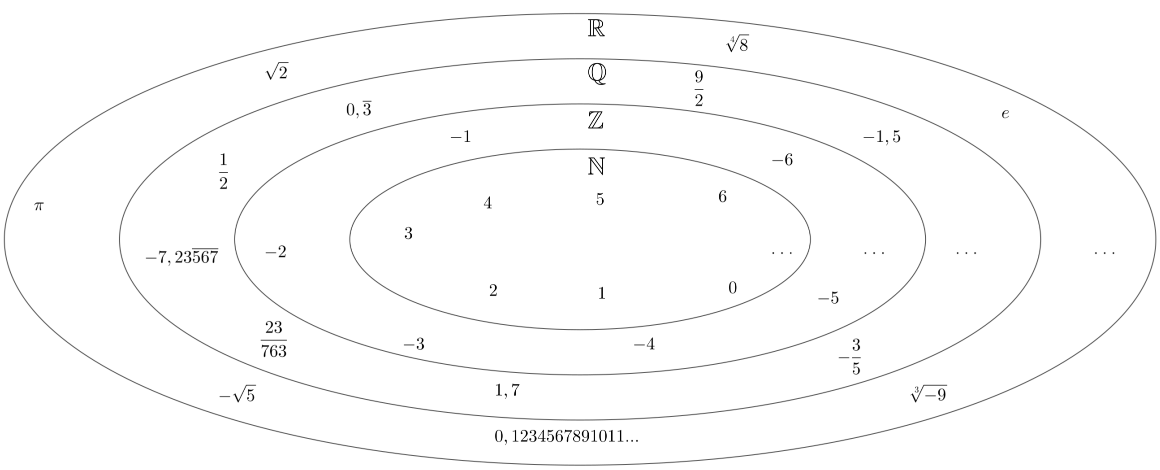


FIGURE 1.8 – Ensemble des nombres réels.

On a les inclusions d'ensembles suivantes :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.}$$

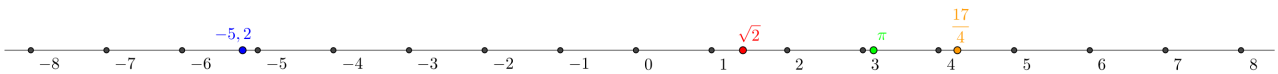


FIGURE 1.9 – Droite numérique.

Exercice 1.36. Cocher les ensembles dont appartiennent les nombres ci-dessous.

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-5,63$				
$9,\overline{2}$				
2π				
$-\dfrac{15}{3}$				
$\sqrt{2}$				
$\sqrt{9}$				

Exercice 1.37. Déterminer si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses.

a) $-300 \in \mathbb{R}$
b) $\dfrac{20}{4} \notin \mathbb{N}$
c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{Q}$
d) $-\dfrac{13}{7} \notin \mathbb{Z}$
e) $-3,57 \in \mathbb{Z}$
f) $5 \notin \mathbb{R}$

Exercice 1.38. Représenter les quatre ensembles de nombres principaux dans un diagramme de Venn, puis placer les nombres suivants dans la zone correcte de ce diagramme.

a) $\sqrt{36}$
b) $-12,47$
c) $\dfrac{3}{4}$
d) π
e) $2,3 \cdot 10^{12}$
f) $-1'000'000$
g) $\sqrt{2}$
h) $5,12\overline{34}$
i) $-\dfrac{15}{3}$
j) $0,00000345$

1.6 Puissances et racines

1.6.1 Définition

Définition. *La puissance* d'un nombre a est définie par $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$. On lit *a puissance n* où $n \in \mathbb{N}$. De plus, on appelle a *la base* et n *l'exposant*.

Exemple.

$$\begin{array}{lrcl}
a^1 = a, & 3^1 & = & 3. \\
a^2 = a \cdot a, & (-2)^2 & = & (-2) \cdot (-2) = 4. \\
a^3 = a \cdot a \cdot a, & \left(\frac{2}{5}\right)^3 & = & \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}.
\end{array}$$

Exercice 1.39. Effectuer sans calculatrice.

a)	3^3	-3^3	$-(3)^3$
b)	$(-2)^3$	-2^3	$-(-2)^3$
c)	$(-2)^4$	-2^4	$-(-2)^4$
d)	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$
e)	$\left(-\frac{3}{2}\right)^2$	$-\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(-\frac{3}{2}\right)^3$

1.6.2 Propriétés des puissances

Théorème. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $m, n \in \mathbb{N}^*$, *alors*

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
3. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Preuve. Nous nous contenterons de donner l'idée de la preuve dans le cas particulier où $a = 4$, $b = 7$, $m = 5$ et $n = 3$.

1. $4^5 \cdot 4^3 = (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) = 4^8 = 4^{5+3}$.
2. $\dfrac{4^5}{4^3} = \dfrac{{}^1\cancel{4} \cdot {}^1\cancel{4} \cdot {}^1\cancel{4} \cdot 4 \cdot 4}{{}_1\cancel{4} \cdot {}_1\cancel{4} \cdot {}_1\cancel{4}} = 4^2 = 4^{5-3}$.
3. $\left(\dfrac{4}{7}\right)^3 = \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{4 \cdot 4 \cdot 4}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \dfrac{4^3}{7^3}$.
4. $(4 \cdot 7)^3 = (4 \cdot 7) \cdot (4 \cdot 7) \cdot (4 \cdot 7) = (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 4^3 \cdot 7^3$.
5. $(4^3)^5 = 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 = 4^{3+3+3+3+3} = 4^{5 \cdot 3}$.

$\square$

Exercice 1.40. Sans calculatrice, réduire les expressions ci-dessous au maximum. On demande un résultat sous forme de puissance.

a) $5 \cdot 5^4 \cdot 5^2$	b) $6^9 : (6^2 \cdot 6^3)$
c) $(2^4)^2 \cdot 2^3$	d) $-2,5 \cdot (-2,5) \cdot (-2,5) \cdot (-2,5)$
e) $\dfrac{(-8)^{10}}{(-8)^8}$	f) $2^3 \cdot 2^6 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)^5$
g) $(-2^4)^3$	h) $(-2)^3 \cdot (-3)^3 \cdot (-1)^{1234567}$
i) $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)^3$	j) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 : \left(\dfrac{2}{3}\right)^5$

Exercice 1.41. Trouver, si elle existe, la (ou les) valeur(s) de x qui vérifie(nt) les égalités suivantes.

a) $2^3 \cdot 2^x = 2^5$	b) $6^3 \cdot 6^x = 6^3$
c) $7^5 : 7^x = 7^2$	d) $(-2)^x = 8$
e) $-x^2 = -25$	f) $x^3 : x^1 = 16$

1.6.3 Exposants nuls et entiers négatifs

Théorème. *Si* $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *alors*

1. $a^0 = 1$.
2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Preuve. L'idée consiste à calculer $\dfrac{a^n}{a^n}$, respectivement $\dfrac{a^0}{a^n}$ de deux manières différentes :

1. $$\frac{a^n}{a^n} = \begin{cases} a^{n-n} & = & a^0 \\ 1 & & \end{cases}.$$
2. $$\frac{a^0}{a^n} = \begin{cases} a^{0-n} & = & a^{-n} \\ \dfrac{1}{a^n} & & \end{cases}.$$

□

Remarque. Ces propriétés s'illustrent bien dans le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{rcl} a^3 & = & a \cdot a \cdot a \\ a^2 & = & a \cdot a \\ a^1 & = & a \\ a^0 & = & 1 \\ a^{-1} & = & \frac{1}{a} \\ a^{-2} & = & \frac{1}{a^2} \\ a^{-3} & = & \frac{1}{a^3} \end{array}$$

On remarque que pour aller à la ligne inférieure, on diminue l'exposant de 1 (à gauche de l'égalité) et que l'on divise par a (à droite de l'égalité).

Exemple.

1. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.
2. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.
3. $5^{-1} = \frac{1}{5}$.
4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 : \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Exercice 1.42. Effectuer sans calculatrice. On demande une solution sous forme d'entier ou de fraction irréductible.

a)	2^{-2}	$(-2)^{-2}$	-2^{-2}
b)	3^0	3^{-1}	-3^{-2}
c)	-5^0	-5^{-1}	$(-5)^{-1}$
d)	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$

1.6.4 Racines

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *racine n-ième* de a, noté $\sqrt[n]{a}$, l'unique nombre r positif tel que $r^n = a$. En d'autres termes :

$$\boxed{r = \sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow r^n = a \text{ et } r \geq 0.}$$

Le nombre a s'appelle le *radicande*, le nombre n s'appelle l'indice et $\sqrt[n]{}$ s'appelle le *radical*.

Autrement dit, chercher la racine n-ième de a revient à se demander quel nombre puissance n donne a.

Remarque. La *racine carrée* s'écrit $\sqrt{a}$ au lieu de $\sqrt[2]{a}$.

Exemple.

1. $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$.
2. $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}_-^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si $a < 0$ et n impair, on définit la racine n-ième par

$$\boxed{r = \sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow r^n = a.}$$

— Si $a < 0$ et n pair, la racine n-ième de a n'est pas définie.

Exemple.

1. $\sqrt{-9}$ n'existe pas. En effet, tout nombre au carré est positif.
2. $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$.

Théorème. *Soient a et b deux nombres réels strictement positifs, m, n et q des entiers strictement positifs et p un entier quelconque. On a*

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$.
3. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
5. $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$.
6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.
7. $\sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p}} = \sqrt[q]{a^p}$.
8. $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.
9. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.
10. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Remarque. On pose $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ pour que la propriété $(a^m)^n = a^{mn}$ soit conservée. En effet :

$$9^{\frac{1}{2}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow \sqrt{9} = 3 = 9^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple.

1. $(\sqrt{5})^2 = 5$.
2. $\sqrt[3]{5^3} = 5$.
3. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$.
4. $\sqrt{\dfrac{7}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}$.
5. $(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$.
6. $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$.
7. $\sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$.
8. $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.
9. $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$.
10. $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Exercice 1.43. Calculer.

a) $\sqrt{0}$ b) $\sqrt{16}$

c) $\sqrt{36}$ d) $\sqrt{625}$

e) $\sqrt[3]{1000}$ f) $\sqrt[3]{216}$

g) $\sqrt[3]{-64}$ h) $\sqrt[3]{343}$

i) $\sqrt[3]{729}$ j) $\sqrt[4]{2401}$

k) $\sqrt[4]{-625}$ l) $\sqrt[5]{-32}$

Exercice 1.44. Écrire les expressions suivantes à l'aide de racines et simplifier.

a) $9^{\frac{1}{2}}$	b) $100^{\frac{1}{2}}$
c) $(-16)^{\frac{1}{2}}$	d) $8^{\frac{1}{3}}$
e) $1024^{\frac{1}{10}}$	f) $0^{\frac{1}{5}}$
g) $25^{0,5}$	h) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$
i) $36^{-\frac{1}{2}}$	j) $64^{-\frac{1}{3}}$

1.7 Solutions

Exercice 1.1.

a) 37.

b) 35.

c) 105.

d) 12.

e) Par exemple 1 et 42, 2 et 21 ou 3 et 14.

Exercice 1.2.

a) 19	b) 20
c) 41	d) 60
e) 120	f) Indéterminé
g) 96	h) Impossible
i) 192	j) 162

Exercice 1.3.

a) $5 \cdot (18+4) = 110$	b) $(5+3) \cdot (1+1) = 16$
c) $80 + 40 : 2 = 100$	d) $(2+2) \cdot (2+2 \cdot 2) = 24$
e) $(9-9) \cdot 9 + 9 = 9$	f) $(3 \cdot 2 + 5) \cdot 6 = 66$
g) $30 : (2+8) = 3$	h) $(5-2) \cdot 9 - 7 = 20$
i) $(100-1) \cdot 100 - 1 = 9899$	j) $3 \cdot (3 + 3 \cdot 3) + 3 - 3 = 36$ ou $(3 \cdot 3 + 3) \cdot 3 + 3 - 3$

Exercice 1.4.

a) -35	b) 3
c) -5	d) 3
e) 240	f) -231
g) 48	h) 9

Exercice 1.5.

a) 13	b) 1
c) 16	d) -35
e) -11	f) -46

Exercice 1.6.

a) 7	b) -2
c) -44	d) 9
e) 90	f) Impossible
g) Indéterminé	h) Indéterminé
i) 81	j) Indéterminé
k) -5	l) 2
m) 2	n) -1

Exercice 1.7.

a) 1	b) 0
c) 0	d) -1
e) -6	f) -6

Exercice 1.8.

a) 10	b) 5
c) 11	d) 11
e) 17	f) 10
g) 3	h) 3
i) 3	j) -3
k) 4	l) -15

Exercice 1.9.

a) Pas possible.

b) 0.

c) 56.

d) 6.

Exercice 1.10. Dans le premier cas, Alice mange plus de pizza, alors que Alain en mange davantage dans le deuxième.

Exercice 1.11.

a) $\frac{7}{5} = \frac{35}{25}$	b) $\frac{16}{18} = \frac{64}{72}$
c) $\frac{8}{20} = \frac{40}{100}$	d) $\frac{3}{14} = \frac{9}{42}$
e) $\frac{24}{11} = \frac{264}{121}$	f) $\frac{4}{8} = \frac{5}{10}$
g) $\frac{30}{24} = \frac{40}{32}$	h) $\frac{27}{63} = \frac{33}{77}$
i) $\frac{27}{36} = \frac{21}{28}$	j) $\frac{21}{15} = \frac{35}{25}$

Exercice 1.12.

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{9}{7}$ d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{11}{14}$ f) $\frac{5}{3}$

g) $\frac{14}{13}$ h) $\frac{3}{5}$

i) $\frac{8}{9}$ j) $\frac{3}{4}$

k) $\frac{5}{8}$ l) $\frac{1}{13}$

m) $\frac{2}{5}$ n) $\frac{5}{48}$

o) $\frac{8}{75}$ p) $\frac{40}{3}$

q) $\frac{11}{3}$ r) $\frac{4}{15}$

s) 12 t) $\frac{38}{27}$

Exercice 1.13.

a) Par exemple $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{30}{40}$ et $\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} = \frac{50}{60}$.

b)

a) $\frac{90}{120}$ et $\frac{100}{120}$.

b) $\frac{120}{160}$ et $\frac{120}{144}$.

c) $\frac{9}{12}$ et $\frac{10}{12}$.

d) $\frac{75}{100}$ et pas possible.

e) $\frac{105}{140}$ et $\frac{105}{126}$.

f) $\frac{45}{60}$ et $\frac{50}{60}$.

Exercice 1.14.

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{7}{15}$

c) $\frac{11}{18}$ d) $\frac{11}{36}$

Exercice 1.15.

a) 1

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{17}{6}$

d) 2

e) $\frac{155}{84}$

f) $\frac{634}{75}$

g) $\frac{39}{14}$

h) $\frac{13}{18}$

i) $\frac{25}{12}$

j) $\frac{1}{30}$

k) $\frac{13}{12}$

l) $\frac{19}{32}$

m) $\frac{1}{6}$

n) $\frac{23}{6}$

o) $\frac{19}{5}$

p) $\frac{761}{100}$

Exercice 1.16.

a) $\frac{7}{4}$

b) $\frac{3}{64}$

c) $\frac{7}{12}$

d) $\frac{3}{8}$

e) $\frac{5}{14}$

f) 75

g) 1

h) $\frac{7}{20}$

i) $-\frac{20}{7}$

j) $-\frac{14}{9}$

k) $-\frac{4}{27}$

l) $\frac{7}{4}$

m) 0

n) $\frac{1}{3}$

Exercice 1.17.

a) 4

b) $\frac{44}{21}$

c) $\frac{5}{4}$

d) $\frac{21}{5}$

e) $\frac{1}{4}$

f) 51

g) $\frac{3}{40}$

h) $\frac{96}{5}$

i) 10

j) $\frac{160}{9}$

k) $\frac{20}{27}$

l) $\frac{120}{121}$

Exercice 1.18.

a) $\dfrac{128}{17}$ b) $\dfrac{33}{56}$

c) $\dfrac{109}{30}$ d) $\dfrac{113}{60}$

e) 13 f) $-\dfrac{8}{13}$

g) $\dfrac{7}{6}$ h) $\dfrac{43}{5}$

Exercice 1.19. 18 points.

Exercice 1.20. 12 élèves.

Exercice 1.21. 15 maisons.

Exercice 1.22. 12'000 litres.

Exercice 1.23.

a) 70 ha.
b) 35 ha.
c) 35 ha.

Exercice 1.24. Joachim a été le plus adroit.

Exercice 1.25. 50 francs.

Exercice 1.26. 2 minutes et 30 secondes.

Exercice 1.27.

a) 63.
b) 160.
c) $247,2$.

Exercice 1.28. $1'329,4$ francs.

Exercice 1.29. $30'801,6$ francs.

Exercice 1.30. 21%.

Exercice 1.31. Prix payé : 20 francs, rabais total : 60%.

Exercice 1.32. 244 francs.

Exercice 1.33. $1'229,90$ francs.

Exercice 1.34. Prix initial : 1'900 francs.

Exercice 1.35. Une réduction de 16%.

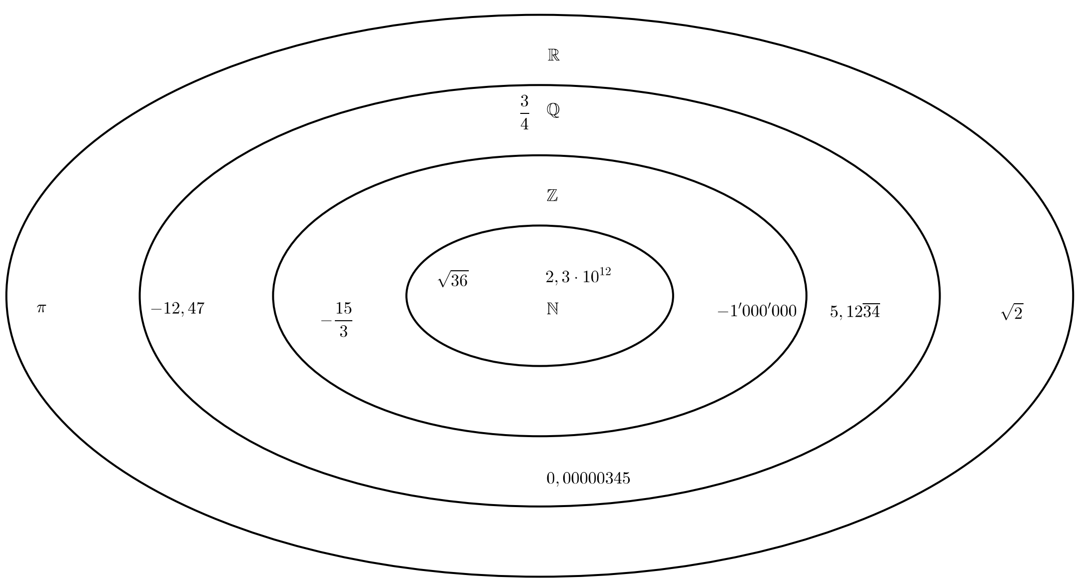
Exercice 1.36.

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-5,63$			x	x
$9,\overline{2}$			x	x
2π				x
$-\dfrac{15}{3}$		x	x	x
$\sqrt{2}$				x
$\sqrt{9}$	x	x	x	x

Exercice 1.37.

a) Vrai b) Faux
c) Faux d) Vrai
e) Faux f) Faux

Exercice 1.38.



Exercice 1.39.

a)	27	-27	-27
b)	-8	-8	8
c)	16	-16	-16
d)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{9}$
e)	$\frac{9}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$

Exercice 1.40.

a) 5^7	b) 6^4
c) 2^{11}	d) $(-2,5)^4 = 2,5^4$
e) $(-8)^2 = 8^2$	f) $2^9 \cdot (-2)^9 = -2^{18}$
g) -2^{12}	h) -6^3
i) $\frac{1}{2^6}$	j) $\frac{3^9}{5^4 \cdot 2^5}$

Exercice 1.41.

a) $x = 2$	b) $x = 0$
c) $x = 3$	d) Pas de solution
e) $x = 5$ et $x = -5$	f) $x = 4$ et $x = -4$

Exercice 1.42.

a)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
b)	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$
c)	-1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
d)	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	1

Exercice 1.43.

a) 0	b) 4
c) 6	d) 25
e) 10	f) 6
g) -4	h) 7
i) 9	j) 7
k) Pas défini	l) -2

Exercice 1.44.

a) 3	b) 10
c) Pas défini	d) 2
e) 2	f) 0
g) 5	h) $\frac{1}{4}$
i) $\frac{1}{6}$	j) $\frac{1}{4}$

1.8 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

1.1 ☐ Calculer une expression arithmétique en respectant la priorité des opérations.
1.2 ☐ Distinguer les différents types de division impliquant 0.
1.3 ☐ Multiplier ou diviser des nombres entiers relatifs en respectant la règle des signes.
1.4 ☐ Additionner ou soustraire des nombres entiers relatifs.
1.5 ☐ Calculer des expressions impliquant des valeurs absolues.
1.6 ☐ Amplifier une fraction.
1.7 ☐ Simplifier une fraction au maximum.
1.8 ☐ Additionner et soustraire des fractions.
1.9 ☐ Multiplier et diviser des fractions.
1.10 ☐ Résoudre un problème impliquant des fractions.
1.11 ☐ Résoudre un problème impliquant des pourcentages.
1.12 ☐ Classer des nombres donnés dans le bon ensemble.
1.13 ☐ Elever un nombre à une puissance entière (positive ou négative).
1.14 ☐ Simplifier une expression contenant des puissances à l'aide des propriétés.
1.15 ☐ Calculer la racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre.
1.16 ☐ Maîtriser le vocabulaire spécifique aux nombres et opérations.

Chapitre 2

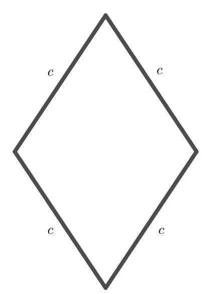
Calcul littéral

2.1 Introduction

En mathématiques, il arrive fréquemment de travailler avec des *lettres*, qui représentent des *nombres*. L'objectif du *calcul littéral* consiste à représenter des nombres inconnus avec des lettres afin de résoudre des problèmes.

Exemple.

Un losange a 4 côtés égaux de longueur c.
Son périmètre P (ou pourtour) se calcule en additionnant les longueurs de ses côtés, il est donc égal à :



$$\begin{aligned} P &= c+c+c+c \\ &= 4\cdot c \\ &= 4c. \end{aligned}$$

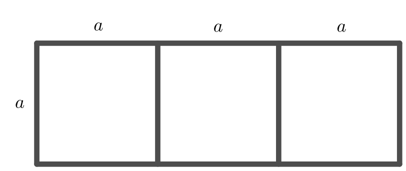
Avec cette formule, nous pouvons éviter de répéter le même raisonnement chaque fois qu'il s'agit de calculer le périmètre d'un losange. Par exemple, pour calculer le périmètre d'un losange dont le côté mesure 12 cm, on remplace c par 12 dans l'expression $P = 4c$ que donne la formule. Le périmètre de ce losange est donc égal à

$$P = 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}.$$

Dans cette situation, on dit que c est une *variable.*

Exemple.

On forme un rectangle en assemblant trois carrés identiques. La longueur du côté de chaque carré est a.
L'aire de chaque carré est égale à $a \cdot a$. L'aire A du rectangle est égale à la somme des aires des trois carrés.



Elle est donc égale à

$$A = a\cdot a + a\cdot a + a\cdot a = 3\cdot a\cdot a = 3a^2.$$

2.2 Monômes et polynômes

2.2.1 Définition

Définition. Une *expression littérale* est une écriture contenant une ou plusieurs variables.

Exemple.

1. $3x^8$ est un *monôme* car il contient un seul terme. x est la *variable*, car elle peut prendre n'importe quelle valeur. 3 est appelé *coefficient* de x^8.
2. $3x^8 - 5y$ est un *binôme*, car il contient deux termes.
3. $5x^2 - 2x + 3$ est un *trinôme*, car il contient trois termes.

Définition. Lorsque le nombre de termes n'est pas précisé, on parle de *polynôme*. Le *degré* d'un polynôme par rapport à une variable est la plus grande puissance observée par rapport à celle-ci.

Exemple.

1. $5x^3 - 3x^2 + 2x - 9$ est un polynôme de degré 3.
2. $3x^4y - 2xy^5$ est un polynôme de degré 4 par rapport à x et de degré 5 par rapport à y.

Définition. On appelle *termes semblables* des termes qui ne diffèrent que par leur coefficient.

Exemple.

1. $3x^2y^5$ et $-6x^2y^5$ sont des termes semblables.
2. $3x^2y^5$ et $-6x^5y^2$ ne sont pas des termes semblables.

2.2.2 Opérations sur les monômes

Addition et soustraction

Il est uniquement possible d'additionner ou soustraire des monômes s'ils sont semblables. On additionne ou soustrait leur coefficient et l'on garde leur partie littérale.

Exemple.

1. $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$.
2. $6x + 3y - 2x + 8y = (6 - 2)x + (3 + 8)y = 4x + 11y$
3. $\frac{3}{4}x^3y^2 + \frac{1}{2}y^2x^3 = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)x^3y^2 = \frac{5}{4}x^3y^2$

Exercice 2.1. Réduire les monômes semblables.

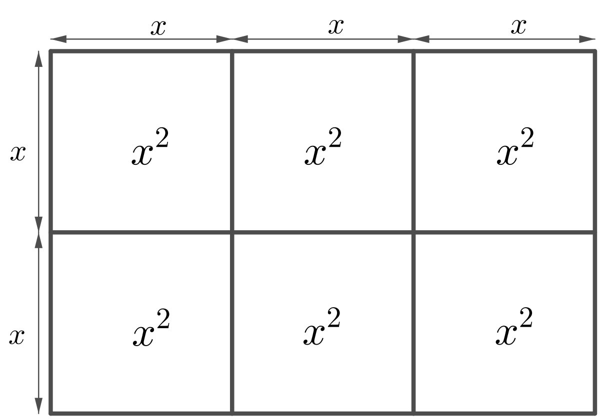
a) $2a + 8a - 12a$
b) $xyz + xyz$
c) $-3ab + 4ab + 3ab$
d) $3x - 2x + 5x - 2x + 4x - 3x$
e) $5b^2 - b^2 - 4b^2$
f) $ab - 3ab + 7ba - 10ab + ba$
g) $2ab - 3ab + 5ba - 14ab + ba$
h) $18ab^2 - 3a^2b - 8a^2b + 5ab^2$
i) $a^2x^3 - 5a^3x^2 - 6a^3x^2$
j) $-(-4a) + 6c - 7a$
k) $-(-5uv) - 10u^2v + uv - (-u^2v)$
l) $2x^2y^3 - 3y^3x^2 + 5yxyxy$

Multiplication

Lors d'une multiplication de monômes, il convient de multiplier les coefficients entre eux et les parties littérales entre elles.

Exemple.

1. $3x \cdot 2x = (3 \cdot 2)(x \cdot x) = 6x^2$



2. $\frac{3}{4}x^2y^3z \cdot \frac{5}{2}x^3y = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2}\right)(x^2 \cdot x^3)(y^3 \cdot y)(z) = \frac{15}{8}x^5y^4z$

Exercice 2.2. Effectuer.

a) $x^5 \cdot x^4 \cdot x^3$	b) $2x^2 \cdot 4x^4$
c) $5x^2y \cdot (-2x^3y^2)$	d) $(-4ab^2c^3) \cdot (-3a^5b^4c^3)$
e) $\left(\frac{2}{3}x^5y^6\right) \cdot 3xy^3$	f) $\left(\frac{7}{6}x^2y^5z\right) \cdot \left(\frac{9}{14}x^5yz^2\right)$
g) $(3x^2y)^2$	h) $\left(\frac{5}{7}a^2b^3c^4\right)^2$
i) $(4x^3y^2)^2 \cdot (2xy^4)^3$	j) $(5x^2y) \cdot (4x^3y^4)^2 \cdot (3x^5y^6)^3$

Exercice 2.3. Effectuer et réduire.

a) $(2b)^3 - b^3 + 2b^3$	b) $(3x^2)^2 + (2x)^4$
c) $2x \cdot 3x^2 - 5x^3 + (3x)^3$	d) $(2a)^2 \cdot 4b^2 + (5ab)^2 - (-2ab)^2$

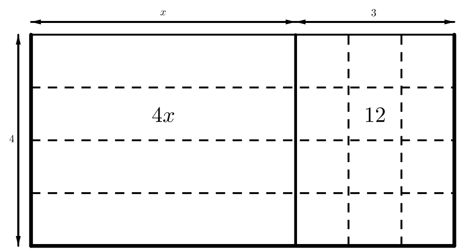
2.2.3 Opérations sur les polynômes

Comme vu précédemment, il est possible de regrouper deux termes uniquement si ceux-ci sont semblables. Par ailleurs, pour multiplier deux polynômes, on distribue.

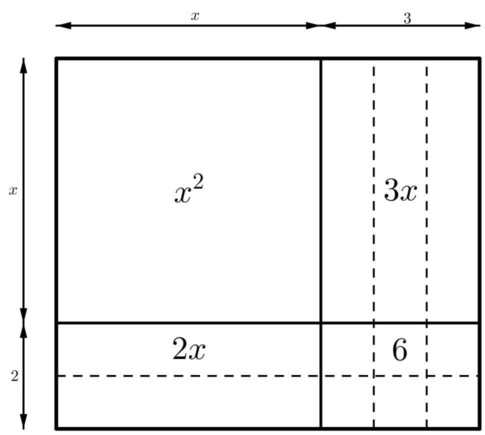
Exemple.

1. $(3x^2 - 2x + 7) + (x^2 + 3x) = 3x^2 - 2x + 7 + x^2 + 3x = 4x^2 + x + 7$.
2. $(3x^2 - 2x + 7) - (x^2 - x^3 + 3x) = 3x^2 - 2x + 7 - x^2 + x^3 - 3x = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$.

3. $4 \cdot (x+3) = 4 \cdot x + 4 \cdot 3 = 4x + 12.$



4. $(x+2) \cdot (x+3) = x \cdot x + x \cdot 3 + 2 \cdot x + 2 \cdot 3 = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6.$



5. $(3x-2) \cdot (x^2+3) = 3x \cdot x^2 + 3x \cdot 3 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot 3 = 3x^3 + 9x - 2x^2 - 6 = 3x^3 - 2x^2 + 9x - 6.$

Exercice 2.4. Réduire les expressions suivantes au maximum.

a) $3(5a+2)$

b) $-5(a-3)$

c) $\frac{1}{2}z(4+2z)$

d) $3x\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}\right)$

e) $-3(x-2y+3z)$

f) $(x+3)(x+5)$

g) $(x-2)(x+1)$

h) $(3z-1)(4+2z)$

Exercice 2.5. Réduire les expressions suivantes au maximum.

a) $(x^4 - x^3 + 2) + (x^2 - 2x + 5)$

b) $(2y)^5 \cdot (2z)^6$

c) $4x^2 + 3y - (6x^2 - 2y)$

d) $(x^2 - 2x - 3) - (x^2 + 4x + 9)$

e) $2(x+3) - 3(x-1)$

f) $4x(x-3) - (x-7)$

g) $18x - [7x - (8x - y)]$

h) $5x - [x - (5x - 3)]$

i) $4x - \{2x - [3y - (5x - 4y) + 3x]\} - 2y$

j) $25x - \{13x - [24x - (5x + 3y) - (7x - y)] + (24x - 2y)\}$

Exercice 2.6. Réduire les expressions suivantes au maximum.

a) $3x(x-4)(x+5)$

b) $-2x(x-3)(4-2x^2)$

c) $x \cdot (x+1) \cdot (x^2 - x - 1)$

d) $(2a+1) \cdot (3a-1) \cdot (2a-3)$

e) $5x^3 - \{4x + 3x[2x^2 - 3(x-5)]\}$

f) $-3x^3\{9x^2 - [3x^3 - 2x(4x+1)]\}$

g) $-2(a+c) + 3[(b-c) + 3(c-a)]$

h) $(3x-1)(x+2) - (2x+5)(x-1)$

Exercice 2.7. Evaluer les polynômes suivant pour $p = -2$, $q = 4$ et $r = -5$.

a) $-3(p + 5q)$ b) $\dfrac{q + r}{q + p}$

2.2.4 Identités remarquables

Théorème. *Si a et b sont deux monômes, alors*

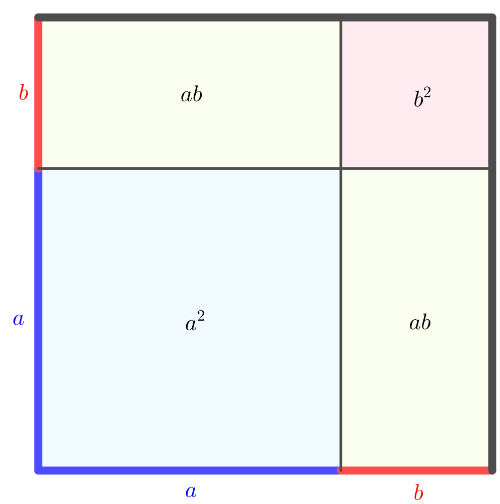
1. $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$
2. $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
3. $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$
4. $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$
5. $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

Preuve. Soient a et b deux monômes.

On a

1.

$$\begin{array}{rcl}(a+b)^2 & = & (a+b)(a+b) \\ & = & a^2 + ab + ba + b^2 \\ & = & a^2 + 2ab + b^2.\end{array}$$



2.

$$\begin{array}{rcl}(a-b)^2 & = & (a-b)(a-b) \\ & = & a^2 - ab - ba + b^2 \\ & = & a^2 - 2ab + b^2.\end{array}$$

3.
$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2-ab+ba-b^2\\ &= a^2-b^2.\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)^2(a-b)\\ &= (a^2-2ab+b^2)(a-b)\\ &= a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+b^2a-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.\end{aligned}$$

$\square$

Exemple.

1.
$$\begin{aligned}(5x+3y)^2 &= (5x)^2+2\cdot 5x\cdot 3y+(3y)^2\\ &= 25x^2+30xy+9y^2.\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}(4x^3-y^2)^2 &= (4x^3)^2-2\cdot 4x^3\cdot y^2+(y^2)^2\\ &= 16x^6-8x^3y^2+y^4.\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}(9x^4+2x^3)(9x^4-2x^3) &= (9x^4)^2-(2x^3)^2\\ &= 81x^8-4x^6.\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}(4x+5y)^3 &= (4x)^3+3\cdot(4x)^2\cdot 5y+3\cdot 4x\cdot(5y)^2+(5y)^3\\ &= 64x^3+3\cdot 16x^2\cdot 5y+3\cdot 4x\cdot 25y^2+125y^3\\ &= 64x^3+240x^2y+300xy^2+125y^3.\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}(5x^3-2y)^3 &= (5x^3)^3-3\cdot(5x^3)^2\cdot 2y+3\cdot 5x^3\cdot(2y)^2-(2y)^3\\ &= 125x^9-3\cdot 25x^6\cdot 2y+3\cdot 5x^3\cdot 4y^2-8y^3\\ &= 125x^9-150x^6y+60x^3y^2-8y^3.\end{aligned}$$

Exercice 2.8. Effectuer à l'aide des identités remarquables.

a) $(x+1)^2$ b) $(x-3)^2$
c) $(x-6)(x+6)$ d) $(x+5)^2$
e) $(x-7)^2$ f) $(x-2)(x+2)$
g) $(-x+2)^2$ h) $(x-7)(x+7)$
i) $(2x-4)(2x+4)$ j) $(4m^2-9n^2)^2$
k) $(3x+6)(3x-6)$ l) $\left(\frac{2}{7}x-\frac{3}{2}y\right)^2$
m) $(xy^2z-5)(xy^2z+5)$ n) $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

Exercice 2.9. Compléter.

a) $9x^2 - 24x + \ \ldots\ = (\ \ldots\ -\ \ldots\ )^2$ b) $64x^2 + \ \ldots\ \cdot x + \dfrac{1}{9} = (\ \ldots\ +\ \ldots\ )^2$

c) $\left(\dfrac{1}{3}x + \ \ldots\ \right)^2 = \ \ldots\ + 4x + \ \ldots$ d) $\left(\dfrac{1}{5}x + \ \ldots\ \right)^2 = \ \ldots\ + \dfrac{3}{10}x + \ \ldots$

Exercice 2.10. Effectuer à l'aide des identités remarquables.

a) $(x+1)^3$ b) $(x^2-1)^3$

c) $(2x+3y)^3$ d) $(3x-8)^3$

e) $(4x^2-3x^3)^3$ f) $(3x+2y^2)^3$

2.3 Factorisation

En développant $2x(x-y)$, on obtient $2x^2 - 2xy$. *Factoriser* $2x^2 - 2xy$ consiste à retrouver le produit $2x(x-y)$.

Autrement dit :

$$\boxed{2x(x-y) \underset{\text{Factoriser}}{\overset{\text{Développer}}{\rightleftarrows}} 2x^2 - 2xy}$$

Suivant les cas, différentes techniques de factorisation seront utilisées.

Exemple.

1. **Mise en évidence**

   Soit à factoriser $8x^3y^2 - 12x^2y^3$.
   Les deux monômes étant des multiples de $4x^2y^2$, il est possible de mettre ce terme *en évidence* :
   $$8x^3y^2 - 12x^2y^3 = 4x^2y^2(2x-3y).$$
   Pour vérifier, il suffit de développer le terme de droite.

2. **Mise en évidence d'une parenthèse**

   Soit à factoriser $2(x-y)^2 + 4(x-y)$.
   On peut voir cette expression comme une somme de deux termes dont chacun est multiple de $2(x-y)$. Il est donc possible de mettre $2(x-y)$ en évidence :
   $$2(x-y)^2 + 4(x-y) = 2(x-y)[(x-y)+2] = 2(x-y)(x-y+2).$$

3. **Mise en évidence par groupements**

   Soit à factoriser $2x + 2y + xz + yz$.
   Il n'est pas possible de procéder à une mise en évidence, car les monômes composant le polynôme ci-dessous n'ont aucun diviseur commun. Il est cependant possible de mettre 2 en évidence pour les deux premiers termes et z pour les deux derniers, afin de se ramener au cas précédent :
   $$2x + 2y + xz + yz = 2(x+y) + z(x+y) = (x+y)(2+z).$$

4. **Identités remarquables**

Soit à factoriser $9x^2 + 24xy + 16y^2$. Ce trinôme étant de la forme $a^2 + 2ab + b^2$, il s'agit de l'écrire sous la forme $(a + b)^2$:

$$\underbrace{9x^2}_{=a^2} + \underbrace{24xy}_{=2ab} + \underbrace{16y^2}_{=b^2} = (\underbrace{3x}_{=a} + \underbrace{4y}_{=b})^2.$$

5. **Identités remarquables**

Quant au binôme $25x^2 - 9y^2$, il est de la forme $a^2 - b^2$. On a donc

$$\underbrace{25x^2}_{=a^2} - \underbrace{9y^2}_{=b^2} = (\underbrace{5x}_{=a} + \underbrace{3y}_{=b})(\underbrace{5x}_{=a} - \underbrace{3y}_{=b}).$$

6. **Factorisation du trinôme du deuxième degré**

En développant $(x + 2)(x + 3)$, on obtient

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6.$$

Factoriser $x^2 + 5x + 6$ consiste à l'écrire comme produit des deux parenthèses ci-dessus. On observe que :

— puisque le trinôme contient le terme x^2, chaque parenthèse doit contenir x ;
— chaque parenthèse contient un binôme de la forme $x + \text{Nombre}$;
— le terme $5x$ a été obtenu en calculant $3x + 2x$;
— le nombre 6 a été obtenu en calculant $2 \cdot 3$.

Autrement dit, la factorisation sera de la forme $(x + \text{Nombre}_1)(x + \text{Nombre}_2)$. Le produit de ces deux nombres doit donner 6 et leur somme 5.

7. **Factorisation du trinôme du deuxième degré**

Soit à factoriser $x^2 + 7x + 12$.
Comme $4 \cdot 3 = 12$ et $4 + 3 = 7$, on a

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3).$$

8. **Factorisation du trinôme du deuxième degré**

Soit à factoriser $x^2 - 8x + 15$.
Comme $(-5) \cdot (-3) = 15$ et $-5 - 3 = -8$, on a

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3).$$

9. **Factorisation du trinôme du deuxième degré**

Soit à factoriser $x^2 - 2x - 24$.
Comme $(-6) \cdot 4 = 24$ et $-6 + 4 = -2$, on a

$$x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4).$$

10. **Un mélange**

Soit à factoriser $2x^3 - 4x^2 - 16x$.
On a
$$2x^3 - 4x^2 - 16x = 2x(x^2 - 2x - 8) = 2x(x-4)(x+2).$$

11. **Un mélange**

Soit à factoriser $2x^4 - 2y^4$.
On a
$$2x^4 - 2y^4 = 2(x^4 - y^4) = 2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 2(x^2 + y^2)(x+y)(x-y).$$

Exercice 2.11. Mettre en évidence les facteurs communs.

a) $2a + 2b$ b) $rs + 4st$
c) $12a + 15b - 9c$ d) $4u^2 - 2uv$
e) $10xy + 15xy^2$ f) $9b - 30abc + 3bc$
g) $4a^4 - 8a^3 + 20a^2 - 4a$ h) $3a^2b^2 - 6a^2b$
i) $3x^2y^3 - 9x^3y^2$ j) $16x^5y^2 + 8x^3y^3$
k) $15x^3y^4 - 25x^4y^2 + 10x^6y^4$ l) $121r^3s^4 + 77r^2s^4 - 55r^4s^3$

Exercice 2.12. Mettre en évidence les facteurs communs.

a) $n(x-y) - (x-y)$ b) $(4a-5b)(3p-2q) - (a+5b)(3p-2q)$
c) $r(a-2) + r^2(a-2) - r^3(a-2)$ d) $(x+1)(x-y) - (x-3)(x-y) - (x+2)(x-y)$
e) $(4x-3)^2 - (4x-3)(9x-9)$ f) $17(x-2) - 34(-2+x) + 85(x-2)^2$
g) $(5x+2y) - 2x(2y+5x)^2 + 7(5x+2y)$ h) $(2x-1)^2 - 3(2x-1)(x+2) + (x+4)(2x-1)$

Exercice 2.13. Factoriser par groupements.

a) $2ax - 6bx + ay - 3by$ b) $4ax + 2bx - 6ay - 3by$
c) $3x^3 + 3x^2 - 27x - 27$ d) $5x^3 + 10x^2 - 20x - 40$
e) $3x^2 + 2xy + 6x + 4y$ f) $2ay^2 - axy + 6xy - 3x^2$
g) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$ h) $ax - bx + 2x - ay + by - 2y$

Exercice 2.14. Factoriser à l'aide des identités remarquables.

a) $x^2 + 10x + 25$ b) $x^2 + 16x + 64$
c) $x^2 - 14x + 49$ d) $4x^2 + 4x + 1$
e) $9x^2 - 4$ f) $x^2 - 25$

Exercice 2.15. Factoriser au maximum les trinômes suivants.

a) $x^2 + 3x + 2$ b) $x^2 + 5x + 6$
c) $x^2 + 2x - 3$ d) $x^2 + 7x + 12$
e) $x^2 + x - 30$ f) $x^2 + 15x + 56$
g) $x^2 - 9x + 20$ h) $x^2 + x - 56$
i) $x^2 + x - 12$ j) $x^2 - 14x + 48$

Exercice 2.16. Factoriser au maximum les expressions suivantes.

a) $x^3 + 2x^2y + xy^2$
b) $x^3y - xy^3$
c) $x^4 - 25x^2$
d) $4x^3 + 4x^2 + x$
e) $81x^{13} - 72x^{12} + 16x^{11}$
f) $16x^{15} + 72x^{14} + 81x^{13}$
g) $x^8 - 256$
h) $x^5 - 81x$
i) $2x^3 - 22x^2 + 20x$
j) $32x^5 - 162x$

2.4 Fractions rationnelles

2.4.1 Définition

Définition. Une *fraction rationnelle* est un quotient de deux polynômes.

Exemple. $\dfrac{x+y}{2x+3y}$ et $\dfrac{x^2}{5x^2-11y^3}$ sont deux fractions rationnelles.

2.4.2 Opérations sur les fractions rationnelles

Les opérations sur les fractions rationnelles sont identiques à celles sur les fractions numériques :

1. Amplifier une fraction rationnelle consiste à multiplier son numérateur et son dénominateur par un même polynôme.
2. Simplifier une fraction rationnelle consiste à diviser son numérateur et son dénominateur par un même polynôme.
3. Le produit de deux fractions rationnelles est une fraction rationnelle dont le numérateur est le produit des numérateurs et le dénominateur le produit des dénominateurs.
4. Pour diviser une fraction rationnelle par une autre, il suffit de multiplier la première par l'inverse de la deuxième.
5. Pour additionner deux fractions rationnelles, il suffit de trouver un dénominateur commun, de les amplifier et d'additionner les numérateurs ainsi obtenus.

Exemple.

1. **Amplifions** $\dfrac{2x}{x-y}$ par $x+y$:

$$\frac{2x}{x-y} = \frac{2x}{x-y} \cdot \frac{x+y}{x+y} = \frac{2x(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x^2+2xy}{x^2-y^2}.$$

2. **Simplifions** $\dfrac{x^2-9}{x^2+4x+3}$:

$$\frac{x^2-9}{x^2+4x+3} = \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{(x+1)\cancel{(x+3)}} = \frac{x-3}{x+1}.$$

3. **Produit de deux fractions rationnelles**

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^2+8x+16}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x+3} &= \frac{x+2}{(x+4)^2}\cdot\frac{(x+4)(x+3)}{x+3}\\
&= \frac{(x+2)\cancel{(x+4)}\cancel{(x+3)}}{(x+4)^{\cancel{2}}\cancel{(x+3)}}\\
&= \frac{x+2}{x+4}.
\end{aligned}$$

4. **Quotient de deux fractions rationnelles**

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-4}{2x+6}:\frac{x-2}{x+3} &= \frac{x^2-4}{2x+6}\cdot\frac{x+3}{x-2}\\
&= \frac{(x+2)(x-2)}{2(x+3)}\cdot\frac{x+3}{x-2}\\
&= \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}}{2\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}}\\
&= \frac{x+2}{2}.
\end{aligned}$$

5. **Somme/différence de deux fractions rationnelles**

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x+y}-\frac{2}{x-y} &= \frac{3(x-y)}{(x+y)(x-y)}-\frac{2(x+y)}{(x-y)(x+y)}\\
&= \frac{3(x-y)-2(x+y)}{(x+y)(x-y)}\\
&= \frac{3x-3y-2x-2y}{(x+y)(x-y)}\\
&= \frac{x-5y}{(x+y)(x-y)}.
\end{aligned}$$

Remarque.

1. Il faut faire attention à un signe "$-$" placé avant la fraction. Celui-ci change tous les signes du numérateur. En effet, on a par exemple

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x+y}-\frac{3x-4y}{x+y} &= \frac{2x}{x+y}+(-1)\cdot\frac{3x-4y}{x+y}\\
&= \frac{2x}{x+y}+\frac{-3x+4y}{x+y}\\
&= \frac{2x-3x+4y}{x+y}\\
&= \frac{-x+4y}{x+y}.
\end{aligned}$$

2. La simplification

$$\frac{x^{\cancel{2}}+1}{4\cancel{x}+3}=\frac{x+1}{4+3}=\frac{x+1}{7}$$

est fausse !

Pour le voir, il suffit d'exhiber un contre-exemple.

En posant $x = 2$, on a

$$\frac{2^2+1}{4\cdot 2+3} = \frac{5}{11}$$

et

$$\frac{2+1}{7} = \frac{3}{7}.$$

Exercice 2.17. Amplifier les fractions de manière à obtenir le dénominateur indiqué après le point-virgule.

a) $\dfrac{5x}{8y}$; $48x^2y^2$ b) $\dfrac{3a+1}{a+1}$; a^2-1

c) $\dfrac{2a+5}{a-5}$; $a^2-10a+25$ d) $\dfrac{x-3y}{3x-y}$; $9x^2-y^2$

Exercice 2.18. Simplifier au maximum.

a) $\dfrac{15a^3b^2}{20a^2b^4}$ b) $\dfrac{-18a^3xy^2}{42ax^2y^3}$

c) $\dfrac{3a^3b^2x^2y^7}{-121b^2x^5y^2}$ d) $\dfrac{(a+b)^2(a-b)}{(a-b)^2(a+b)}$

Exercice 2.19. Simplifier au maximum.

a) $\dfrac{5a+15b}{4a+12b}$ b) $\dfrac{14+7x}{7x}$

c) $\dfrac{3x+3y+3z}{5x+5y+5z}$ d) $\dfrac{6x^4-12x^3}{2x^3-4x^2}$

e) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}$ f) $\dfrac{x^2-xy}{x^2-2xy+y^2}$

g) $\dfrac{x^2-y^2}{ax+ay}$ h) $\dfrac{12ax^2+18a^2x}{9a^2+12ax+4x^2}$

Exercice 2.20. Effectuer et simplifier au maximum.

a) $\dfrac{x^2}{y}\cdot\dfrac{2y^2}{3x}$ b) $\dfrac{5a^2b}{3x^2y}\cdot\dfrac{10xy^2}{5ab^2}$

c) $\dfrac{5a^2b}{x^2} : \dfrac{6ab^2}{xy}$ d) $\dfrac{7ab^2}{x^2y} : \dfrac{14ab^3}{xy^2}$

Exercice 2.21. Effectuer et simplifier.

a) $\dfrac{x^2-y^2}{x}\cdot\dfrac{x^2}{x+y}$

b) $\dfrac{16a^2-25b^2}{a^2-16}\cdot\dfrac{a^3-4a^2}{4a-5b}$

c) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}:\dfrac{3x-3y}{3}$

d) $\dfrac{x^2+6x+9}{a+b}:\dfrac{x^2+5x+6}{2ab+2b^2}$

Exercice 2.22. Simplifier au maximum.

a) $\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{6}{x^2-4}$

b) $\dfrac{x-4}{3}+\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x-12}{12}$

c) $\dfrac{(x+1)^2}{15}+\dfrac{(x-2)^2}{3}-\dfrac{(x-3)^2}{5}$

d) $\dfrac{3x^2-5}{4a}+\dfrac{6-2x^2}{3a}$

e) $\dfrac{x-y}{xy}-\dfrac{z-y}{yz}+\dfrac{z-x}{xz}$

f) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3x+1}{x^2}-\dfrac{x-2}{x^3}$

g) $\dfrac{5}{x}-\dfrac{2x-1}{x^2}+\dfrac{x+5}{x^3}$

h) $\dfrac{5}{m-n}+\dfrac{4}{m+n}$

i) $\dfrac{3a}{a^2-1}+\dfrac{4}{a+1}$

j) $\dfrac{5}{t+2}+\dfrac{2}{t-2}-\dfrac{40}{t^2-4}$

2.5 Solutions

Exercice 2.1.

a) $-2a$
b) $2xyz$
c) $4ab$
d) $5x$
e) 0
f) $-4ab$
g) $-9ab$
h) $-11a^2b+23ab^2$
i) $-11a^3x^2+a^2x^3$
j) $-3a+6c$
k) $6uv-9u^2v$
l) $4x^2y^3$

Exercice 2.2.

a) x^{12}
b) $8x^6$
c) $-10x^5y^3$
d) $12a^6b^6c^6$
e) $2x^6y^9$
f) $\frac{3}{4}x^7y^6z^3$
g) $9x^4y^2$
h) $\frac{25}{49}a^4b^6c^8$
i) $128x^9y^{16}$
j) $2160x^{23}y^{27}$

Exercice 2.3.

a) $9b^3$
b) $25x^4$
c) $28x^3$
d) $37a^2b^2$

Exercice 2.4.

a) $15a+6$
b) $-5a+15$
c) $2z+z^2$
d) $2x^2-\frac{1}{2}x$
e) $-3x+6y-9z$
f) $x^2+8x+15$
g) x^2-x-2
h) $6z^2+10z-4$

Exercice 2.5.

a) $x^4-x^3+x^2-2x+7$
b) $2048y^5\cdot z^6$
c) $-2x^2+5y$
d) $-6x-12$
e) $-x+9$
f) $4x^2-13x+7$
g) $19x-y$
h) $9x-3$
i) $5y$
j) 0

Exercice 2.6.

a) $3x^3+3x^2-60x$
b) $4x^4-12x^3-8x^2+24x$
c) x^4-2x^2-x
d) $12a^3-16a^2-5a+3$
e) $-x^3+9x^2-49x$
f) $9x^6-51x^5-6x^4$
g) $-11a+3b+4c$
h) x^2+2x+3

Exercice 2.7.

a) -54 b) $-\dfrac{1}{2}$

Exercice 2.8.

a) x^2+2x+1 b) x^2-6x+9
c) x^2-36 d) $x^2+10x+25$
e) $x^2-14x+49$ f) x^2-4
g) x^2-4x+4 h) x^2-49
i) $4x^2-16$ j) $16m^4-72m^2n^2+81n^4$
k) $9x^2-36$ l) $\dfrac{4}{49}x^2-\dfrac{6}{7}xy+\dfrac{9}{4}y^2$
m) $x^2y^4z^2-25$ n) $x^2-\dfrac{4}{9}$

Exercice 2.9.

a) $9x^2-24x+16=(3x-4)^2$ b) $64x^2+\dfrac{16}{3}\cdot x+\dfrac{1}{9}=\left(8x+\dfrac{1}{3}\right)^2$
c) $\left(\dfrac{1}{3}x+6\right)^2=\dfrac{1}{9}x^2+4x+36$ d) $\left(\dfrac{1}{5}x+\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{1}{25}x^2+\dfrac{3}{10}x+\dfrac{9}{16}$

Exercice 2.10.

a) x^3+3x^2+3x+1 b) $x^6-3x^4+3x^2-1$
c) $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$ d) $27x^3-216x^2+576x-512$
e) $-27x^9+108x^8-144x^7+64x^6$ f) $27x^3+54x^2y^2+36xy^4+8y^6$

Exercice 2.11.

a) $2(a+b)$ b) $s(r+4t)$
c) $3(4a+5b-3c)$ d) $2u(2u-v)$
e) $5xy(2+3y)$ f) $3b(3-10ac+c)$
g) $4a(a^3-2a^2+5a-1)$ h) $3a^2b(b-2)$
i) $3x^2y^2(y-3x)$ j) $8x^3y^2(2x^2+y)$
k) $5x^3y^2(3y^2-5x+2x^3y^2)$ l) $11r^2s^3(11rs+7s-5r^2)$

Exercice 2.12.

a) $(x-y)(n-1)$ b) $(3p-2q)(3a-10b)$
c) $r(a-2)(1+r-r^2)$ d) $(x-y)(2-x)$
e) $(4x-3)(6-5x)$ f) $17(x-2)[-1+5(x-2)]=17(x-2)(5x-11)$
g) $(5x+2y)[8-2x(2y+5x)]$ h) $(2x-1)[(2x-1)-3(x+2)+(x+4)]=(2x-1)(-3)$

Exercice 2.13.

a) $(2x+y)(a-3b)$ b) $(2a+b)(2x-3y)$
c) $3(x^2-9)(x+1)$ d) $5(x^2-4)(x+2)$
e) $(x+2)(3x+2y)$ f) $(ay+3x)(2y-x)$
g) $(1-x)(1+x^2+x^4)$ h) $(x-y)(a-b+2)$

Exercice 2.14.

a) $(x+5)^2$ b) $(x+8)^2$
c) $(x-7)^2$ d) $(2x+1)^2$
e) $(3x+2)(3x-2)$ f) $(x+5)(x-5)$

Exercice 2.15.

a) $(x+1)(x+2)$ b) $(x+2)(x+3)$
c) $(x+3)(x-1)$ d) $(x+3)(x+4)$
e) $(x+6)(x-5)$ f) $(x+7)(x+8)$
g) $(x-4)(x-5)$ h) $(x+8)(x-7)$
i) $(x+4)(x-3)$ j) $(x-6)(x-8)$

Exercice 2.16.

a) $x(x+y)^2$ b) $xy(x+y)(x-y)$
c) $x^2(x+5)(x-5)$ d) $x(2x+1)^2$
e) $x^{11}(9x-4)^2$ f) $x^{13}(4x+9)^2$
g) $(x^4+16)(x^2+4)(x+2)(x-2)$ h) $x(x^2+9)(x+3)(x-3)$
i) $2x(x-1)(x-10)$ j) $2x(2x-3)(2x+3)(4x^2+9)$

Exercice 2.17.

a) $\dfrac{30x^3y}{48x^2y^2}$ b) $\dfrac{3a^2-2a-1}{a^2-1}$
c) $\dfrac{2a^2-5a-25}{a^2-10a+25}$ d) $\dfrac{3x^2-8xy-3y^2}{9x^2-y^2}$

Exercice 2.18.

a) $\dfrac{3a}{4b^2}$ b) $-\dfrac{3a^2}{7xy}$
c) $-\dfrac{3a^3y^5}{121x^3}$ d) $\dfrac{a+b}{a-b}$

Exercice 2.19.

a) $\dfrac{5}{4}$ b) $\dfrac{2+x}{x}$
c) $\dfrac{3}{5}$ d) $3x$
e) $\dfrac{1}{a-b}$ f) $\dfrac{x}{x-y}$
g) $\dfrac{x-y}{a}$ h) $\dfrac{6ax}{2x+3a}$

Exercice 2.20.

a) $\dfrac{2xy}{3}$ b) $\dfrac{10ay}{3bx}$

c) $\dfrac{5ay}{6bx}$ d) $\dfrac{y}{2bx}$

Exercice 2.21.

a) $x(x-y)$ b) $\dfrac{a^2(4a+5b)}{a+4}$

c) 1 d) $\dfrac{2b(x+3)}{x+2}$

Exercice 2.22.

a) $\dfrac{3}{x+2}$ b) $\dfrac{6x-13}{12}$

c) $\dfrac{x^2-2}{5}$ d) $\dfrac{x^2+9}{12a}$

e) 0 f) $\dfrac{5x^2+2}{x^3}$

g) $\dfrac{3x^2+2x+5}{x^3}$ h) $\dfrac{9m+n}{(m+n)(m-n)}$

i) $\dfrac{7a-4}{a^2-1}$ j) $\dfrac{7t-46}{t^2-4}$

2.6 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

2.1 ☐ Effectuer les opérations élémentaires (addition, soustraction et multiplication) sur des monômes et des polynômes.
2.2 ☐ Elever un binôme au carré à l'aide des identités remarquables.
2.3 ☐ Factoriser un polynôme par mise en évidence.
2.4 ☐ Factoriser un polynôme par groupements.
2.5 ☐ Factoriser un polynôme à l'aide des identités remarquables.
2.6 ☐ Factoriser un trinôme du deuxième degré.
2.7 ☐ Combiner ces dernières techniques.
2.8 ☐ Amplifier une fraction rationnelle.
2.9 ☐ Simplifier une fraction rationnelle.
2.10 ☐ Effectuer les quatre opérations élémentaires sur les fractions rationnelles.

Chapitre 3

Equations

3.1 Equations du premier degré à une inconnue

Définition. Une *équation* est une égalité contenant une ou plusieurs variables (inconnues).

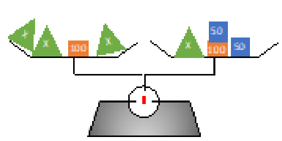
Exemple. $x - 5 = 7$ est une équation où $x - 5$ est appelé le *membre de gauche* et 7, le *membre de droite*. *L'inconnue* de cette équation est x.

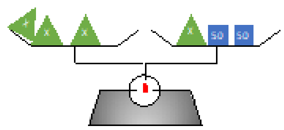
Lorsque l'on résout une équation, le but est de trouver la (ou les) valeur(s) de l'inconnue de manière à ce que l'égalité soit correcte. Autrement dit, que le membre de gauche soit égal au membre de droite. Une telle valeur est appelée *solution* de l'équation. Par exemple, 12 est solution de l'équation $x - 5 = 7$, car ainsi le membre de gauche et le membre de droite valent tout deux 7. Les équations dont l'exposant de l'inconnue ne dépasse pas 1 sont appelées *équations du premier degré*.

Comment résoudre des équations du premier degré ?

Il est possible d'effectuer toutes les opérations (addition/soustraction/multiplication/division) sur un membre tant qu'on effectue la même chose sur l'autre. Le but est d'isoler l'inconnue x pour trouver sa valeur.

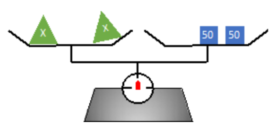
Exemple.

Soit à résoudre $3x + 100 = x + 100 + 2 \cdot 50$	
	$3x + 100 = x + 100 + 2 \cdot 50$.
On enlève 100 des deux côtés.	



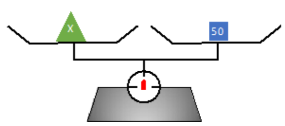
$3x = x + 2 \cdot 50.$

On enlève x des deux côtés.



$2x = 2 \cdot 50.$

On divise par 2 des deux côtés.



$x = 50.$

La solution est $x = 50$

Exemple. Soit l'équation $3x + 5 = 17$.
Nous pouvons soustraire 5 de part et d'autres de l'équation : $3x + 5 - 5 = 17 - 5$.
Nous obtenons ainsi $3x = 12$.
Nous divisons maintenant par 3 de chaque côté : $\dfrac{3x}{3} = \dfrac{12}{3}$
Nous obtenons ainsi $x = 4$.
Désormais, nous présenterons ces diverses étapes comme suit :

$$\begin{array}{rcl|l} 3x+5 & = & 17 & -5 \\ 3x & = & 12 & :3 \\ x & = & 4. & \end{array}$$

Exercice 3.1. Dans chacun des cas suivants, entourer les nombres qui sont solutions de l'équation.

a)	$3x - 15 - 4x = -9 + x - 13$	$x = 5$	$x = -\dfrac{8}{3}$	$x = \dfrac{7}{2}$	$x = 7$	$x = \dfrac{21}{6}$
b)	$4(2x+3) = 2(4x+6)$	$x = 0$	$x = -4$	$x = \dfrac{4}{5}$	$x = 9$	$x = 16$
c)	$x^2 - 9 = 0$	$x = 4$	$x = -3$	$x = -5$	$x = 3$	$x = 6$
d)	$\dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{3} = x - 5$	$x = 12$	$x = -7$	$x = 6$	$x = -12$	$x = 1$
e)	$\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{4x+3}{7} = 1$	$x = 7$	$x = 9$	$x = -4$	$x = 8$	$x = -13$
f)	$x^3 - 8 = 0$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 8$	$x = -8$	$x = -2$

Exercice 3.2. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $2x - 2 = -9$

b) $-3x + 4 = -1$

c) $4x - 3 = -5x + 6$

d) $5x - 4 = 2(x - 2)$

e) $4(2y + 5) = 3(5y - 2)$

f) $6(2y + 3) - 3(y + 5) = 0$

Exercice 3.3. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $3x + 5 = 3x - 7$

b) $5x + 7 - 2x = 3x + 7$

c) $\dfrac{5}{3}x - 1 = 4 + \dfrac{2}{3}x$

d) $\dfrac{1}{5}x + 2 = 3 - \dfrac{2}{7}x$

e) $(3x - 2)^2 = (x - 5)(9x + 4)$

f) $(5x - 7)(2x + 1) - 10x(x - 4) = 0$

g) $x + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{6}$

h) $\dfrac{2x - 9}{4} = 2 + \dfrac{x}{12}$

Exercice 3.4. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $3x + 2(1 - 3x) = 5(x + 2) - 2 - x$

b) $(x - 6)^2 + (x - 4)^2 + (2x - 9)^2 = (x - 8)(6x - 8)$

c) $(5x + 1)(2x - 1) - (2x + 1)(3x - 5) = 4(x + 3)(x - 1) - 4$

d) $60 = \left(\dfrac{x - 3}{3}\right) \cdot 4$

e) $\dfrac{2x}{5} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{2}$

f) $\dfrac{x - 1}{2} + \dfrac{x + 1}{3} = 5$

g) $\dfrac{3x - 10}{6} - \dfrac{-10x - 8}{2} = \dfrac{10x - 2}{3}$

h) $\dfrac{2(5 - 2x)}{3} - \dfrac{x + 2}{4} = 4(x + 1)$

i) $\dfrac{x + 7}{5} - \dfrac{3x + 1}{6} = 3 - \dfrac{x + 7}{15}$

j) $\dfrac{2x - 4}{3} - \dfrac{x + 5}{5} - \dfrac{2x + 3}{4} = 1$

3.2 Equations du premier degré à deux inconnues

Il est possible d'avoir des équations possédant deux inconnues différentes comme par exemple $x + 2y = 8$. Or, une équation à deux inconnues admet une infinité de solutions comme $(0; 4)$, $(8; 0)$, $(2; 3)$, $\left(-\frac{1}{3}; \frac{25}{6}\right)$ etc. Pour que la solution soit unique, une deuxième équation est nécessaire. C'est pour cette raison que nous allons étudier les systèmes de deux équations à deux inconnues. Pour résoudre un tel système, il existe deux méthodes : la méthode de substitution et celle d'addition.

3.2.1 Substitution

Exemple.

Soit à résoudre $\left\{\begin{array}{rcl|l} x+2y & = & 8 & \text{(I)} \\ 2x-y & = & 1 & \text{(II)} \end{array}\right.$.

$$\begin{array}{rcl|l} x+2y & = & 8 & -2y \\ x & = & 8-2y & \end{array}$$

Etape 1 :
Dans une des équations, on isole une des inconnues, par exemple x.
En utilisant l'équation (I), on obtient $x = 8-2y$

$$\begin{array}{lrcl|l} \text{(II)} & 2x-y & = & 1 & x=8-2y \\ & 2(8-2y)-y & = & 1 & \text{Distribution} \\ & 16-4y-y & = & 1 & \text{Distribution} \\ & 16-5y & = & 1 & \text{Simplification} \end{array}$$

Etape 2 :
Dans l'équation non-utilisée, on substitue (remplace) la variable par le résultat obtenu à la première étape. On utilise donc la seconde équation (II) dans laquelle on remplace x par $8-2y$.

$$\begin{array}{rcl|l} 16-5y & = & 1 & -16 \\ -5y & = & -15 & :(-5) \\ y & = & 3 & \end{array}$$

Etape 3 :
Résoudre l'équation obtenue.
On résout et l'on obtient $y = 3$.

$$\begin{array}{rcl|l} x & = & 8-2y & y=3 \\ x & = & 8-2\cdot 3 & \\ x & = & 2 & \end{array}$$

Etape 4 :
Dans l'équation obtenue lors de la première étape, on y remplace le résultat trouvé à l'étape 3.
On remplace y par 3 dans l'équation $x = 8-2y$.

Ainsi, la solution est $x = 2$ et $y = 3$,
ce qui se note $(x;y) = (2;3)$.

Exercice 3.5. Résoudre chacun des systèmes ci-dessous par substitution.

a) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 8 \\ 3x+y & = & -1 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x-1 \\ 2x & = & 2y+2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 29 \\ 3x-5y & = & 11 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+6y-4 & = & 0 \\ 3y-4 & = & -x \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y & = & -1 \\ 5x-3y & = & 1 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rcl} 6x-18y & = & 90 \\ -7x+3y & = & -33 \end{array}\right.$

3.2.2 Méthode d'addition

La seconde méthode est appelée la méthode de l'addition (ou combinaisons linéaires).

Exemple.

Soit à résoudre $\left\{\begin{array}{rcl|l} 2x-3 &=& -3y+6 & \text{(I)} \\ 5x-2y+5 &=& -20 & \text{(II)} \end{array}\right.$.

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} 2x-3 &=& -3y+6 & +3y+3 \\ 5x-2y+5 &=& -20 & -5 \end{array}\right.$$

Etape 1 :
Mettre tous les termes contenant des inconnues à gauche et les constantes à droite.

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} 2x+3y &=& 9 & \cdot 5 \\ 5x-2y &=& -25 & \cdot(-2) \end{array}\right.$$

Etape 2 :
Multiplier une ou les deux équations pour obtenir c et $-c$ devant x (ou y).

$$\begin{array}{rrcl} & 10x+15y &=& 45 \\ + & -10x+4y &=& 50 \\ \hline & 19y &=& 95 \end{array}$$

Etape 3 :
Additionner les deux équations.

$$\begin{array}{rcl|l} 19y &=& 95 & :19 \\ \color{red}{y} &\color{red}{=}& \color{red}{5} & \end{array}$$

Etape 4 :
Résoudre l'équation à une inconnue ainsi obtenue.

$$\begin{array}{rcl|l} 2x+3\color{red}{y} &=& 9 & y=5 \\ 2x+3\cdot\color{red}{5} &=& 9 & -15 \\ 2x &=& -6 & :2 \\ x &=& -3 & \end{array}$$

Etape 5 :
Remplacer la solution obtenue à l'étape 4 dans une des équations de l'étape 2 puis résoudre.

Ainsi, la solution est $x=-3$ et $y=5$,
ce qui se note $(x;y)=(-3;5)$.

Exercice 3.6. Résoudre chacun des systèmes ci-dessous à l'aide de la méthode d'addition.

a) $\left\{\begin{array}{rcl} 7x-y &=& 4 \\ -2x+y &=& 1 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} 5x+8y &=& 101 \\ 9x+2y &=& 95 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcl} 6x-3y &=& 3 \\ 2x-y &=& -1 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{rcl} 6x-5y &=& -15 \\ -12x+10y &=& 30 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcl} 4x-5y &=& 18 \\ 6x-8y &=& 28 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rcl} 4y-3x &=& 11 \\ 5y-7x &=& 4 \end{array}\right.$

Exercice 3.7. Résoudre chacun des systèmes ci-dessous à l'aide de la méthode la plus appropriée.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} \\ x + \dfrac{1}{3}y = 30 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ x - 6 = \dfrac{2y}{3} - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x-3y}{9} = 5 + y \\ \dfrac{x}{3} = 15 + \dfrac{8}{3}y \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{6(y+2)}{5} = \dfrac{7x}{5} - 4 \\ \dfrac{1}{3}(5x+8y) = 24 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{2} = \dfrac{y-1}{4} \\ \dfrac{7x+13y}{12} - y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - \dfrac{4}{5}y = \dfrac{2+y}{5} \\ 2x = 3y \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{4x-5y}{2} + 3 = \dfrac{2x+y}{5} \\ 8 - \dfrac{x-2y}{4} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} \end{cases}$ h) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{7} - \dfrac{2y+2}{3} = \dfrac{y-6}{7} + 1 \\ y - \dfrac{5x+1}{3} = 19 - 3x \end{cases}$

3.3 Equations du deuxième degré

Définition. On appelle *équation quadratique* ou *équation du deuxième degré* toute équation dont un exposant d'une inconnue au moins vaut au plus deux.

a) **Résoudre des équations du type $ax^2 + c = 0$.**

Exemple.

$$\begin{array}{rcl|l} x^2 - 144 & = & 0 & +144 \\ x^2 & = & 144 & \sqrt{} \\ x & = & \pm 12. & \end{array}$$

Remarque. Lorsqu'on utilise une racine carrée ou n'importe quelle racine de degré pair, on considère toujours la valeur positive et négative. En effet, $12^2 = 144$ mais également $(-12)^2 = 144$.

b) **Résoudre des équations du type $ax^2 + bx = 0$.**

Dans un tel cas, il est possible de mettre x en évidence.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl|l} 3x^2 - 9x & = & 0 & \text{Mise en évidence} \\ x(3x-9) & = & 0. & \end{array}$$

Donc soit $x = 0$, soit $3x - 9 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$.

Les solutions sont donc $x = 0$ et $x = 3$.

c) **Résoudre des équations du type $ax^2 + bx + c = 0$ par factorisation.**

Exemple.

$$\begin{array}{rcl|l} x^2 - 5x + 6 & = & 0 & \text{Factoriser} \\ (x-2)(x-3) & = & 0 & \end{array}$$

Pour que le produit entre un premier nombre et un deuxième nombre soit nul, il faut que le premier nombre soit nul ou que le deuxième nombre le soit.
Autrement dit, de

$$(x-2)(x-3) = 0,$$

on en tire les solutions

$$x = 2 \text{ et } x = 3.$$

d) **Résoudre des équations générales $ax^2 + bx + c = 0$.**
Il est parfois possible de factoriser à l'aide d'identités remarquables ou par tâtonnement. Autrement, il existe une formule permettant de déterminer les solutions.

$$\boxed{\text{L'équation } ax^2 + bx + c = 0 \text{ admet les solutions } x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.}$$

Cette dernière relation porte le nom de *Formule de Viète*.

On pose $\Delta \overset{\text{déf}}{=} b^2 - 4ac$, le *discriminant* de l'équation, où Δ est la majuscule grecque "*delta*".

Trois cas peuvent alors se présenter :

- $\Delta < 0$ et alors l'équation n'admet pas de solution (réelle).
- $\Delta = 0$ et alors l'équation admet une unique solution.
- $\Delta > 0$ et alors l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 données par

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.}$$

Exemple.

Soit l'équation $x^2 + 6 = 5x$.	
$\begin{array}{rcl\|l} x^2 + 6 & = & 5x & -5x \\ x^2 - 5x + 6 & = & 0 & \end{array}$	**Etape 1 :** Déplacer tous les termes du même côté du signe $=$.
$a = 1$, $b = -5$ et $c = 6$.	**Etape 2 :** Identifier les coefficients a, b et c.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= (-5)^2-4\cdot 1\cdot 6\\ &= 25-24\\ &= 1.\end{aligned}$$	**Etape 3 :** Commencer par calculer Δ. On observe que nous aurons donc deux solutions distinctes.
$$\begin{aligned}x_{1;2} &= \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}\\ &= \frac{5\pm 1}{2}\end{aligned}$$ $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$.	**Etape 4 :** Application de la formule de Viète.
Ainsi, les solutions sont $x = 3$ et $x = 2$.	

Exercice 3.8. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $(x-2)(x-3)=0$ b) $(x+1)(x+5)=0$
c) $x(x-1)=0$ d) $(x+1)(x-2)(x-4)=0$
e) $x(2x-4)(3x-3)(5x-15)=0$ f) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)(x+4)(x-4)=0$

Exercice 3.9. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $x^2=4$ b) $x^2-49=0$
c) $x^2+25=0$ d) $x^2+100=0$
e) $25x^2=9$ f) $x^2-5x=0$
g) $x^2=4x$ h) $3x^2-12=0$

Exercice 3.10. Résoudre les équations ci-dessous par factorisation.

a) $x^2-2x+1=0$ b) $x^2-10x+25=0$
c) $x^2+6x+9=0$ d) $4x^2-4x+1=0$
e) $16x^2-24x+11=2$ f) $9x^2+12x+4=0$
g) $x^2-3x-4=0$ h) $x^2+5x+6=0$
i) $x^2+2x-15=0$ j) $x^2+x-30=0$
k) $x^2-13x+42=0$ l) $x^3-9x=0$

Exercice 3.11. Résoudre les équations suivantes à l'aide de la formule de Viète ou à l'aide de toute autre méthode.

a) $6x^2 - 30x - 144 = 0$

b) $12x^2 + 36x - 120 = 0$

c) $16x^2 - 64x + 64 = 0$

d) $9x^2 + 42x + 69 = 0$

e) $3x^2 - 132 = 21x$

f) $4x(x+2) = 32$

g) $2x^2 - \dfrac{11x}{10} - \dfrac{3}{10} = 0$

h) $x(x+1) = 2(x+1)$

i) $-\dfrac{x^2}{8} + (x-1)(x+1) + \dfrac{1}{8} = 0$

j) $\dfrac{1}{2}(9-x) + \dfrac{4}{3}(x-3)^2 - \dfrac{5}{6} = 0$

k) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{x^2}{3}$

l) $(2x-3)(3x-2) - (3x-1)(x+3) = 9 - 21x$

3.4 Equations bicarrées

Définition. Une *équation bicarrée* est une équation du type $\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0.}$

La formule de Viète ne permettant que de résoudre des équations du deuxième degré, il est nécessaire d'effectuer un changement de variable.

Exemple.

Soit à résoudre $2x^4 - 6x^2 - 8 = 0$.

$\begin{array}{rcl|l} 2x^4 - 6x^2 - 8 & = & 0 & u = x^2 \\ 2u^2 - 6u - 8 & = & 0 & \end{array}$	**Etape 1 :** Procéder au changement de variable. On définit u comme étant x^2, on a donc $x^2 = u$ et par conséquent $x^4 = u^2$.
$u_{1;2} = \dfrac{6 \pm 10}{4}$ $u_1 = 4$ et $u_2 = -1$.	**Etape 2 :** Résoudre à l'aide de la formule de Viète. Attention, nous obtenons la (ou les) valeur(s) de u.
$\begin{array}{rcl|l} x^2 & = & 4 & \sqrt{\ } \\ x & = & \pm 2 & \end{array}$ et $\begin{array}{rcl|l} x^2 & = & -1 & \sqrt{\ } \end{array}$ Pas de solution !	**Etape 3 :** En déduire les valeurs de x. On utilise le fait que $x^2 = u$.

Ainsi, les solutions sont $x = 2$ et $x = -2$.

Exercice 3.12. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $x^4 - 41x^2 + 400 = 0$	b) $x^4 + 21x^2 - 100 = 0$
c) $3x^4 - 12x^2 = 0$	d) $x^4 + 9x^2 + 18 = 0$
e) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$	f) $8x^6 - 63x^3 - 8 = 0$
g) $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$	h) $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$

3.5 Equations irrationnelles

Définition. Une équation est dite *irrationnelle* si elle possède au moins une inconnue sous un radical (une racine).

Exemple.

Soit à résoudre $\sqrt{2x-1} - 3 = -2x$.

$$\begin{array}{rcl|l} \sqrt{2x-1} - 3 & = & -2x & +3 \\ \sqrt{2x-1} & = & 3-2x & \end{array}$$

Etape 1 :
Isoler la racine.

$$\begin{array}{rcl|l} \sqrt{2x-1} & = & 3-2x & (...)^2 \\ \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 & = & (3-2x)^2 & \\ 2x-1 & = & 9-12x+4x^2 & \end{array}$$

Etape 2 :
On élève au carré de chaque côté de l'égalité.
Attention aux identités remarquables !

$x_1 = 1$ et $x_2 = \dfrac{5}{2}$.

Etape 3 :
Résoudre l'équation obtenue.

$$\begin{array}{llcll} x_1 = 1 & \underbrace{\sqrt{2\cdot 1 - 1} - 3}_{=-2} & = & \underbrace{-2\cdot 1}_{=-2} & \text{OK} \\ x_2 = 2,5 & \underbrace{\sqrt{2\cdot 2,5 - 1} - 3}_{=-1} & \neq & \underbrace{-2\cdot 2,5}_{=-5} & \text{KO} \end{array}$$

Etape 4 :
Vérifier les solutions !

L'unique solution est $x = 1$.

Exercice 3.13. Résoudre les équations suivantes.

a) $\sqrt{x-1}=7$	b) $\sqrt{x+4}=-9$
c) $\sqrt{7-5x}=8$	d) $-\frac{1}{2}\sqrt{2x-5}=12$
e) $x-2=\sqrt{x^2-3x+1}$	f) $\sqrt{2x^2-5x+7}=7+x$
g) $x+\sqrt{3x+1}=1$	h) $8-3\sqrt{2x-1}=2$
i) $x-\sqrt{3x+25}=15$	j) $x-\sqrt{4x-19}=4$
k) $3(\sqrt{x}+1)+2\sqrt{x}=5$	l) $3\sqrt{x-2}=4-\sqrt{x-2}$

3.6 Problèmes

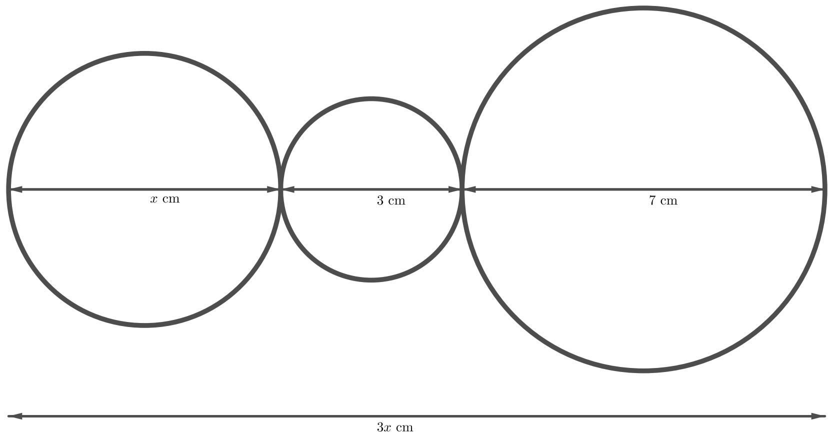
Lors de la résolution de problèmes mathématiques, il est nécessaire de commencer par définir les inconnues. Très souvent, la question finale nous donne une bonne indication quant aux inconnues à poser. Ensuite, il est nécessaire de déterminer les équations puis de les résoudre.

Exemple.

Dans un magasin, tous les CDs ont le même prix et toutes les BDs également. Marcel a acheté deux CDs et trois BDs pour 53 francs. Tristan a acheté quatre CDs et une BD pour 66 francs.
Calculer le prix d'un CD et celui d'une BD.

Posons $\begin{cases} x &= \text{Prix d'un CD} \\ y &= \text{Prix d'une BD} \end{cases}$. L'achat de Marcel s'écrit $2x+3y=53$. L'achat de Tristan s'écrit $4x+1y=66$.	**Etape 1 :** Définir les deux inconnues.
$\begin{cases} 2x+3y &= 53 \\ 4x+y &= 66 \end{cases}$.	**Etape 2 :** Traduire l'information en équations.
$(x;y)=(14,50;8)$	**Etape 3 :** Résoudre le système d'équations.
Un CD coûte 14,50 francs. Une BD coûte 8 francs.	**Etape 4 :** Donner la réponse sous forme de phrases.

Exercice 3.14. A l'aide d'une équation, décrire algébriquement la situation ci-dessous et la résoudre.



Exercice 3.15. Trouver 3 nombres entiers consécutifs dont la somme est égale à 984.

Exercice 3.16. Le réservoir d'une voiture est rempli jusqu'à un tiers. On rajoute 42 litres pour le remplir. Quelle est sa contenance ?

Exercice 3.17. Un magicien demande à un spectateur : "pensez à un nombre, multipliez le par 2, enlever 3 au résultat, multipliez le tout par 6". Le spectateur annonce 294. A quel nombre pensait-il ?

Exercice 3.18. Une famille arrive au restaurant. A la fin du repas, elle donne un billet de 50 francs pour payer l'addition. Le serveur rend la monnaie, soit 8,80 francs. Sachant que le prix du repas revient à 10,30 francs par personne, combien de personnes composent cette famille ?

Exercice 3.19. Si l'on double la différence entre 24 et le quadruple du nombre cherché, on obtient 15 en plus du double de ce nombre.

Exercice 3.20. Dans un hôtel, la moitié des vacanciers sont belges, un tiers néerlandais, un septième français et les trois derniers sont espagnols. Combien y a-t-il de vacanciers dans l'hôtel ?

Exercice 3.21. Un rectangle a une longueur de $5x$ et une largeur de $4x$. Si on augmente sa longueur de 18 cm et si on double sa largeur, ce rectangle devient un carré. Quelles sont les dimensions initiales du rectangle ?

Exercice 3.22. Un père a 45 ans et son fils 10 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera le double de celui du fils ?

Exercice 3.23. Si on additionne 12 à un nombre puis que l'on multiplie cette somme par 5 puis que l'on soustrait 72 à ce produit et que l'on divise cette différence par 4 on obtient alors le nombre lui-même. Quel est ce nombre ?

Exercice 3.24. En fabriquant des marches ayant 1,6 cm de plus en hauteur, on pourrait économiser deux marches dans un escalier de vingt-deux marches. Quelle est la hauteur de l'escalier ?

Exercice 3.25. Un livre a 240 pages ayant chacune le même nombre de lignes. Si l'on mettait 3 lignes de plus par page, le livre aurait alors 24 pages de moins. Quel est le nombre total de lignes de ce livre ?

Exercice 3.26. Si l'on augmente l'un des côtés d'un carré de 1,30 m et que l'on diminue l'autre de 80 cm, on obtient un rectangle de même aire que le carré primitif. Quel est le côté de ce carré ?

Exercice 3.27. On a partagé 710 francs entre 40 personnes. Chaque homme a reçu 15 francs et chaque femme 20 francs. Combien compte-t-on d'hommes et de femmes ?

Exercice 3.28. Dans une ferme, se trouvent des poules et des lapins. On compte 70 pattes et 25 têtes. Combien y a-t-il de poules et de lapins ?

Exercice 3.29. Combien de pièces de 5 francs et de 2 francs faut-il pour obtenir la somme de 115 francs, sachant que l'on doit avoir en tout 32 pièces ?

Exercice 3.30. Un troupeau est constitué de chameaux et de dromadaires. On compte 180 têtes et 304 bosses. Combien y a-t-il d'animaux de chaque espèce ?

Exercice 3.31. 36 personnes ont mangé dans un restaurant. Le menu adulte est à 22 francs et le menu enfant est à 9 francs. Sachant que le patron a fait une recette de 623 francs, combien a-t-il servi de menus enfants et adultes ?

Exercice 3.32. La recette d'un match s'élève a 36'500 francs. Les spectateurs ont le choix entre deux possibilités. Soit prendre une place dans les tribunes à 50 francs, soit prendre une place dans le secteur populaire à 30 francs. Il y a eu 1'000 spectateurs. Combien de spectateurs ont pris place dans les tribunes ?

Exercice 3.33. Pour 5 m de soie et 4 m de drap on a payé 256 francs et pour 4 m de soie et 5 m de drap on a payé 248 francs. Quel est le prix du mètre de chaque étoffe ?

Exercice 3.34. L'usine A a deux fois plus d'ouvriers que l'usine B. Le quart des ouvriers de A et le cinquième des ouvriers de B remplissent sept bus de 25 places. Combien y a-t-il d'ouvriers dans chaque usine ?

Exercice 3.35. Un réparateur informatique facture 120 francs de l'heure quand il se déplace et 80 francs de l'heure quand il envoie son collaborateur. Le client reçoit une facture de 1'120 francs. Sachant que le réparateur a passé deux fois moins de temps chez le client que de son collaborateur, combien de temps chacun a-t-il passé avec son client ?

Exercice 3.36. Il y a dix ans, l'âge d'un père était le sextuple de celui de son fils. Dans dix ans, il n'en sera plus que le double. Quels sont les âges actuels ?

Exercice 3.37. Un père est aujourd'hui 4 fois plus vieux que son fils. Dans 6 ans, il aura 3 ans de moins que le triple de l'âge de son fils. Quels sont leur âge respectif ?

Exercice 3.38. Une somme a été partagée également entre un certain nombre de personnes. S'il y avait eu 6 personnes de plus, chacune aurait reçu 2 francs de moins. S'il y avait eu 3 personnes de moins, chacune aurait reçu 2 francs de plus. Déterminer le nombre de personnes et la part de chacune.

Exercice 3.39. Les différentes classes d'une école ont chacune le même nombre d'élèves. A la suite d'un incendie, 6 des classes furent rendues inutilisables. On dut alors ajouter 5 élèves par classe. Après la visite de l'expert incendie, 10 autres classes furent également inutilisables par sécurité. D'où la nécessité de remettre encore 15 élèves dans chacune des classes restées en bon état. Combien l'école compte-elle d'élèves ?

Exercice 3.40. Trouver deux nombres entiers consécutifs tels que la somme de leurs carrés soit égale à 545.

Exercice 3.41. Trouver deux nombres réels tels que leur somme soit 10 et leur produit 24.

Exercice 3.42. A midi, les aiguilles d'une horloge sont distantes de 17 cm et de 85 cm à neuf heure. Quelles sont les longueurs des deux aiguilles ?

Exercice 3.43. Une pelouse a la forme d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur. Une allée de 3 m de large entoure cette pelouse. Calculer la largeur de la pelouse, sachant que l'aire totale, pelouse et allée est de 360 m^2.

Exercice 3.44. Un acheteur acquiert une série de reproductions pour un total de 672 francs. Si chaque reproduction avait coûté 4 francs de moins, il aurait pu en acheter 3 de plus avec la même somme. Combien de reproductions a-t-il acheté et à quel prix ?

Exercice 3.45. Un facteur se rend chez un particulier. Ils commencent à discuter ensemble. Le facteur demande alors :

— "Vous avez des filles, vous ?"
— "Oui, trois."
— "Elles ont quel âge ?"
— "Et bien, c'est simple : le produit de leur âge fait 36 et la somme de leur âge correspond au numéro de la maison en face."
— "Il me manque un indice."
— "Oui pardon : l'ainée de mes filles est blonde."
— "Ah oui, maintenant je sais !"

Quel est donc l'âge des trois filles ?

3.7 Solutions

Exercice 3.1.

a)	$x=5$	$x=-\frac{8}{3}$	$\boxed{x=\frac{7}{2}}$	$x=7$	$\boxed{x=\frac{21}{6}}$
b)	$\boxed{x=0}$	$\boxed{x=-4}$	$\boxed{x=\frac{4}{5}}$	$\boxed{x=9}$	$\boxed{x=16}$
c)	$x=4$	$\boxed{x=-3}$	$x=-5$	$\boxed{x=3}$	$x=6$
d)	$\boxed{x=12}$	$x=-7$	$x=6$	$x=-12$	$x=1$
e)	$x=7$	$x=9$	$x=-4$	$x=8$	$\boxed{x=-13}$
f)	$\boxed{x=2}$	$x=3$	$x=8$	$x=-8$	$x=-2$

Exercice 3.2.

a) $x=-\frac{7}{2}$ b) $x=\frac{5}{3}$

c) $x=1$ d) $x=0$

e) $y=\frac{26}{7}$ f) $y=-\frac{1}{3}$

Exercice 3.3.

a) Pas de solution b) Infinité de solutions

c) $x=5$ d) $x=\frac{35}{17}$

e) $x=-\frac{24}{29}$ f) $x=\frac{7}{31}$

g) $x=\frac{1}{6}$ h) $x=\frac{51}{5}$

Exercice 3.4.

a) $x=-\frac{6}{7}$ b) Pas de solution

c) $x=5$ d) $x=48$

e) $x=\frac{85}{8}$ f) $x=\frac{31}{5}$

g) $x=-\frac{18}{13}$ h) $x=-\frac{14}{67}$

i) $x=-\frac{39}{7}$ j) $x=-\frac{245}{2}$

Exercice 3.5.

a) $(x;y)=(-2;5)$ b) Infinité de solutions

c) $(x;y)=(12;5)$ d) Pas de solution

e) $(x;y)=(-1;-2)$ f) $(x;y)=(3;-4)$

Exercice 3.6.

a) $(x; y) = (1; 3)$
b) $(x; y) = (9; 7)$
c) Pas de solution
d) Infinité de solutions
e) $(x; y) = (2; -2)$
f) $(x; y) = (3; 5)$

Exercice 3.7.

a) $(x; y) = (20; 30)$
b) Infinité de solutions
c) $(x; y) = (45; 0)$
d) $(x; y) = (8; 4)$
e) $(x; y) = (1; -1)$
f) Pas de solution
g) $(x; y) = \left(\frac{2652}{211}; \frac{1806}{211}\right)$
h) $(x; y) = \left(\frac{152}{11}; \frac{10}{11}\right)$

Exercice 3.8.

a) $x = 2$ et $x = 3$
b) $x = -1$ et $x = -5$
c) $x = 0$ et $x = 1$
d) $x = -1$, $x = 2$ et $x = 4$
e) $x = 0$, $x = 2$, $x = 1$ et $x = 3$
f) $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$, $x = 3$, $x = -3$, $x = 4$ et $x = -4$

Exercice 3.9.

a) $x = 2$ et $x = -2$
b) $x = 7$ et $= -7$
c) Pas de solution
d) Pas de solution
e) $x = \frac{3}{5}$ et $x = -\frac{3}{5}$
f) $x = 0$ et $x = 5$
g) $x = 0$ et $x = 4$
h) $x = 2$ et $x = -2$

Exercice 3.10.

a) $x = 1$
b) $x = 5$
c) $x = -3$
d) $x = \frac{1}{2}$
e) $x = \frac{3}{4}$
f) $x = -\frac{2}{3}$
g) $x = 4$ et $x = -1$
h) $x = -2$ et $x = -3$
i) $x = -5$ et $x = 3$
j) $x = -6$ et $x = 5$
k) $x = 6$ et $x = 7$
l) $x = 0, x = 3$ et $x = -3$

Exercice 3.11.

a) $x = -3$ et $x = 8$
b) $x = -5$ et $x = 2$
c) $x = 2$
d) Pas de solution
e) $x = -4$ et $x = 11$
f) $x = -4$ et $x = 2$
g) $x = -\frac{1}{5}$ et $x = \frac{3}{4}$
h) $x = 2$ et $x = -1$
i) $x = 1$ et $x = -1$
j) Pas de solution
k) $x = \sqrt{\frac{15}{8}}$ et $x = -\sqrt{\frac{15}{8}}$
l) $x = 0$

Exercice 3.12.

a) $x = 4$, $= -4$, $x = 5$ et $x = -5$

b) $x = 2$ et $x = -2$

c) $x = 0$, $x = 2$ et $x = -2$

d) Pas de solution

e) $x = \sqrt{5}$, $x = -\sqrt{5}$, $x = 2$ et $x = -2$

f) $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 2$

g) $x = 2$, $x = -2$, $x = 3$ et $x = -3$

h) $x = -2$ et $x = 1$

Exercice 3.13.

a) $x = 50$

b) Pas de solution

c) $x = -\dfrac{57}{5}$

d) Pas de solution

e) $x = 3$

f) $x = 21$ et $x = -2$

g) $x = 0$

h) $x = \dfrac{5}{2}$

i) $x = 25$

j) $x = 5$ et $x = 7$

k) $x = \dfrac{4}{25}$

l) $x = 3$

Exercice 3.14. $3x = x + 10$, d'où $x = 5$ cm.

Exercice 3.15. 327, 328 et 329.

Exercice 3.16. 63 litres.

Exercice 3.17. Il pensait à 26.

Exercice 3.18. 4 personnes.

Exercice 3.19. $3,3$.

Exercice 3.20. 126 vacanciers.

Exercice 3.21. $5x + 18 = 8x \Longrightarrow$ Longueur : 30 cm, largeur : 24 cm.

Exercice 3.22. $45 + x = 2(10 + x) \Longrightarrow$ Le père sera deux fois plus âgé que son fils dans 25 ans.

Exercice 3.23. 12.

Exercice 3.24. $22x = 20(x + 1,6) \Longrightarrow$ La hauteur de l'escalier est donc de $3,52$ m.

Exercice 3.25. 6'480 lignes.

Exercice 3.26. Côté du carré : $2,08$ m.

Exercice 3.27. 18 hommes et 22 femmes.

Exercice 3.28. 15 poules et 10 lapins.

Exercice 3.29. $\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 32 \\ 5x + 2y & = & 115 \end{array}\right. \Longrightarrow$ 17 pièces de 5 francs et 15 de 2 francs.

Exercice 3.30. 124 chameaux et 56 dromadaires.

Exercice 3.31. 13 menus enfants et 23 menus adultes.

Exercice 3.32. 325 spectateurs.

Exercice 3.33. Soie : 32 francs le mètre et 24 francs le mètre de drap.

Exercice 3.34. 500 ouvriers pour l'usine A et 250 ouvriers pour l'usine B.

Exercice 3.35. 4 heures pour le réparateur et 8 heures pour le collaborateur.

Exercice 3.36. Le père a 40 ans et son fils 15 ans.

Exercice 3.37. $\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 4x \\ y+6 & = & 3(x+6)-3 \end{array}\right. \Longrightarrow$ 9 et 36 ans.

Exercice 3.38. 12 personnes reçoivent chacune 6 francs.

Exercice 3.39. $\left\{\begin{array}{rcl} (x-6)(y+5) & = & xy \\ (x-16)(y+20) & = & xy \end{array}\right. \Longrightarrow$ 36 classes de 25 élèves, soit 900 élèves au total.

Exercice 3.40. 16 et 17 ou -17 et -16.

Exercice 3.41. 6 et 4.

Exercice 3.42. $\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & 17 \\ x^2+y^2 & = & 85^2 \end{array}\right. \Longrightarrow$ 68 cm et 51 cm.

Exercice 3.43. 9 m.

Exercice 3.44. Il a acheté 21 reproductions coûtant chacune 32 francs.

Exercice 3.45. 2 ans, 2 ans et 9 ans.

3.8 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

3.1 ☐ Résoudre une équation du premier degré à une inconnue.
3.2 ☐ Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par substitution.
3.3 ☐ Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par addition.
3.4 ☐ Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la méthode la plus appropriée.
3.5 ☐ Résoudre une équation du deuxième degré à l'aide de la formule de Viète ou de toute autre méthode.
3.6 ☐ Résoudre une équation bicarrée.
3.7 ☐ Résoudre une équation irrationnelle.
3.8 ☐ Résoudre un problème en le mettant en équation(s).

Chapitre 4

Fonctions

4.1 Introduction

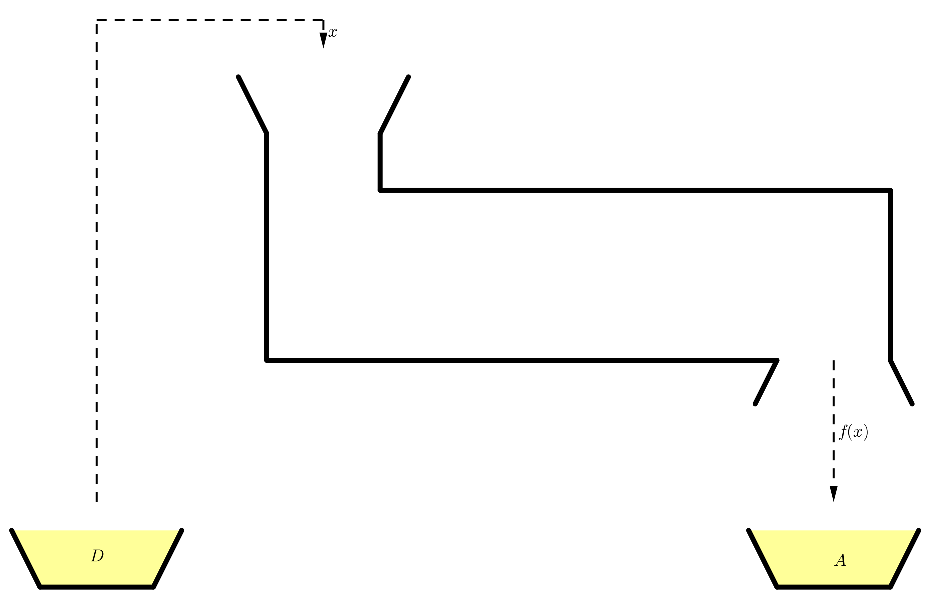
Le terme de *fonction* s'utilise dans le langage courant. Par exemple, le prix d'un billet de train dépend de la longueur du trajet. On dit que le prix est *fonction* de cette longueur. L'aire d'un disque dépend de son rayon. Son aire est donc *fonction* de son rayon.

4.2 Notion de fonction

Définition. On appelle *fonction* toute correspondance qui, à chaque nombre $x \in D$ (ensemble de départ) associe un et un seul nombre $y = f(x) \in A$ (ensemble d'arrivée).

Une fonction se note souvent sous la forme

$$\begin{array}{cccc} f & : & D & \to & A \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$



1. L'élément $y = f(x)$ est appelé *image* de x par f.
2. L'élément x est appelé *préimage* de y par f.
3. Une formule permettant de calculer les images est appelée *expression fonctionnelle* de f.

Exemple. Avec 1 franc suisse, on obtient $0,87$ euro. Le nombre d'euros que l'on obtiendra dépendra du nombre de francs que l'on changera. On dit alors que le nombre d'euros est fonction du nombre de francs suisses.

Il est possible de représenter cette fonction de différentes manières :

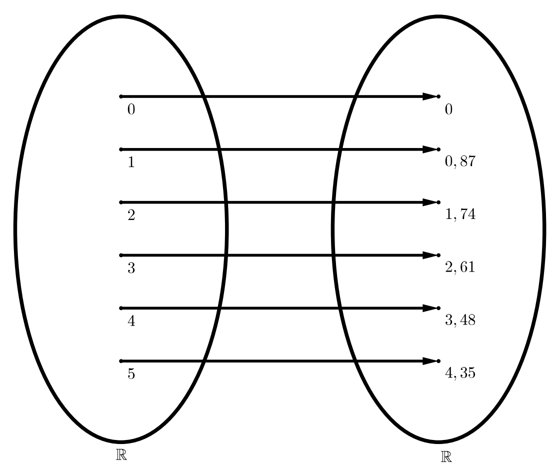
Tableau de valeurs

Le désavantage d'un tableau de valeurs est le fait qu'il ne permet pas de savoir quelles sont les valeurs de f en dehors de celles qui y figurent.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	$0,87$	$1,74$	$2,61$	$3,48$	$4,35$

Diagramme sagittal

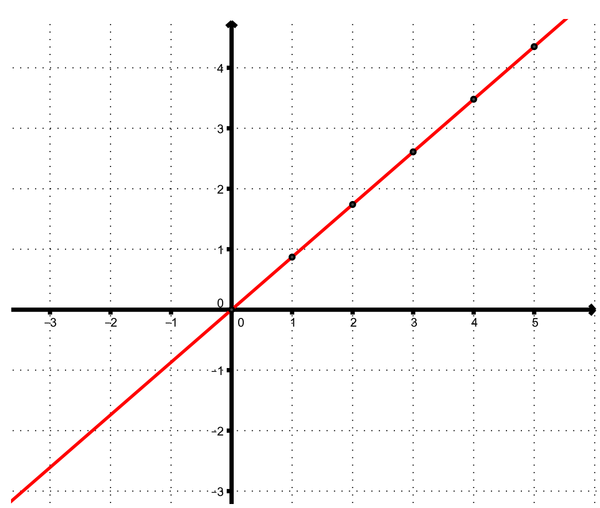
L'inconvénient du diagramme sagittal est le même que celui d'un tableau de valeurs. Il présente cependant l'avantage de mettre en avant les ensembles de départ et d'arrivée et est plus cohérant qu'un tableau de valeurs lorsque les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas numériques.



Graphe

Pour dessiner un graphe, il suffit de choisir une valeur de x, prise dans l'ensemble de départ et de calculer son image $f(x)$. x sera la première coordonnée (*l'abscisse*) du point et $y = f(x)$ sera la deuxième (*l'ordonnée*). Autrement dit, le point sur la verticale correspondant à x sera à hauteur $y = f(x)$. Après avoir calculé les coordonnées de plusieurs points, il suffit de relier les points à la main.

Très pratique et relativement précise, la représentation graphique d'une fonction reste néanmoins restreinte à une région. Ici, par exemple, le graphe ne montre pas comment la fonction se comporte explicitement pour $x < -3$ (x plus petit que -3) et pour $x > 5$ (x plus grand que 5).



Forme verbale

"A un certain nombre, on fait correspondre son produit par $0,87$".

En fonction de la complexité de la correspondance, il peut être fastidieux de comprendre la phrase la décrivant.

Expression fonctionnelle

L'expression fonctionnelle de f s'écrit

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 0,87x \end{array}$$

ou

$$f(x) = 0,87x$$

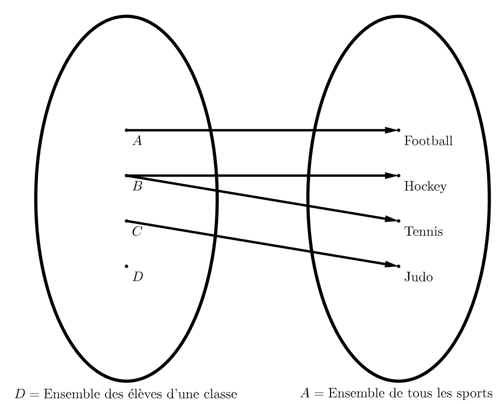
ou

$$y = 0,87x.$$

L'expression fonctionnelle est la meilleure manière de décrire une fonction, car en la connaissant, on peut construire un tableau de valeurs, un diagramme sagittal et un graphe, alors que le contraire n'est pas toujours possible.

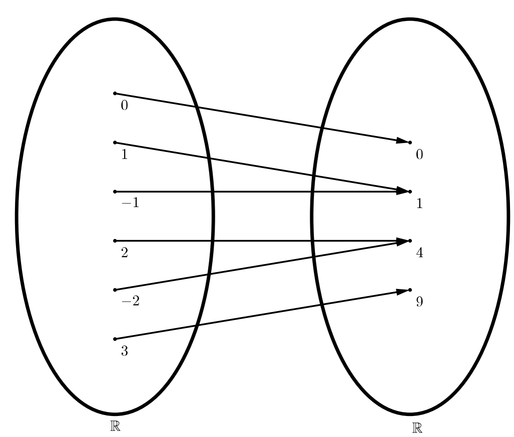
Exemple.

Si D = Ensemble des élèves d'une classe et A = Ensemble des sports, la correspondance ci-contre, qui associe à chaque élève le ou les éventuels sports qu'il apprécie n'est pas une fonction, car deux sports sont associés à B et aucun à D.



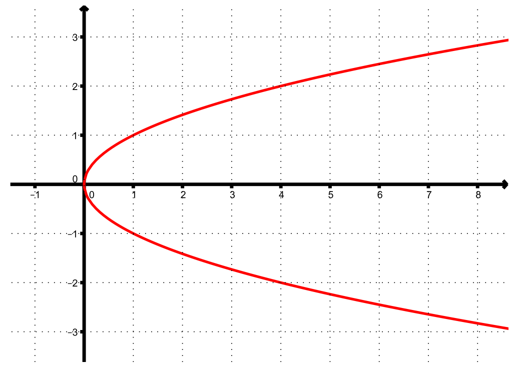
Exemple.

La correspondance ci-contre, qui à chaque nombre réel x associe son carré est une fonction, car tout nombre réel admet un et un seul carré.



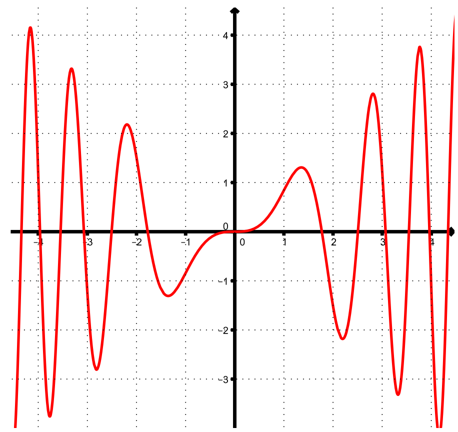
Exemple.

La courbe ci-contre ne représente pas une fonction, car deux images sont associées à $x = 2$ (entre autres).



Exemple.

La courbe ci-contre est une fonction, car chaque $x \in D = \mathbb{R}$ admet une et une seule image.



Exercice 4.1. Soit la fonction f définie par

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2+5 \end{array}.$$

a) Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de f ?

b) Quelle est l'expression fonctionnelle de f ?

c) Quelle est l'image de 3 par f ?

d) Quelle est l'image de -2 par f ?

Exercice 4.2. Compléter les tableaux suivants représentant des fonctions.

a)

3	1	10			x
-9	-3	-30	48	-66	

b)

-10	0	1	5	10	x
95	-5	-4			

c)

4		15	11		x
$1,\overline{3}$	6	5	$3,\overline{6}$	$-1,\overline{6}$	

d)

100	200	300		60	x
20	30	40	55		

e)

9	36		100		x
$1,5$	3	4	5	$4,5$	

f)

	4	1	5	6	x
8	64	1	125		

g)

-1	0	6	$\frac{3}{2}$		x
-5	-3		0	13	

h)

-20	20	0	-25	25	x
15	25	5	20	30	

Exercice 4.3. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}.$$

Calculer

a) $f(-3)$ b) $f(0)$
c) $f(1)$ d) $f(2)$

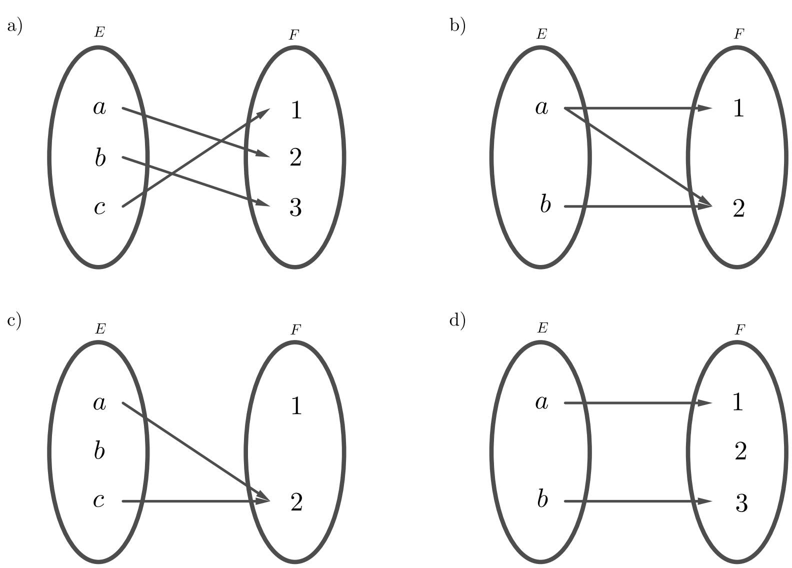
Exercice 4.4. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Déterminer

a) $f(3)$ b) $f(-1)$
c) $f(a)$ d) $f(3a)$
e) $f(k-1)$ f) $f(2k-3)$
g) $f(2k) - 3$ h) $f(2+k) - f(2)$

Exercice 4.5. Représenter graphiquement les fonctions suivantes.

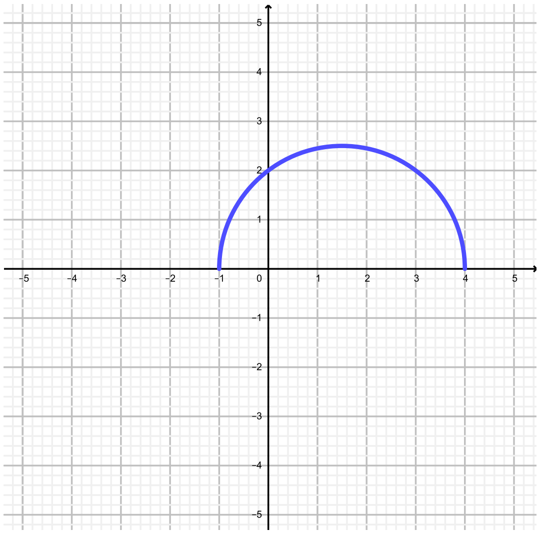
a) $f(x) = -x + 4$ b) $f(x) = -3x$
c) $f(x) = x$ d) $f(x) = -x$
e) $f(x) = -3$ f) $f(x) = |x|$
g) $f(x) = x^2$ h) $f(x) = x^3$
i) $f(x) = x^2 - 1$ j) $f(x) = \sqrt{x}$
k) $f(x) = -x^2 + 4$ l) $f(x) = |x^2 - 4|$

Exercice 4.6. Parmi les diagrammes suivants, lesquels correspondent à des fonctions de E dans F ?

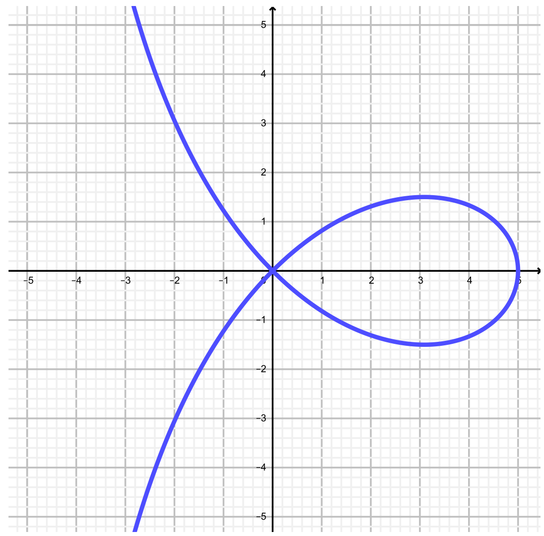


Exercice 4.7. En utilisant la technique de la ligne verticale, determiner si les graphiques suivants représentent des fonctions ou pas.

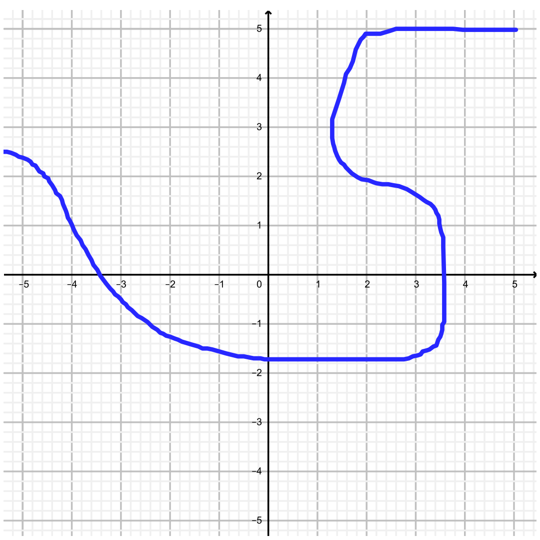
a)



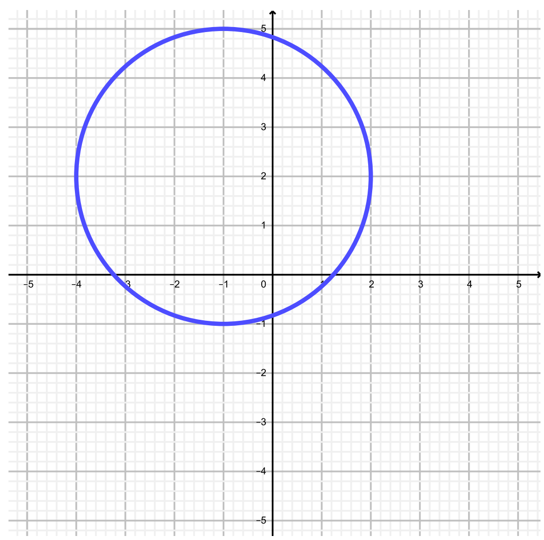
b)



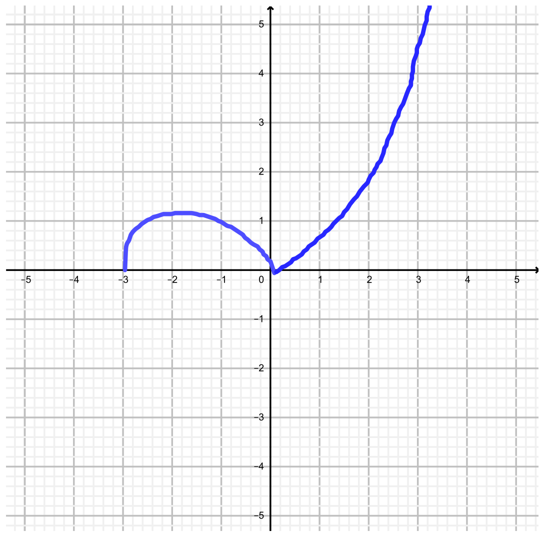
c)



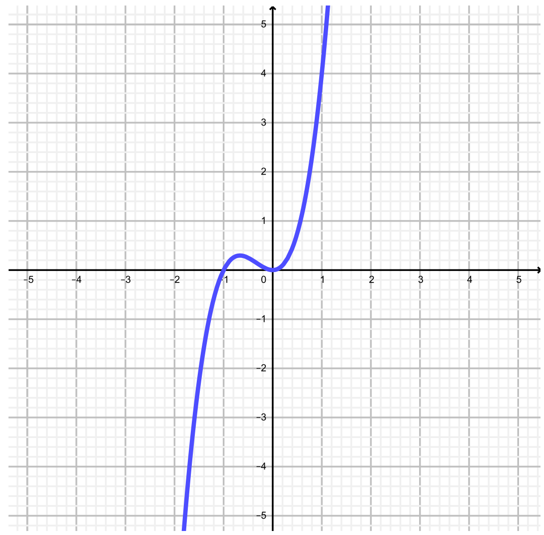
d)



e)



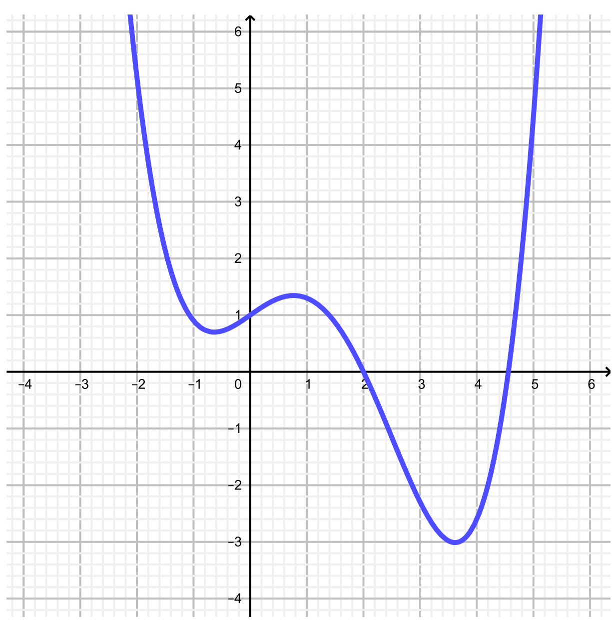
f)



Exercice 4.8. Expliquer pourquoi on ne peut pas trouver une fonction qui, à x envoie y.

x	-2	1	0	2	-1	1
y	-4	3	-3	5	2	4

Exercice 4.9. La figure ci-dessous représente le graphe d'une fonction f.



En observant le graphe, estimer

a) La valeur de $f(0)$.

b) La valeur de $f(-2)$.

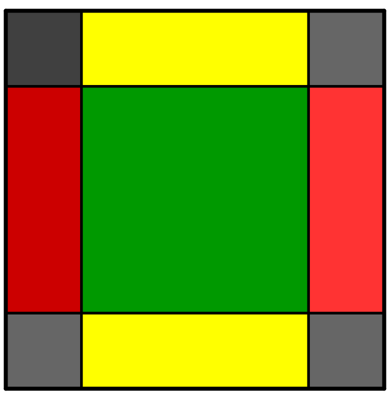
c) Les valeurs de x sachant que $f(x) = 0$.

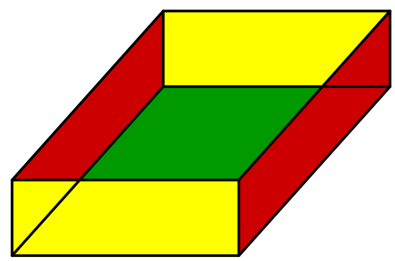
d) Les valeurs de x sachant que $f(x) = 1$.

e) La valeur de a sachant que l'équation $f(x) = a$ ne possède qu'une seule solution ? Quelle est cette solution ?

f) Les valeurs de x sachant que $f(x) = x$.

Exercice 4.10. Une entreprise fabrique des boîtes sans couvercle en découpant quatre carrés identiques de côté x dans les quatre coins d'une plaque métallique de dimensions 10 cm$\times$10 cm, puis en relevant les bords.





a) Calculer le volume de la boîte avec $x = 3$.

b) Déterminer l'expression mathématique qui établit la relation entre la mesure x et le volume $V(x)$ de la boîte.

4.3 Solutions

Exercice 4.1.

a) $D = \mathbb{Z}$ et $A = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^2 + 5$

c) $f(3) = 14$

d) $f(-2) = 9$

Exercice 4.2.

a)

3	1	10	-16	22	x
-9	-3	-30	48	-66	$-3x$

b)

-10	0	1	5	10	x
95	-5	-4	20	95	$x^2 - 5$

c)

4	18	15	11	-5	x
$1,\overline{3}$	6	5	$3,\overline{6}$	$-1,\overline{6}$	$\frac{x}{3}$

d)

100	200	300	450	60	x
20	30	40	55	16	$\frac{x}{10}+10$

e)

9	36	64	100	81	x
$1,5$	3	4	5	$4,5$	$\frac{\sqrt{x}}{2}$

f)

2	4	1	5	6	x
8	64	1	125	216	x^3

g)

-1	0	6	$\frac{3}{2}$	8	x
-5	-3	9	0	13	$2x - 3$

h)

-20	20	0	-25	25	x
15	25	5	20	30	$\lvert x + 5\rvert$

Exercice 4.3.

a) $f(-3) = -\dfrac{4}{5}$

b) $f(0) = \dfrac{1}{4}$

c) $f(1) = 0$

d) $f(2)$ n'est pas défini

Exercice 4.4.

a) 6

b) 6

c) $a^2 - 2a + 3$

d) $9a^2 - 6a + 3$

e) $k^2 - 4k + 6$

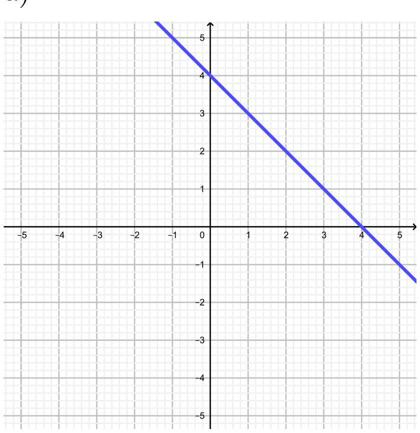
f) $4k^2 - 16k + 18$

g) $4k^2 - 4k$

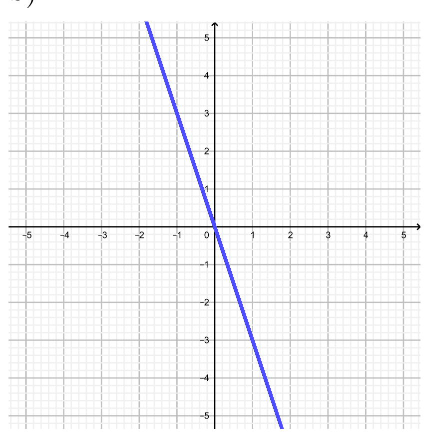
h) $k^2 + 2k$

Exercice 4.5.

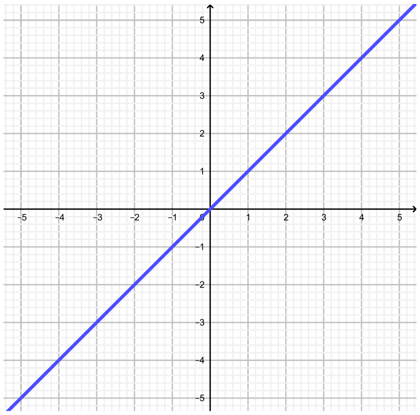
a)



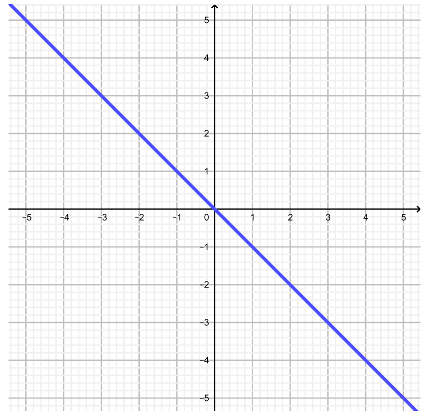
b)



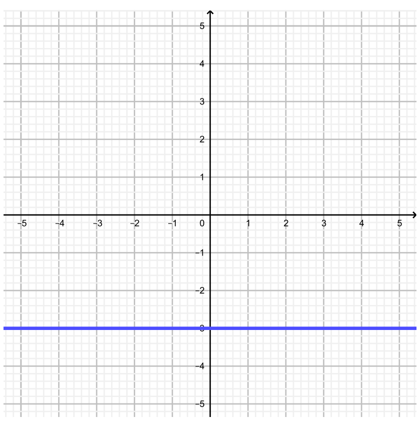
c)



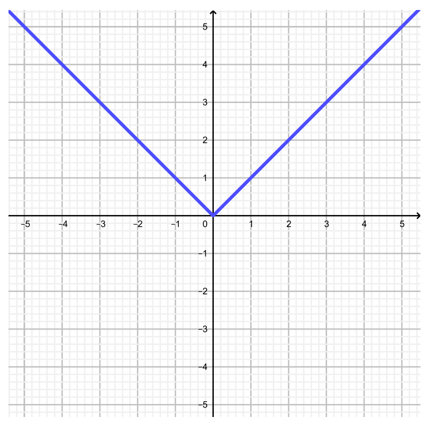
d)



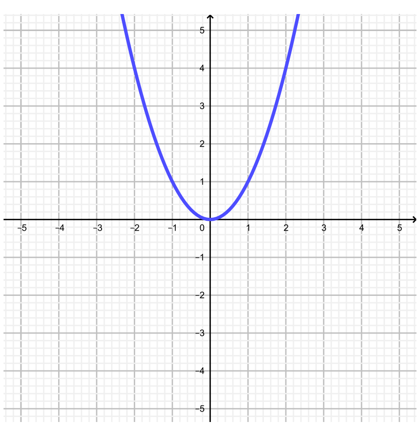
e)



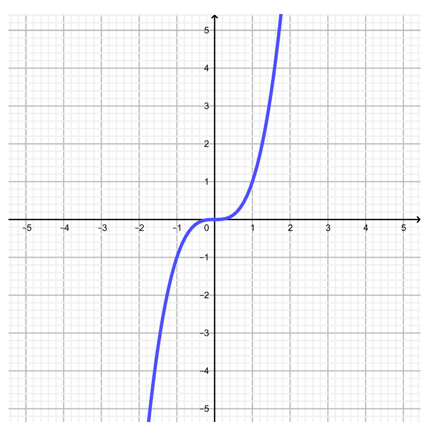
f)



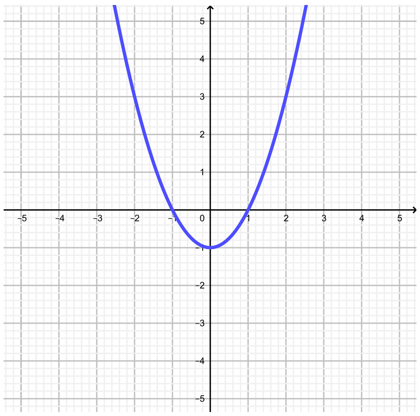
g)



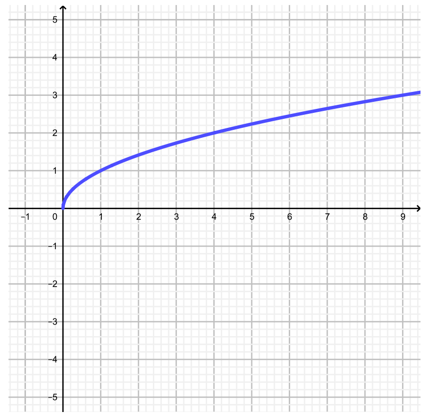
h)



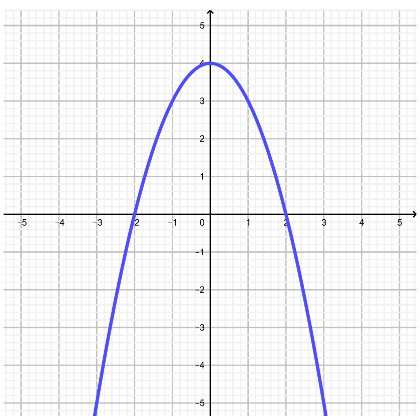
i)



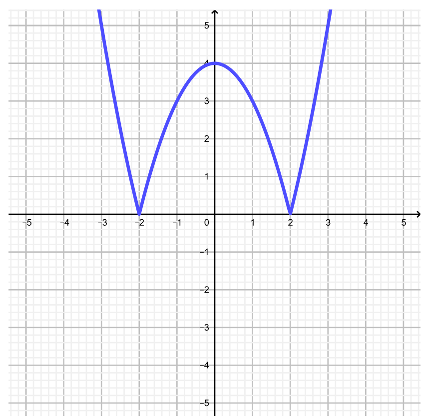
j)



k)



l)



Exercice 4.6. a) et d).

Exercice 4.7.

a) Oui	b) Non
c) Non	d) Non
e) Oui	f) Oui

Exercice 4.8. 1 a deux images différentes.

Exercice 4.9.

a) $f(0) = 1$	b) $f(-2) \cong 5$
c) $x = 2$ et $x \cong 4,56$	d) $x \cong -1, x = 0, x \cong 1,4$ et $x \cong 4,75$
e) $a = -3$ et $x \cong 3,62$	f) $x \cong 1,19$ et $x = 5$

Exercice 4.10.

a) $V = 48$ cm^3.

b) $V(x) = x \cdot (10 - 2x)^2$.

4.4 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

4.1 ☐ Maîtriser le vocabulaire des fonctions.
4.2 ☐ Evaluer une fonction pour différentes valeurs de x.
4.3 ☐ Représenter le graphe d'une fonction.
4.4 ☐ Lire le graphe d'une fonction.
4.5 ☐ Déterminer si une correspondance donnée est une fonction.

Chapitre 5

Fonctions du premier degré

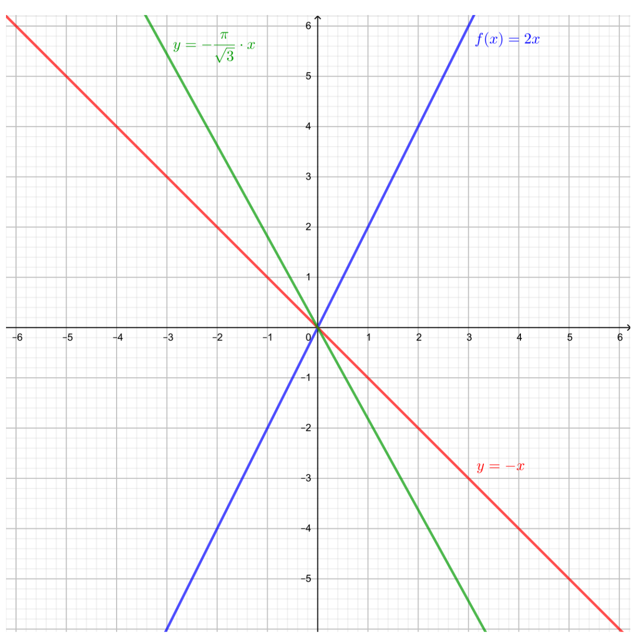
Définition. Une fonction est dite du *premier degré* si le degré de son expression fonctionnelle vaut 1. On en distingue deux types.

5.1 Fonctions linéaires

Définition. Une fonction est dite *linéaire* s'il y a uniquement un facteur de proportionnalité entre x et $f(x)$. Son expression est donc de la forme

$$\boxed{f(x) = p \cdot x \text{ ou } y = p \cdot x \text{ avec } p \in \mathbb{R}.}$$

Exemple. $f(x) = 2x$, $y = -x$, $y = -\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot x$ sont des fonctions linéaires. Graphiquement, une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine. La valeur de p détermine la *pente* de cette droite.



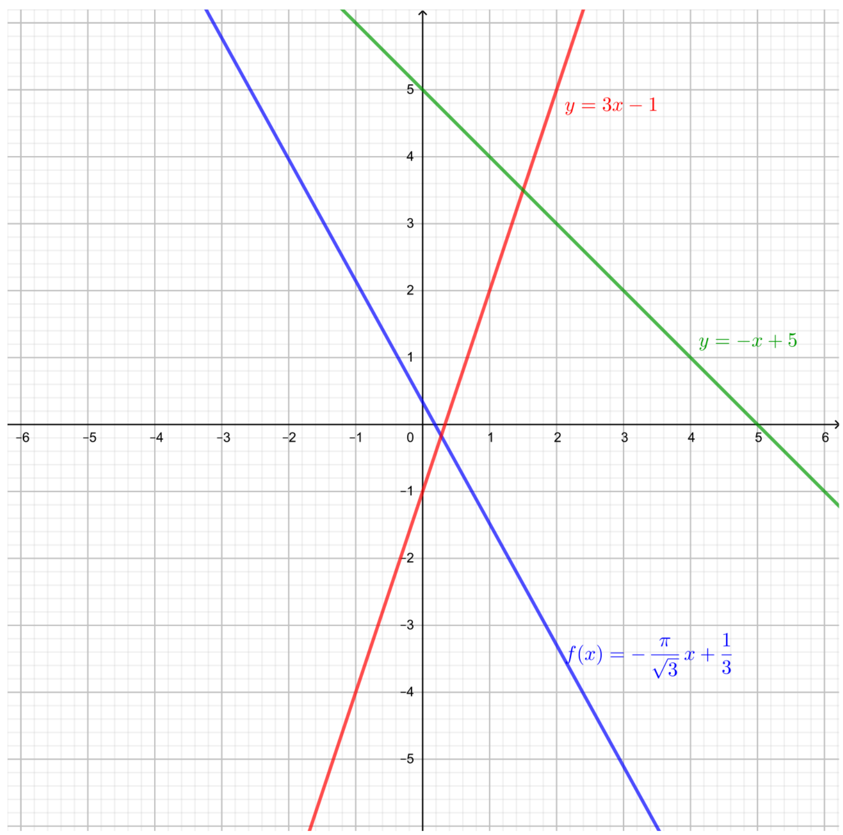
5.2 Fonctions affines

Définition. Une fonction est dite *affine* si son expression fonctionnelle est de la forme

$$\boxed{f(x) = px + h \text{ ou } y = px + h \text{ avec } p, h \in \mathbb{R}.}$$

Exemple. $f(x) = 3x - 1$, $y = -x + 5$, $y = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{3}$ sont des fonctions affines.

Graphiquement, une fonction affine est une droite qui ne passe pas par l'origine. La valeur de p détermine la *pente* et celle de h *l'ordonnée à l'origine* (c'est-à-dire la hauteur à laquelle la droite coupe l'axe O_y).

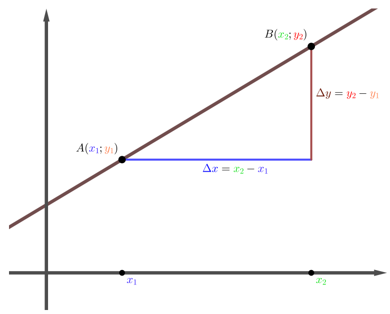


Exercice 5.1. Représenter graphiquement les fonctions ci-dessous.

a) $y = 2x$	b) $y = -2x$
c) $y = \frac{1}{2}x$	d) $y = -1$
e) $y = x + 3$	f) $y = 2x + 1$
g) $y = -2x - 3$	h) $y = 4x - 6$
i) $x + y = 0$	j) $2(x - y) = 6$

5.3 Pente d'une droite

Définition. La *pente* d'une droite est le rapport entre la différence de hauteur et la différence de longueur entre deux points de la droite.



Théorème. *Si une droite passe par les deux points* $(x_1; y_1)$ *et* $(x_2; y_2)$*, alors la pente est définie par*

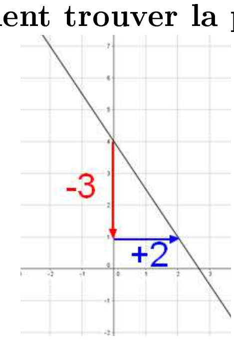
$$\boxed{p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.}$$

Remarque.

La pente d'une droite peut également s'exprimer en pourcent, comme c'est le cas des panneaux routiers. Dans le cas d'une pente de 10%, cela signifie que sur une distance horizontale de 100 m, on monte ou descend d'une hauteur de 10 m.

Exemple.

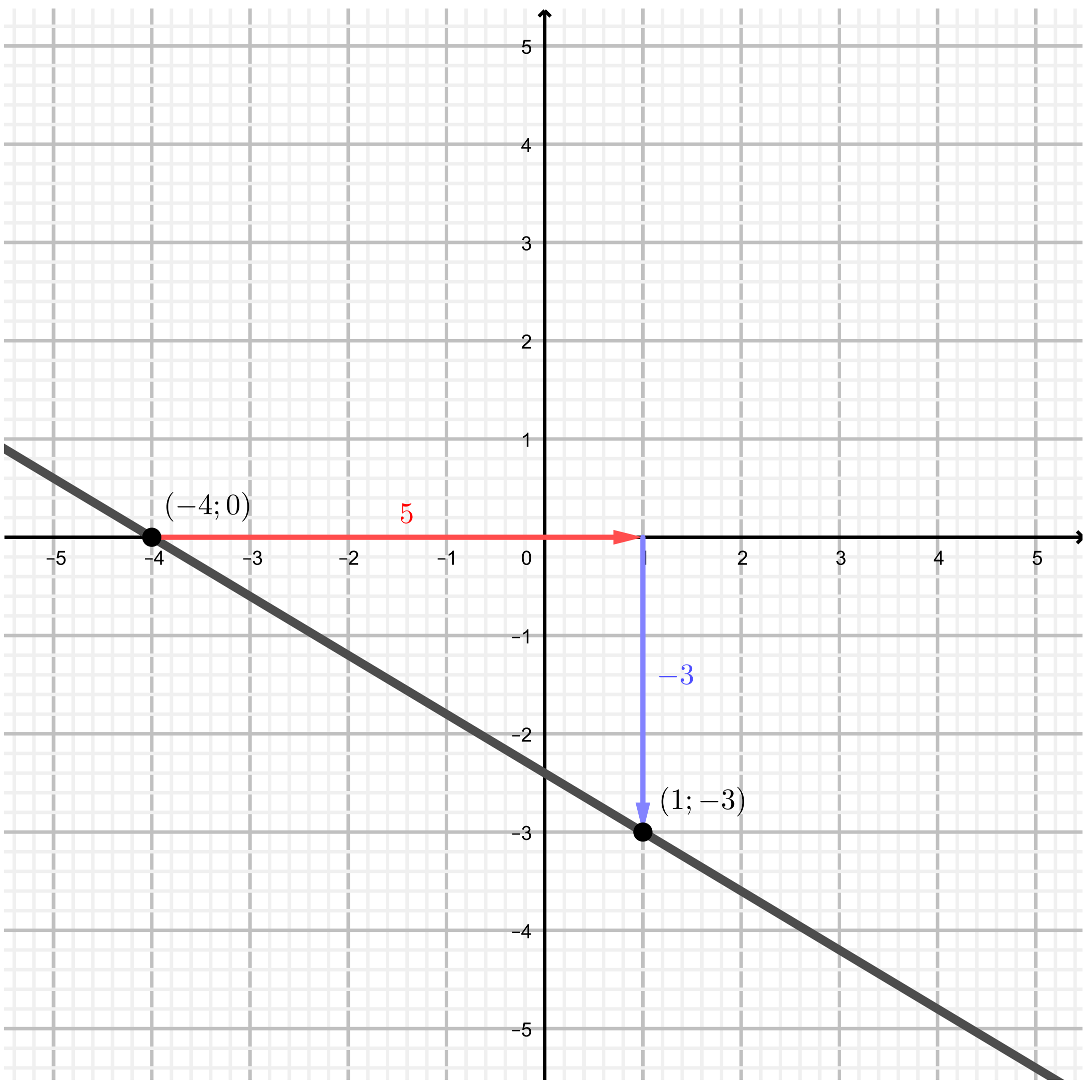
1. **Comment trouver la pente d'une droite à partir de son graphe ?**



On choisit deux points sur la droite et l'on déduit la différence de hauteur et la différence horizontale entre les deux points. Dans l'exemple ci-contre, $\Delta y = -3$ et $\Delta x = 2$. Donc la pente est donnée par $p = -\frac{3}{2}$.

2. **Comment trouver la pente d'une droite à partir de deux de ses points ?**
Soient $(1;-3)$ et $(-4;0)$, deux points d'une droite. Sa pente vaudra donc

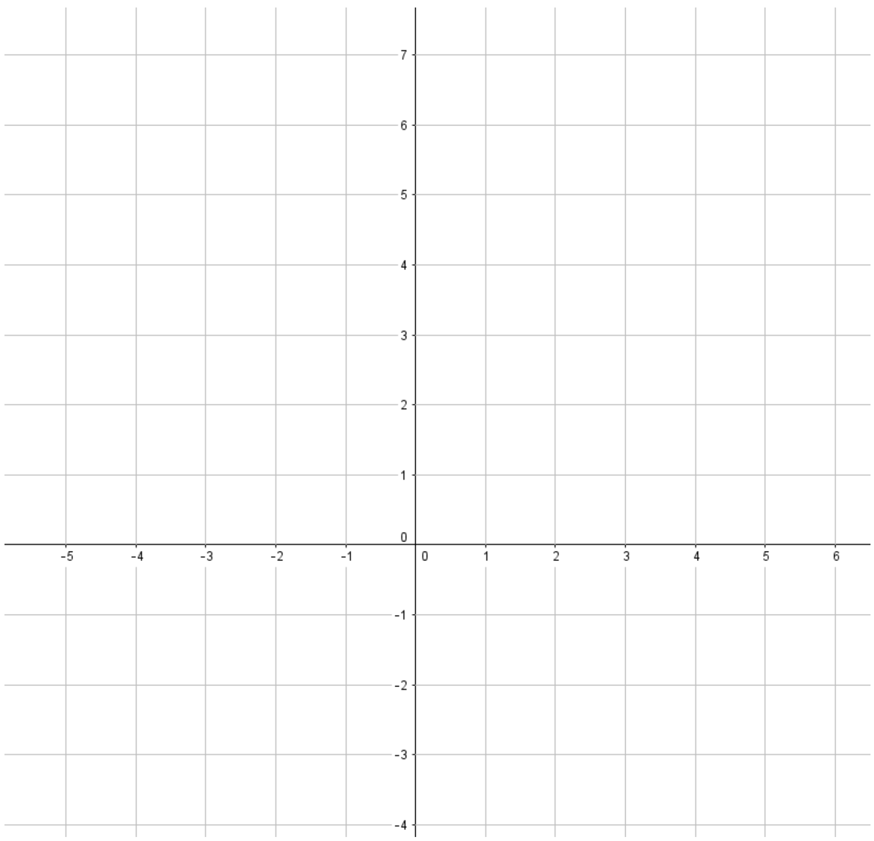
$$p=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-(-3)}{-4-1}=\frac{3}{-5}=-\frac{3}{5}.$$



5.4 Graphe

Avant de tracer une droite à partir de son équation, il faut tout d'abord veiller à ce que l'équation de la droite soit exprimée sous la forme explicite $y = px + h$. Ensuite on identifie l'ordonnée à l'origine (qui nous donne un premier point) puis on utilise la pente afin de trouver un second point. Il suffit finalement de les relier pour obtenir la droite. Une alternative consiste à trouver deux points à l'aide d'un tableau de valeurs.

Exemple. Tracer le graphe des droites d'équations $y = -\frac{5}{3}x + 2$ et $y - 2x = 0$.



Exercice 5.2. Déterminer la pente de chacune des droites ci-dessous, puis les représenter graphiquement.

a) $y = x + 3$ b) $y = 2x - 2$

c) $y = 3x + 2$ d) $y = \frac{1}{2}x + 2$

e) $y = -x + 4$ f) $y = -2x - 3$

g) $y = -3x - 1$ h) $x + 2y = 4$

5.5 Equation d'une droite

Si l'on dispose du graphe d'une fonction du premier degré, il suffit de "compter les petits carrés" pour trouver la pente p et de regarder où la droite coupe l'axe O_y afin d'obtenir l'ordonnée à l'origine h.

Que faire si l'on ne possède pas de graphe précis ? Ou pire encore, si l'on n'a aucun graphe ? Pour trouver une droite, connaître deux points est suffisant. Grâce à eux on peut tout d'abord déterminer la pente $p = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (revoir la section 5.3). Finalement, en reprenant l'équation de base d'une fonction affine $y = px + h$, on peut remplacer la valeur de p par celle trouvée auparavant et celles de x, y par les coordonnées d'un point connu. On obtient ainsi une équation à une inconnue qu'il suffit de résoudre pour trouver la valeur de h.

Exemple. Trouver l'équation de la droite passant par les points $(-2;2)$ et $(8;-1)$.

Il est possible de calculer la pente d'une telle droite.

$$p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-2}{8-(-2)} = -\frac{3}{10}.$$

On sait que l'équation de la droite sera de la forme

$$y = px + h.$$

Comme $p = -\frac{3}{10}$, l'équation ci-dessus s'écrit

$$y = -\frac{3}{10}x + h.$$

Comme la droite passe par le point $(8;-1)$, cela signifie que si $x = 8$, alors $y = -1$. On peut donc remplacer x et y par ces valeurs afin de pouvoir trouver la valeur de h.

$$\begin{array}{rcl|l}
-1 & = & -\frac{3}{10}\cdot 8 + h & \text{Calculs} \\
-1 & = & -\frac{24}{10} + h & \\
-1 & = & -\frac{12}{5} + h & \cdot 5 \\
-5 & = & -12 + 5h & +12 \\
7 & = & 5h & :5 \\
h & = & \frac{7}{5}. &
\end{array}$$

Donc l'équation de la droite est

$$y = -\frac{3}{10}x + \frac{7}{5}.$$

Remarque. On aurait obtenu le même résultat si l'on utilisait le point $(-2;2)$ plutôt que $(8;-1)$. L'important est de prendre un point de la droite. On aurait également pu obtenir l'équation de cette droite en résolvant le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} p\cdot(-2)+h & = & 2 \\ p\cdot 8 + h & = & -1 \end{array}\right. .$$

Exercice 5.3. Représenter les graphes des fonctions affines f telles que

a) $f(-1) = 2$ et la pente du graphe de f vaut -2.

b) $f(0) = -1$ et la pente du graphe de f vaut $\frac{3}{2}$.

c) $f(2) = 0$ et la pente du graphe de f vaut $-\frac{3}{5}$.

d) $f(4) = 5$ et la pente du graphe de f vaut 0.

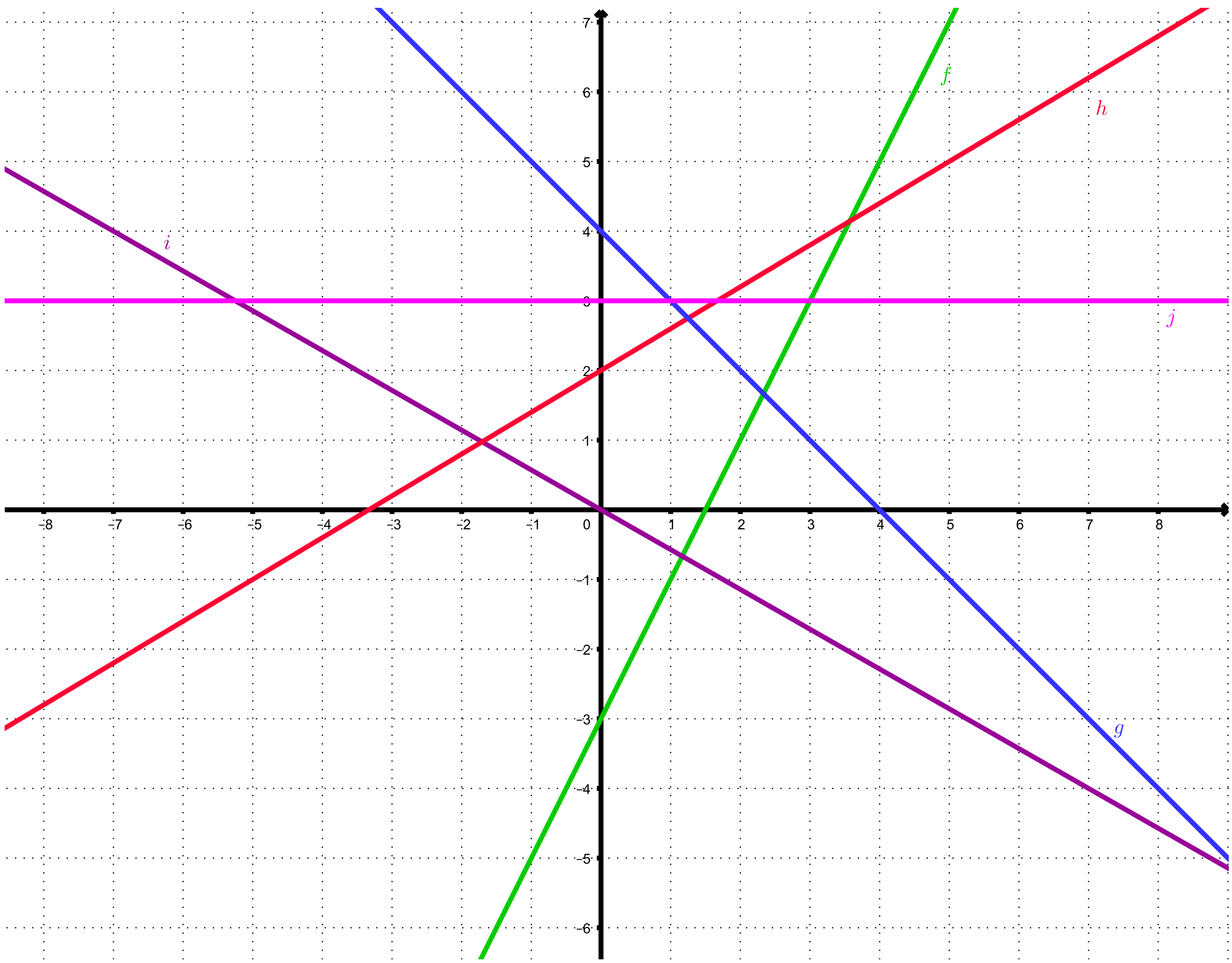
Exercice 5.4. Déterminer l'expression fonctionnelle de la droite de pente -3 passant par le point $A(4;7)$.

Exercice 5.5. Déterminer l'expression fonctionnelle de la droite passant par les points A et B dans chacun des cas suivants.

a) $A(1;5)$ et $B(6;20)$ b) $A(-1;-9)$ et $B(3;11)$

c) $A(-8;-12)$ et $B(4;-3)$ d) $A(-4;1)$ et $B(10;-7)$

Exercice 5.6. Trouver l'expression fonctionnelle des cinq fonctions dont les graphes sont les droites ci-dessous.



Exercice 5.7. Trouver l'abscisse du point $P(x; 13)$ sachant que les points P, $Q(-1; 7)$ et $R(3; -1)$ sont alignés.

5.6 Droites particulières

Certaines droites se démarquent par des caractéristiques particulières.

1. **Les droites horizontales**
   Ce sont des droites qui ont une pente de 0. Leurs équations sont donc de la forme $y = 0 \cdot x + h$, par conséquent, $y = h$.

Exemple.

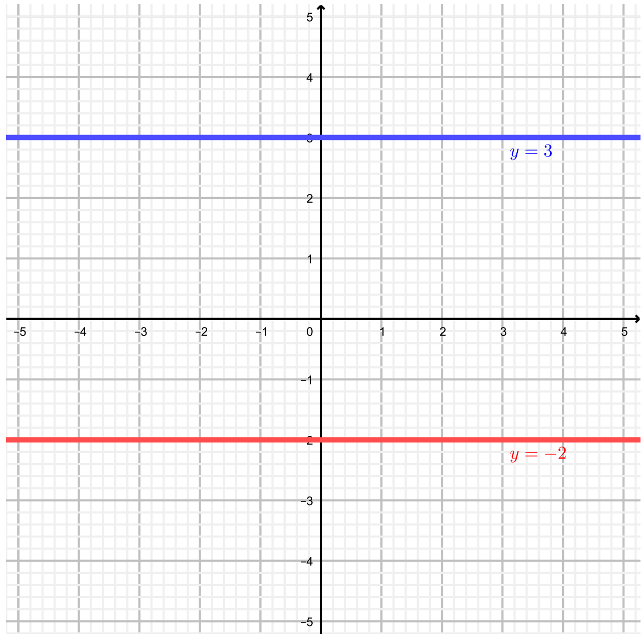


FIGURE 5.1 – Graphe de $y = 3$ et $y = -2$.

2. **Les droites verticales**
   Ce sont des droites ayant une pente infinie. Tous les points d'une telle droite possèdent la même abscisse. L'équation d'une telle droite est de la forme $x = n$.

   Exemple.

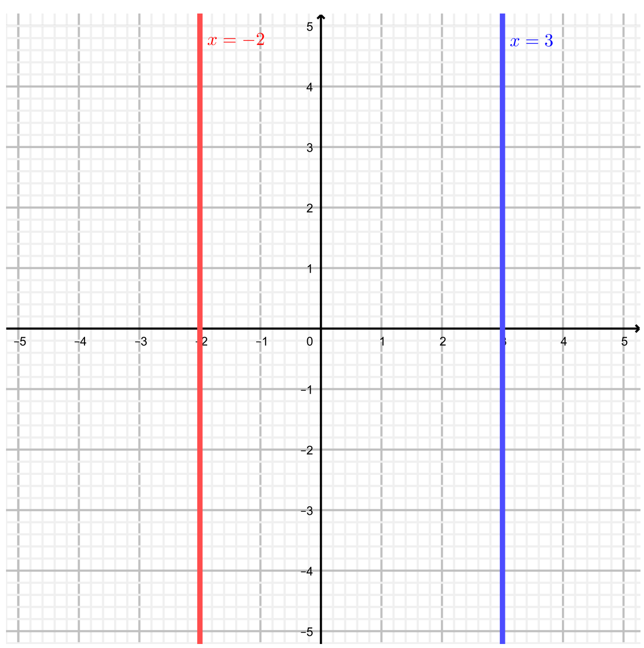
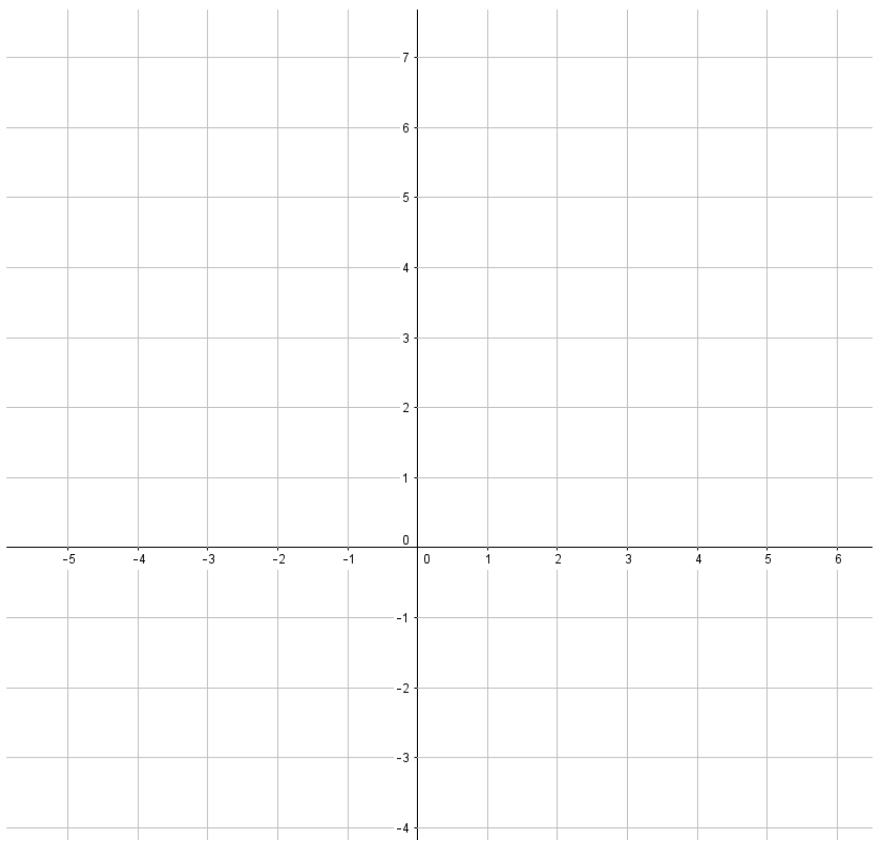


FIGURE 5.2 – Graphe de $x = 3$ et $x = -2$.

3. **Les droites parallèles**
   Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont exactement la même pente.

   Exemple. Est-ce que ces deux droites sont parallèles ?

$$y = 3x + 2 \text{ et } 9x - 3y = -12.$$



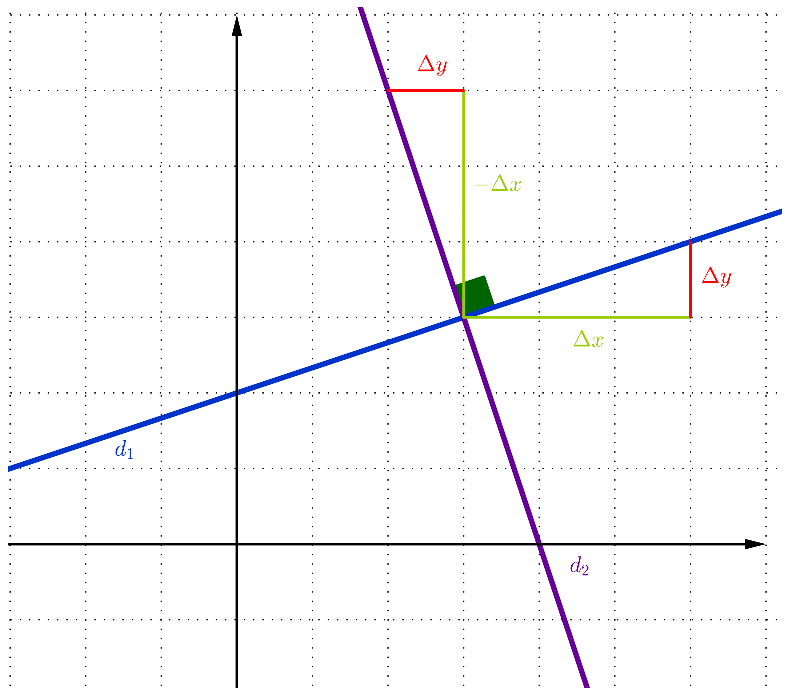
4. **Les droites perpendiculaires**
   Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leur pente vaut -1.

   Preuve. d_1 a pour pente

$$p_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Comme d_2 est perpendiculaire à d_1, on peut obtenir d_2 par rotation de d_1 de 90° (dans le sens antihoraire).

Ainsi, Δx devient un accroissement vertical négatif et Δy un accroissement horizontal positif.



d_2 a donc pour pente

$$p_2 = \frac{-\Delta x}{\Delta y}.$$

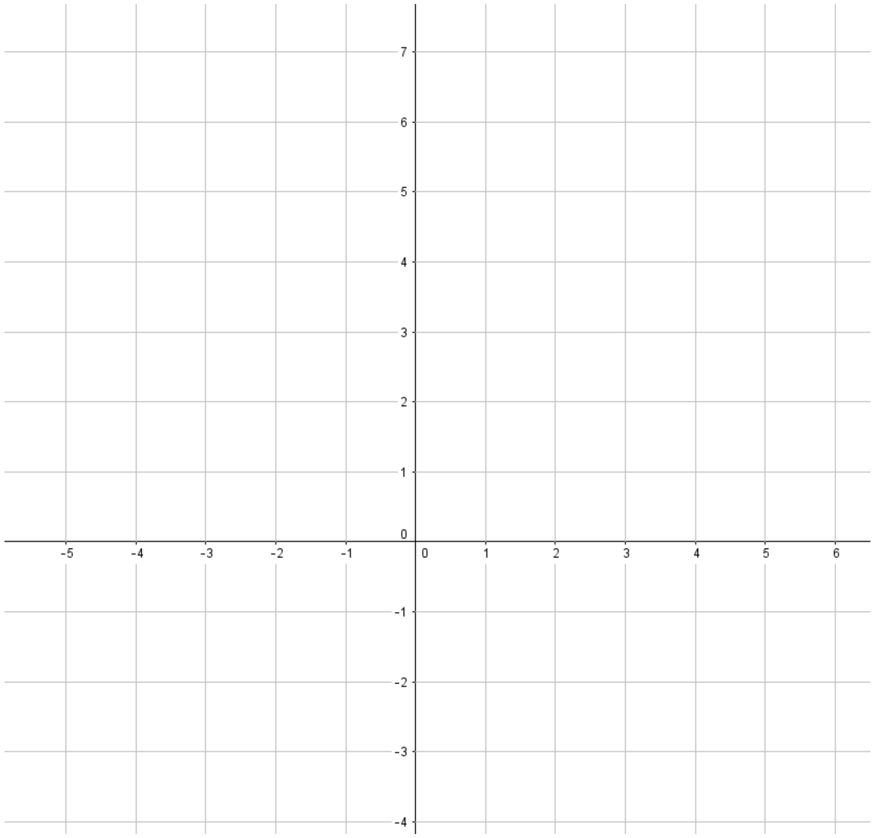
Il s'ensuit que

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{-\Delta x}{\Delta y} = -1.$$

□

Exemple. Est-ce que ces deux droites sont perpendiculaires ?

$$2x + 3y = 1 \text{ et } 6x - 4y - 1 = 0.$$



Remarque. Si une droite a une pente de p et que l'on désire trouver la pente d'une droite perpendiculaire, on peut appliquer la méthode de "*l'opposé de l'inverse*" ou "*l'inverse de l'opposé*". On obtient ainsi $-\frac{1}{p}$ comme pente de la droite perpendiculaire cherchée.

Exercice 5.8. Tracer les droites suivantes : $d_1 : x = 4$ et $d_2 : y = -2$.

Exercice 5.9. Déterminer l'équation

a) De la droite parallèle à $y = -3x + 2$ passant par l'origine.

b) De la droite parallèle à $y = \frac{3x+5}{2}$ passant par le point $A(6; 1)$.

c) De la droite perpendiculaire à $y = -3x + 2$ passant par l'origine.

d) De la droite perpendiculaire à $y = 2x$ passant par le point $B(4; 2)$.

Exercice 5.10. Trouver l'équation de la droite passant par le point $P(3; -5)$ et parallèle à la droite d'équation $2x + 2y = 4$.

Exercice 5.11. Trouver l'équation de la droite passant par le point $P(3; -5)$ et perpendiculaire à la droite $3x + 2y = 6$.

5.7 Intersection de deux droites

Afin d'illustrer l'utilité des intersections de droites, commençons avec un exemple concret.

Exemple. Pour effectuer le trajet La Chaux-de-Fonds – Neuchâtel en train, différents types d'offres sont proposées. Nous en retiendrons trois :

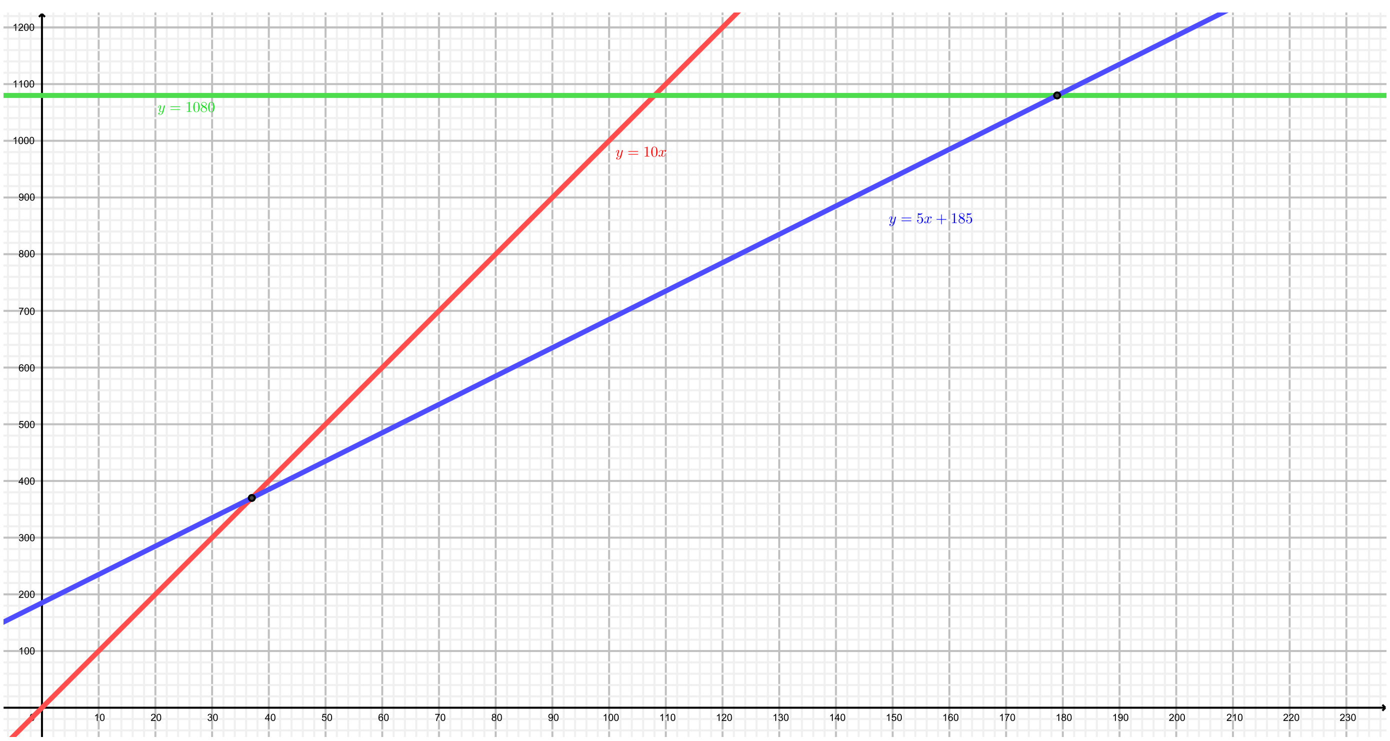
1. Prix plein à chaque fois : 10 francs par trajet.
2. Demi-tarif : 185 francs puis 5 francs par trajet.
3. Abonnement annuel : 1'080 francs.

Dès lors, il est intéressant de choisir le forfait le plus rentable. Autrement dit, à partir de combien de trajets par année devrions-nous prendre un forfait plutôt qu'un autre ? Pour répondre à cette question, transformons tout d'abord ces forfaits en expressions fonctionnelles.

Posons
$x =$ "nombre de trajets" et $y =$ "somme dépensée".
Ces trois types d'offre peuvent s'exprimer à l'aide des expressions fonctionnelles suivantes.

1. $y = 10x$
2. $y = 5x + 185$
3. $y = 1'080$

Voici leurs représentations graphiques respectives :



Les intersections de ces droites représentent le moment précis où un tarif deviendra plus favorable qu'un autre. Par conséquent, si l'on arrive à déterminer l'intersection entre deux droites, on saura le nombre de trajets limite pour lequel un forfait est plus profitable qu'un autre.

Déterminons algébriquement les coordonnées des points d'intersection. Le point d'intersection entre deux droites est le point dont les coordonnées satisfont les deux équations de droites en question. Autrement dit, "les coordonnées où les droites sont identiques". Calculons pour commencer le point d'intersection entre le prix plein et le demi-tarif.

Il faut donc résoudre le système d'équation à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 10x \\ y & = & 5x + 185 \end{array}\right. .$$

En le résolvant par substitution (de y) ou par addition/soustraction, on obtient :

$$(x; y) = (37; 370).$$

Ce qui signifie qu'après 37 trajets, le demi-tarif coûte moins cher que le tarif 1. Pour exactement 37 trajets, peu importe le tarif 1 ou 2, nous aurons payé exactement 370 francs. De manière similaire, nous pouvons calculer le point d'intersection entre le demi-tarif et l'abonnement. Nous obtenons le point $(179; 1'080)$. Donc à partir de 179 trajets par année, il est préférable d'avoir l'abonnement.

Exercice 5.12. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des fonctions f et g dans chacun des cas suivants.

a) $f(x) = -x + 5$ et $g(x) = 3x + 1$

b) $f(x) = 3x - 6$ et $g(x) = -2x + 4$

c) $f(x) = 2x - 4$ et $g(x) = -x + 5$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$ et $g(x) = -\frac{2}{3}x - 2$

e) $f(x) = -2x + 8$ et $g(x) = 12$

f) $f(x) = -7x$ et $g(x) = -3x$

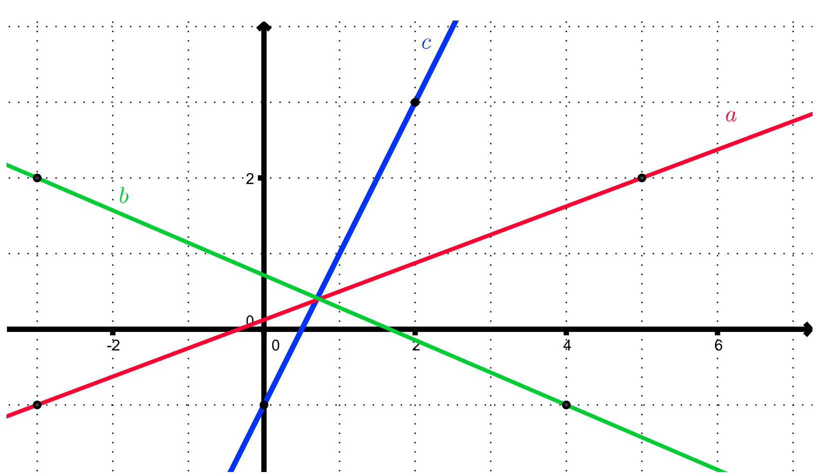
g) $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = -2x - 3$

h) $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = 3x + 4$

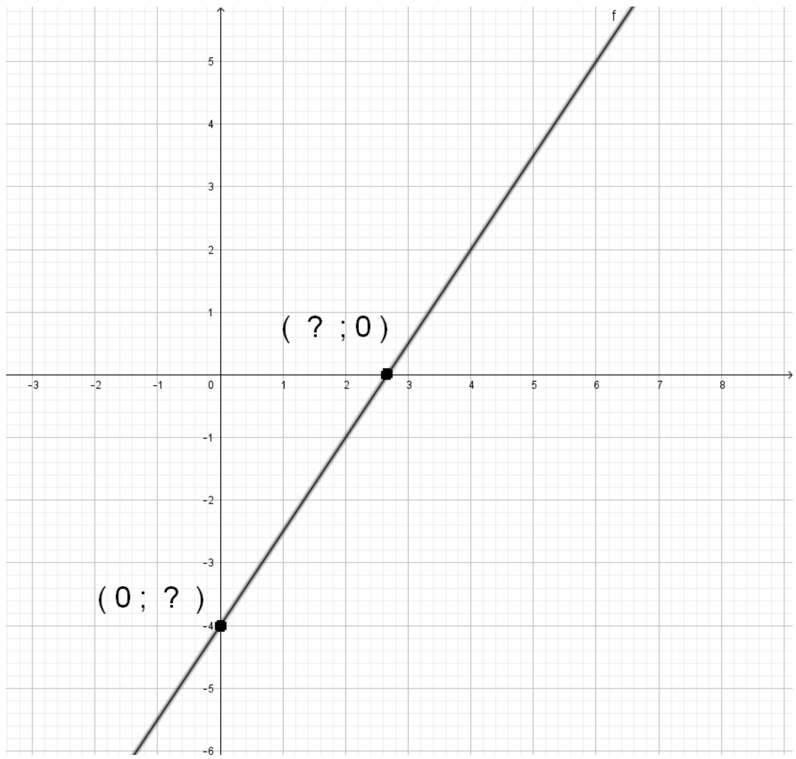
Exercice 5.13. Trouver de manière algébrique les coordonnées du point d'intersection entre les droites d_1 et d_2 ci-dessous.

$$d_1 : -3x + 2y = 6 \text{ et } d_2 : 2x - 8y - 16 = 0.$$

Exercice 5.14. Les trois droites a, b et c se coupent-elles en un point ou forment-elles un triangle ?



5.8 Intersections d'une droite avec les axes



1. **Intersection avec l'axe O_x**

   Lorsque la droite touche l'axe O_x, alors la coordonnée y du point d'intersection de la droite avec l'axe O_x vaut 0. Ainsi, pour déterminer algébriquement les coordonnées ce point d'intersection on pose $y = 0$ et on résout l'équation pour trouver x.

   Exemple. Soit la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x - 4$.

   On pose $y = 0$.

   On obtient donc

   $$\begin{array}{rcl} 0 & = & \frac{3}{2}x - 4 \\ x & = & \frac{8}{3}. \end{array}$$

   Le point d'intersection est donc $\left(\frac{8}{3}; 0\right)$.

2. **Intersection avec l'axe O_y**

   En suivant un raisonnement similaire, il suffit de poser $x = 0$ et de trouver la valeur de y.

   Exemple. Soit la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x - 4$. On pose $x = 0$.

   On obtient donc

   $$y = \frac{3}{2} \cdot 0 - 4 = -4.$$

   Le point d'intersection est donc $(0; -4)$.

Exercice 5.15. Déterminer les coordonnées des points d'intersection avec les axes de chacune des droites suivantes.

a) $y = 2x - 4$ b) $3x + 5y = 6$

5.9 Applications

Exercice 5.16. Un club de sport propose deux tarifs.
Option A :
Le supporter paie 6,50 francs par match.
Option B :
Le supporter paie une carte de supporter à 28 francs puis seulement 3 francs par match.

a) Compléter le tableau ci-dessous.

Nombre de matchs	4	6		
Prix payé avec l'option A			65	
Prix payé avec l'option B				73

b) Exprimer, pour chaque option, le prix payé par le supporter en fonction du nombre de matchs x.

c) Dessiner dans un même système d'axes les droites représentant le prix payé avec les options A et B.

d) a) Déterminer graphiquement pour combien de matches le prix à payer sera-t-il le même pour les deux options.
   b) Vérifier par calcul le résultat trouvé précédemment.

Exercice 5.17. On obtient la température en degrés Celsius par rapport à une valeur en Fahrenheit par la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}.$$

a) A quelle température exprimée en degrés Celsius correspond une température de 36 Fahrenheit ?

b) A quelle température lit-on la même valeur sur les deux échelles ?

c) Pour quelle température la valeur en Fahrenheit est-elle le double qu'en Celsius ?

Exercice 5.18. En Suisse, l'espérance de vie à la naissance des femmes peut être modélisée par la formule

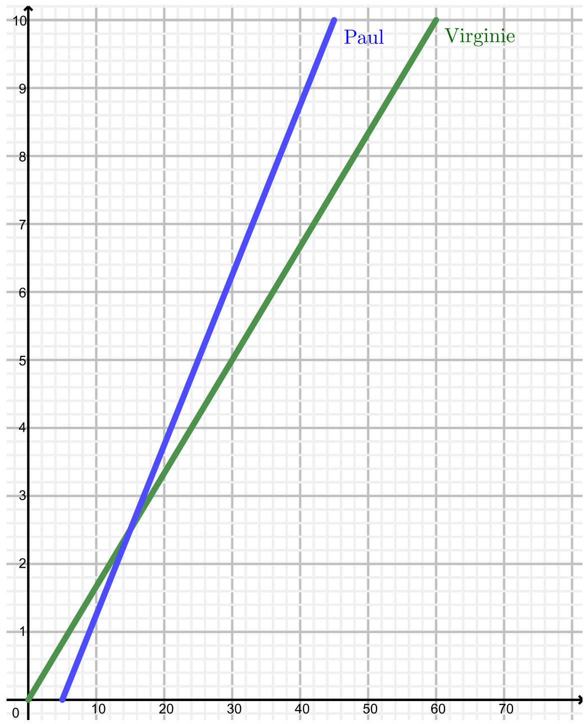
$$e_0 = 0,4a - 717$$

où a représente l'année d'observation et e_0 l'espérance de vie à l'année a.

a) Quelle était l'espérance de vie d'une femme née en 1900 ?

b) En quelle année l'espérance de vie des femmes était-elle de 65 ans ?

Exercice 5.19. Paul et Virginie sont inscrits aux 10 km de Lausanne. Virginie part 5 minutes avant Paul, comme le montre le graphe ci-dessous.



a) Qui est arrivé en premier ? Avec combien de minutes d'avance ?

b) Quelle distance les sépare lorsque Paul franchit la ligne d'arrivée ?

c) Quelles ont été leur vitesse respective ?

Exercice 5.20. Une dette de 7200 francs est amortie à raison de 300 francs par mois. Etablir une formule permettant de représenter l'état de la dette $C(k)$ en fonction de la durée écoulée ($k \in \mathbb{R}$).

Exercice 5.21. Dans un magasin, les cartouches d'encre pour imprimante sont vendues 15 francs la pièce. Sur internet, elles sont vendues 10 francs la pièce, mais on paie 40 francs de frais de livraison quel que soit le nombre de cartouches achetées.

a) Représenter dans un même repère les 2 fonctions déterminant le prix à payer pour x cartouches.
On prendra 1 unité pour 1 cartouche achetée sur l'axe des x et 1 unité pour 10 francs sur l'axe des y.

b) Par lecture sur le graphique :
   a) Déterminer le prix le plus avantageux pour l'achat de six cartouches.
   b) Quelle formule est la plus avantageuse si l'on dispose de 80 francs ?
   c) A partir de combien de cartouches le prix sur internet est-il inférieur au prix en magasin ?

c) Vérifier par calcul les réponses obtenues ci-dessus.

Exercice 5.22. La Société Speedza livre des pizzas à domicile. À ses vendeurs, elle offre à choix deux modèles de rémunération :

— **Modèle 1 :** Salaire mensuel 4'500 francs plus 5% de commission sur le montant des ventes.

— **Modèle 2 :** Salaire mensuel 4'000 francs plus 10% de commission sur le montant des ventes.

Vous êtes un nouvel employé. Dans quel cas choisissez-vous le modèle 1 ? Le modèle 2 ?

Exercice 5.23. Un vidéoclub propose à ses clients les 3 formules suivantes :

— **Formule 1 :** 20 francs d'abonnement annuel plus 1 franc par DVD loué.

— **Formule 2 :** 2 francs par DVD loué et aucun frais d'abonnement.

— **Formule 3 :** 70 francs à l'année quel que soit le nombre de DVD loué.

a) Représenter graphiquement une fonction déterminant le prix à payer pour x DVD, pour chacune des trois formules proposées, dans un même système d'axes.
On prendra 1 unité pour 5 DVD loués sur l'axe des x et 1 unité pour 10 francs sur l'axe des y.

b) Lire sur le graphique la formule la plus intéressante en fonction du nombre de DVD loué.

Exercice 5.24. Un travail écrit comporte 20 points. La note 1 correspond à 0 point et la note 6 à 20 points. Déterminer la fonction permettant de calculer la note y en fonction du nombre de points x.

Exercice 5.25. Un réparateur informatique demande pour le déplacement un montant forfaitaire de 30 francs. Quel est son tarif de l'heure sachant que l'on a payé 390 francs une réparation nécessitant 4 heures et demi d'intervention ?

Exercice 5.26. Une voiture s'engage sur une route avec le réservoir plein et roule à vitesse constante. Après 200 km de route, il reste 40 litres d'essence et après 450 km, il reste 15 litres. Déterminer

a) La fonction qui détermine le nombre de litres restants dans le réservoir en fonction des kilomètres parcourus.

b) La capacité du réservoir.

c) La consommation au 100 km.

d) La distance maximale que l'on peut parcourir avec un plein.

Exercice 5.27. Le volume d'un glacier était de 125'000 m^3 en 1974 et de 16'000 m^3 en 2003. Selon l'hypothèse d'une décroissance linéaire, estimer en quelle année ce glacier aura totalement disparu.

Exercice 5.28. On a effectué les mêmes trajets avec deux taxis différents. Avec le premier, on a payé 8,50 francs pour un trajet de 2,5 km et 15,70 francs pour un trajet de 5,5 km. Avec le second taxi, pour les mêmes distances, on a payé respectivement 8,25 francs et 16,35 francs. Pour chaque taxi, trouver la fonction donnant le prix de la course en fonction de la longueur du trajet. Pour quel trajet, le prix de la course est-il le même avec les deux taxis.

Exercice 5.29. Une ville a installé des usines pour alimenter ses citoyens en eau potable. Elle finance les coûts d'exploitation en facturant une redevance fixe et l'eau consommée. Un des voisins de Jean a reçu son décompte et pour une consommation de 60'000 litres il paie 88 francs. Un autre voisin paie 100 francs pour une consommation de 75'000 litres. Jean n'a pas reçu son décompte, mais il sait qu'il a consommé 82'000 litres d'eau.

a) Quel montant doit-il prévoir ?

b) Déterminer également le montant de la taxe fixe.

Exercice 5.30. Deux agences de location de voitures ont des tarifs différents. Dans la première agence, on facture 300 francs de frais fixes puis 60 centimes par kilomètre parcouru. On constate que

— pour un parcours de 250 km, le prix demandé est identique dans les deux agences ;

— pour un parcours de 750 km, le prix demandé dans la deuxième agence est supérieur de 100 francs à celui de la première agence.

Déterminer les frais fixes et le prix au kilomètre de la deuxième agence.

Exercice 5.31. On veut donner de la fabrication en sous-traitance à trois entreprises qui formulent les offres suivantes :

— A : 150 francs par pièce fabriquée.

— B : 75 francs par pièce plus un investissement unique de 1'000 francs.

— C : 50 francs par pièce plus un investissement unique de 1'500 francs.

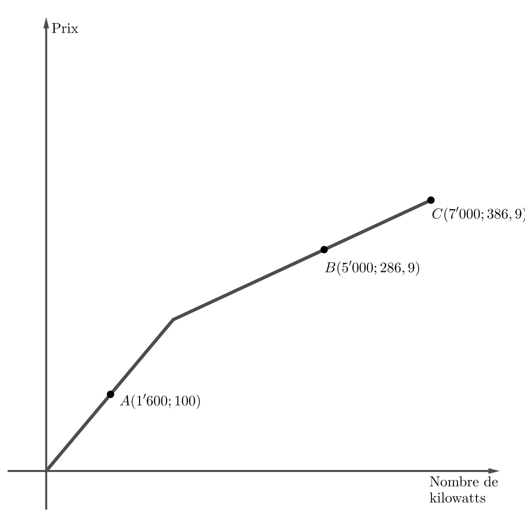
Trouver les seuils pour lesquels une entreprise est plus avantageuse que les autres.

Exercice 5.32. Voici les prix d'une compagnie d'électricité

	Prix par kilowatt	Taxe mensuelle
De 1 à ...		0 franc
Plus que ...		36,90 francs

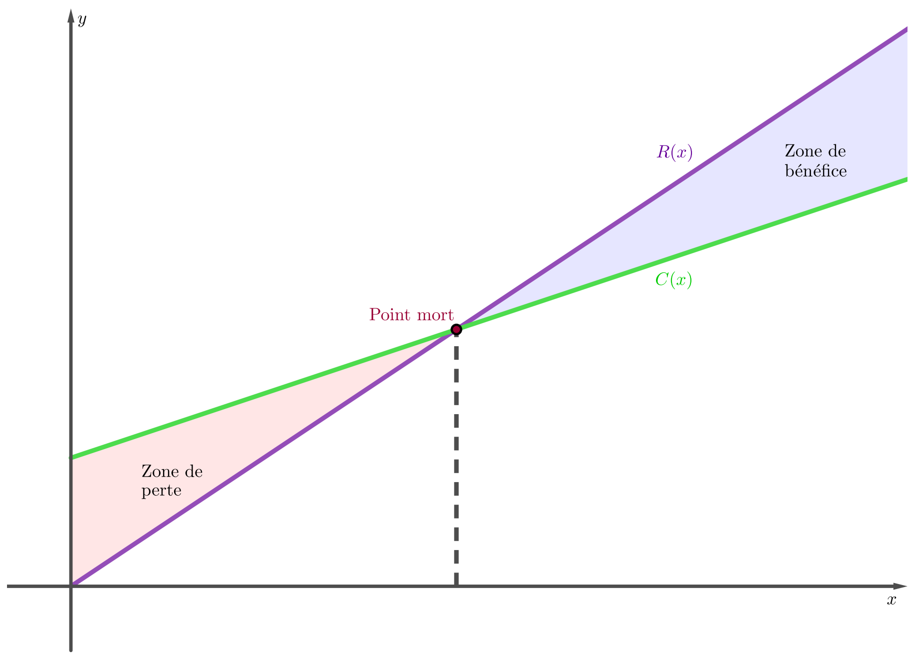
a) En utilisant le graphique ci-dessous, déterminer le prix du kilowatt pour chaque situation

b) A partir de combien de kilowatt paie-t-on une taxe mensuelle ?



5.10 Application à l'économie : point mort

L'analyse du *point mort* (ou *seuil de rentabilité*) est une des applications intéressantes des fonctions du premier degré. Le seuil de rentabilité d'un produit ou d'une entreprise est déterminé par les liens existants entre le coût de production d'un (ou plusieurs) produit(s), le volume de production ou la quantité fabriquée et le revenu engendré par la vente de ces produits. Les coûts de production sont généralement composés de coûts fixes et de coûts variables. Les coûts variables sont souvent proportionnels à la quantité produite. De même, le revenu engendré par la vente de ces objets est généralement proportionnel à la quantité vendue. Graphiquement, on illustre ainsi cette situation :



Si le revenu est supérieur au coût de production, la différence constitue le bénéfice. Si le coût de production est supérieur au revenu, la différence constitue une perte. Si le revenu est égal au coût de production, il n'y a ni bénéfice, ni perte : c'est le *point mort* (ou *seuil de rentabilité*).

Pour trouver le point mort, il suffit de calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite des coûts $C(x)$ et de la droite du revenu $R(x)$.

Exemple. Un vendeur ambulant vend des roses ayant des coûts fixes de 20 francs par jour. Il achète ses roses à 2 francs la pièce et les revend à 6 francs.

Pour déterminer le nombre de roses à vendre pour atteindre le seuil de rentabilité, on considère les éléments suivants :

— x le nombre de roses vendues.

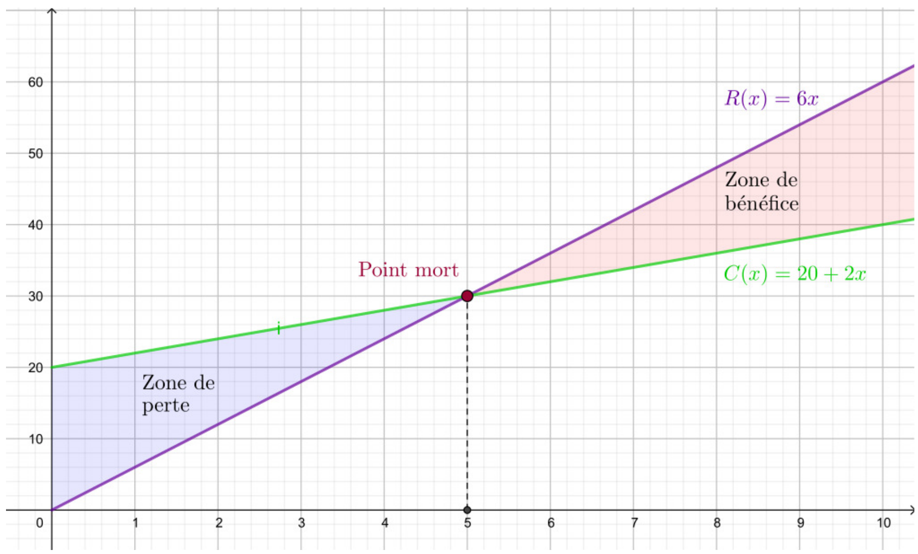
— $C(x) = 2x + 20$ les coûts de production.

— $R(x) = 6x$ le montant des ventes.

Le seuil de rentabilité se détermine en posant $C(x) = R(x)$:

$$\begin{aligned} 2x + 20 &= 6x \\ 20 &= 4x \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Le vendeur devra donc vendre plus de 5 roses pour faire du profit.



Que se passe-t-il si maintenant le vendeur peut payer ses roses 1 franc auprès d'un autre fournisseur en périphérie de la ville mais qu'il doit pour cela prendre un taxi qui lui en coûtera 10 francs supplémentaires ?

La situation est désormais la suivante :

- x le nombre de roses vendues.
- $C_2(x) = x + 30$ les coûts de production.
- $R(x) = 6x$ le montant des ventes.

Le seuil de rentabilité se calcule en posant $C_2(x) = R(x)$:

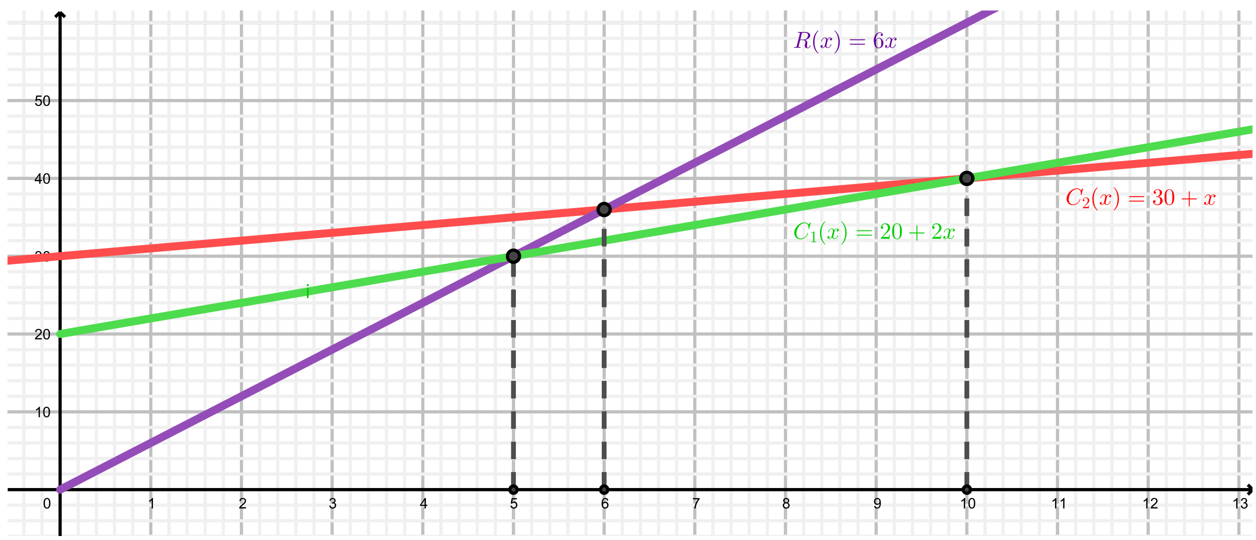
$$\begin{aligned} x + 30 &= 6x \\ 30 &= 5x \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Le vendeur doit donc vendre plus de 6 roses pour faire un profit.

Pour qu'il accepte de travailler avec ce nouveau fournisseur, il convient de déterminer le nombre de roses à vendre pour que le coût du nouveau système soit inférieur à l'ancien. Autrement dit, on cherche x tel que

$$\begin{aligned} C(x) &= C_2(x) \\ 2x+20 &= x+30 \\ x+20 &= 30 \\ x &= 10. \end{aligned}$$

En conclusion, si le vendeur pense vendre plus de 10 roses par jour, il a intérêt à opter pour ce nouveau fournisseur. Sinon, il lui faudra conserver son fournisseur actuel.



Exercice 5.33. Un manufacturier de ballons estime qu'il lui en coûte 4 francs pour fabriquer chaque ballon. De plus, il a calculé qu'il lui en coûte 156 francs par jour de frais fixes. S'il vend ses ballons 10 francs chacun, déterminer son seuil de rentabilité.

Exercice 5.34. Une troupe de théâtre a obtenu une subvention de 50'000 francs pour monter une pièce. Chaque représentation rapporte 10'000 francs, mais les frais fixes (décors, costumes, répétitions,...) s'élèvent à 150'000 francs et les frais variables (salaire des comédiens, des placeurs,...) à 8'000 francs par représentation.

a) Déterminer les expressions qui donnent le revenu $R(x)$, les coûts $C(x)$ et le bénéfice $B(x)$ en fonction du nombre x de représentations.

b) La troupe de théâtre rentre-t-elle dans ses frais si elle donne 25 représentations ?

c) Déterminer le seuil de rentabilité.

Exercice 5.35. Un commerçant achète d'un grossiste des articles au prix de 2 francs l'unité. Les frais fixes de fonctionnement du commerçant sont de 148 francs par jour. A quel prix doit-il vendre chaque article pour avoir un seuil de rentabilité de 37 articles par jour ?

Exercice 5.36. Un producteur maraîcher sait qu'il peut vendre toute sa production de navets en les vendant $0,40$ franc chacun. Il estime qu'il a des frais fixes de 100 francs par jour et qu'il lui en coûte $0,20$ franc pour produire chaque navet.

a) Calculer le seuil de rentabilité.

b) Un vendeur de machinerie lourde propose au producteur l'achat d'une nouvelle machine. Le coût de production sera alors de 0,10 franc par navet, mais les frais fixes augmenteront à 180 francs par jour. Donner le nouveau seuil de rentabilité, puis déterminer le nombre de navets que le producteur devra vendre pour que la machinerie lourde soit rentable.

Exercice 5.37. Un éditeur décide de publier un ouvrage de mathématiques. Les coûts qu'il doit assumer sont formés de frais fixes (composition, montage, ...) s'élevant à 11'000 francs et des frais variables (impression, droits d'auteurs,...) s'élevant à 9 francs par volume.

a) S'il vend ses livres 20 francs l'exemplaire, quel est son seuil de rentabilité ?

b) Un nouveau procédé de composition permet d'abaisser les frais fixes à 9'500 francs. Par contre, dans ce cas, l'impression augmente les coûts variables à 10 francs par livre. Calculer le nouveau seuil de rentabilité ainsi que le nombre de livres à vendre pour l'aider à choisir un procédé.

Exercice 5.38. Un groupe d'amis enregistre un DVD. Les frais fixes représentent une somme fixe à payer quel que soit le nombre de DVDs produits (électricité, chauffage, location de matériel, ...). Elle est donc théoriquement due même en cas d'empêchement de dernière minute et qu'on ne produit rien. Les coûts fixes s'élèvent ici à 28'000 francs. Les frais variables par DVD représentent l'augmentation du coût total chaque fois qu'on produit un DVD supplémentaire. Le coût total de production pour une quantité donnée est la somme des frais fixes et des frais variables. Et produire 500 unités coûte 30'150 francs. Les DVDs sont vendus 25 francs pièce.

a) Calculer le montant des coûts variables par DVD.

b) Combien coûterait la production de 2'000 DVDs ?

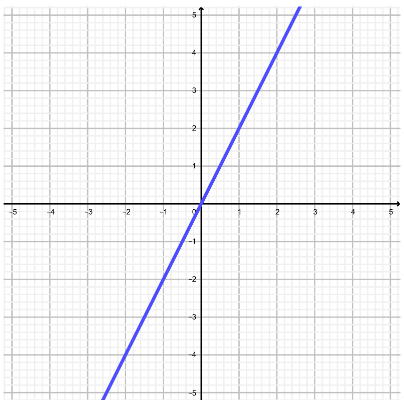
c) Calculer, à un DVD près et à 1 franc près, le seuil de rentabilité.

d) Déterminer combien de DVDs il faut vendre pour dégager un bénéfice de 50'000 francs.

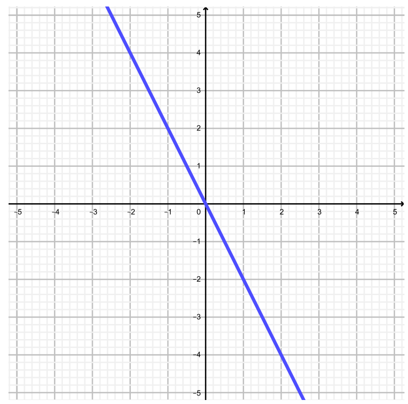
5.11 Solutions

Exercice 5.1.

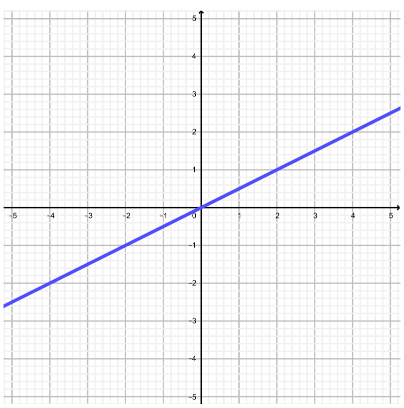
a)



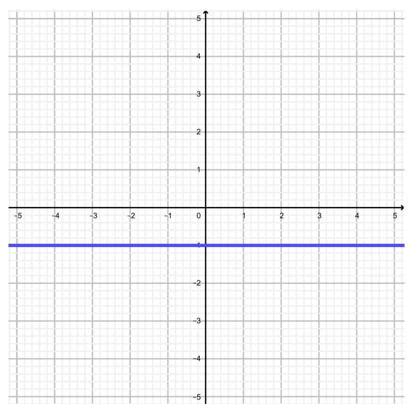
b)



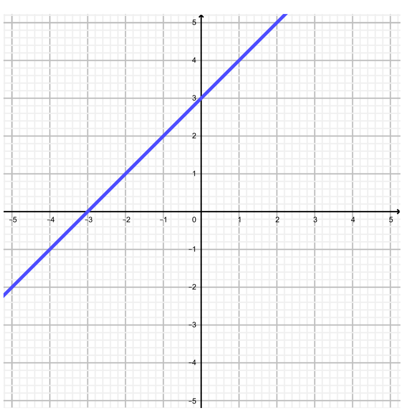
c)



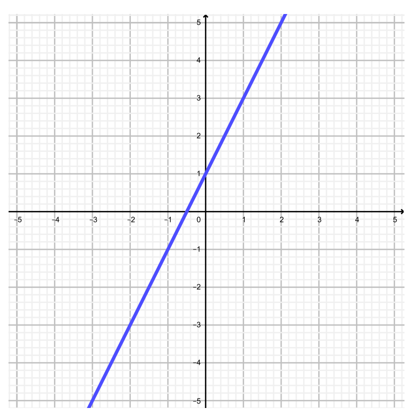
d)



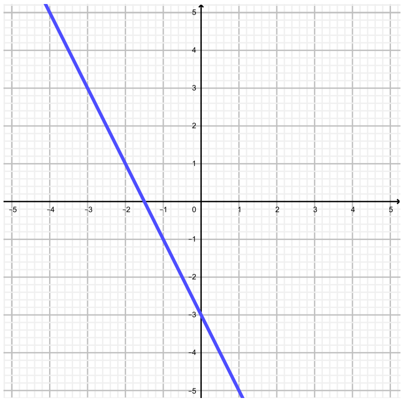
e)



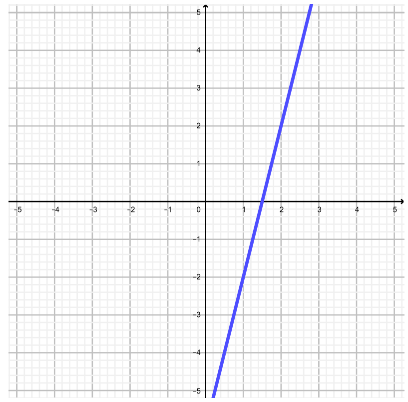
f)



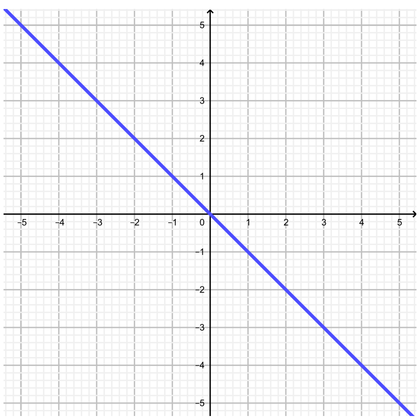
g)



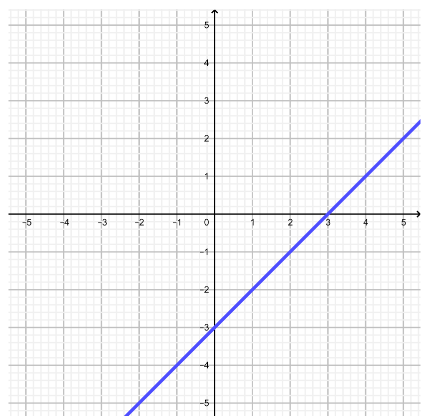
h)



i)

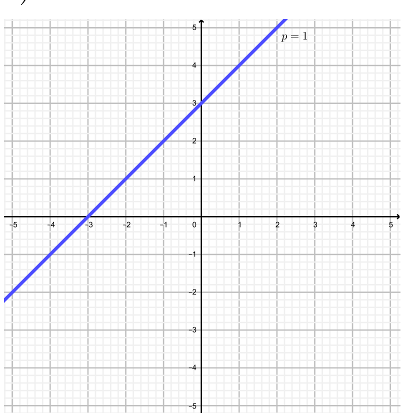


j)

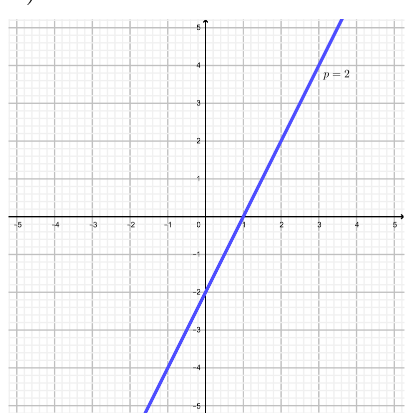


Exercice 5.2.

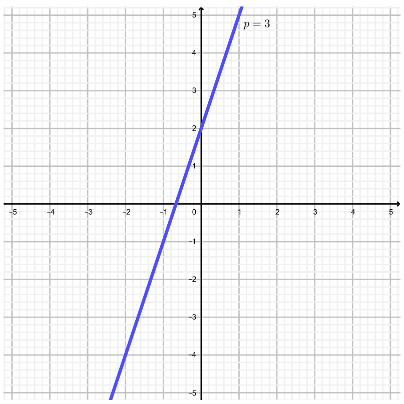
a)



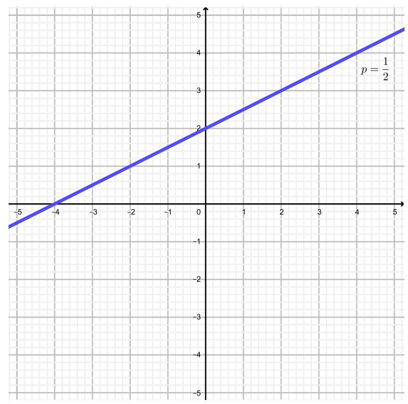
b)



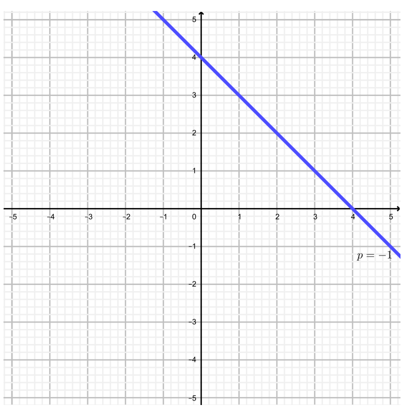
c)



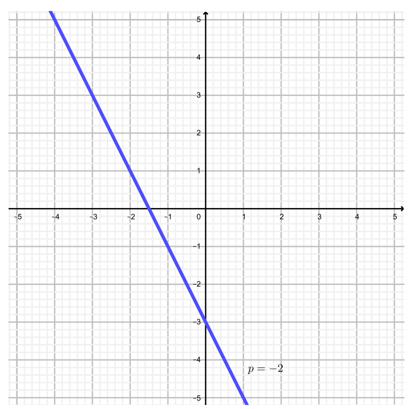
d)



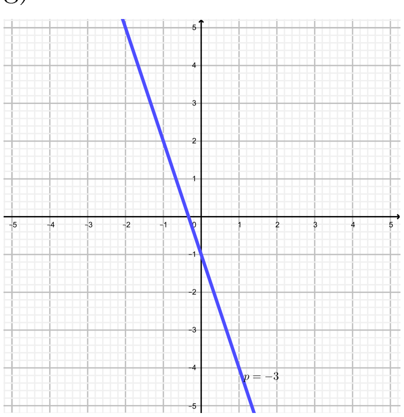
e)



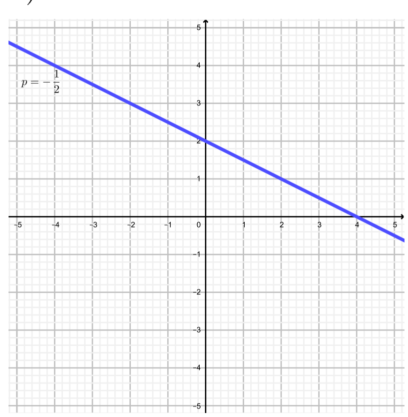
f)



g)

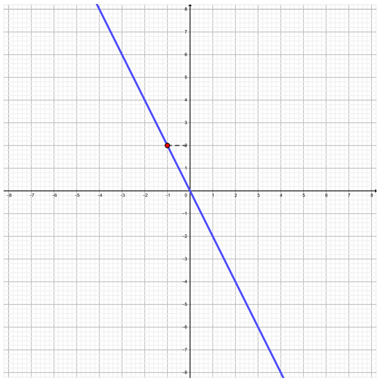


h)

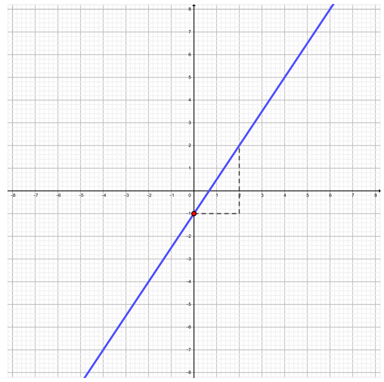


Exercice 5.3.

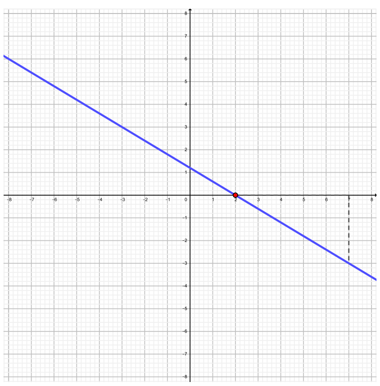
a)



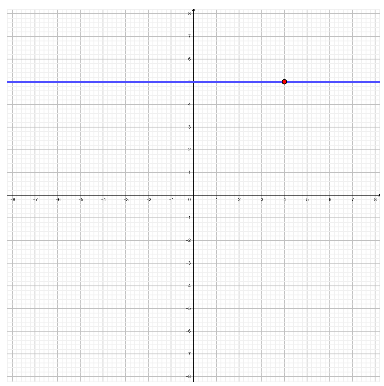
b)



c)



d)



Exercice 5.4. $y = -3x + 19$.

Exercice 5.5.

a) $y = 3x + 2$ b) $y = 5x - 4$

c) $y = \dfrac{3}{4}x - 6$ d) $y = -\dfrac{4}{7}x - \dfrac{9}{7}$

Exercice 5.6.

$f(x) = 2x - 3.$

$g(x) = -x + 4.$

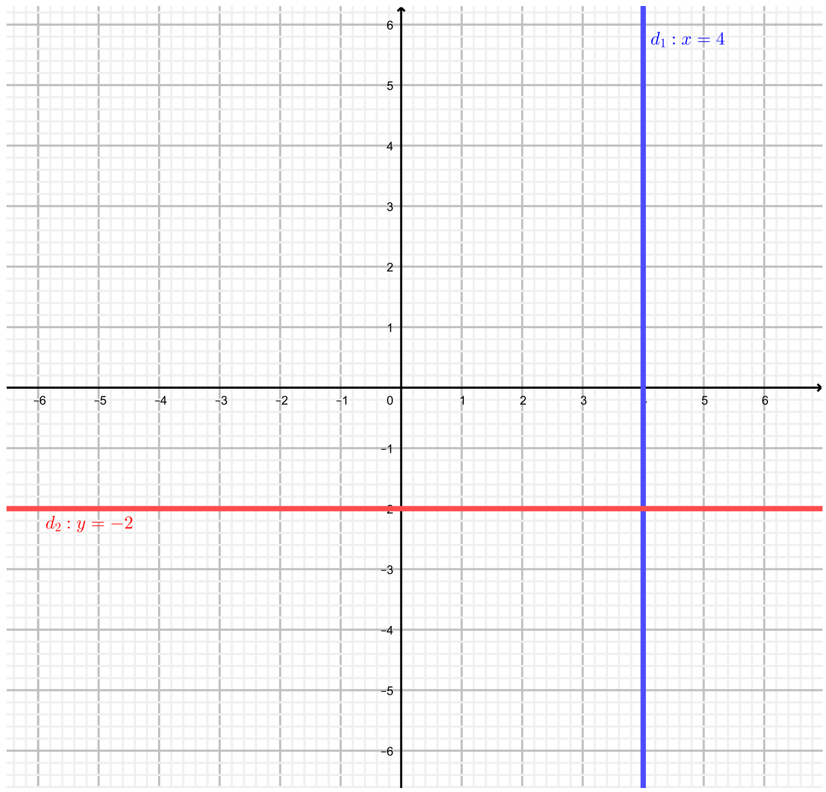
$h(x) = \dfrac{3}{5}x + 2.$

$i(x) = -\dfrac{4}{7}x.$

$j(x) = 3.$

Exercice 5.7. $x = -4$.

Exercice 5.8.



Exercice 5.9.

a) $y = -3x$.

b) $y = \dfrac{3}{2}x - 8$.

c) $y = \dfrac{1}{3}x$.

d) $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$.

Exercice 5.10. $y = -x - 2$.

Exercice 5.11. $y = \dfrac{2}{3}x - 7$.

Exercice 5.12.

a) $I(1; 4)$
b) $I(2; 0)$
c) $I(3; 2)$
d) $I(-6; 2)$
e) $I(-2; 12)$
f) $I(0; 0)$
g) Pas d'intersection
h) Infinité d'intersections

Exercice 5.13. $I(-4; -3)$.

Exercice 5.14. Elles forment un triangle.

Exercice 5.15.

a) $(2;0)$ et $(0;-4)$.

b) $(2;0)$ et $\left(0;\dfrac{6}{5}\right)$.

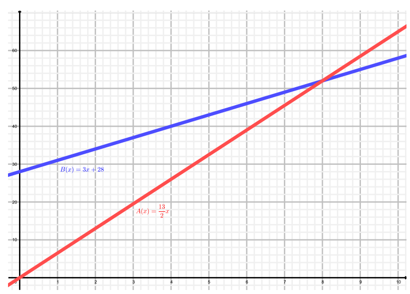
Exercice 5.16.

a)

Nombre de matchs	4	6	10	15
Prix payé avec l'option A	26	39	65	97, 50
Prix payé avec l'option B	40	46	58	73

b) $A(x)=\dfrac{13}{2}x$, $B(x)=3x+28$.

c)



d) a) Pour 8 matchs. Le prix est alors de 52 francs.
   b)

Exercice 5.17.

a) $2,\overline{2}°$C.

b) $-40°\text{C} = -40$ F.

c) 320 F.

Exercice 5.18.

a) 43 ans.

b) En 1955.

Exercice 5.19.

a) Paul avec 15 minutes d'avance.

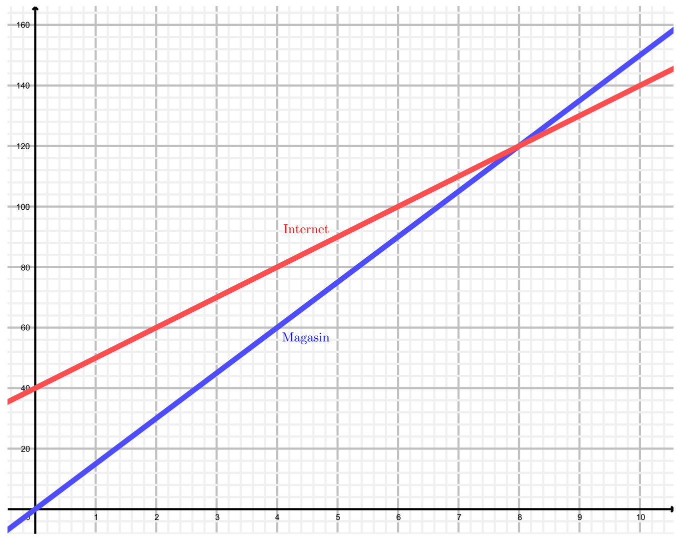
b) $2,5$ km.

c) Paul : $15\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Virginie : $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Exercice 5.20. $C(k) = 7'200 - 300k$.

Exercice 5.21.

a)



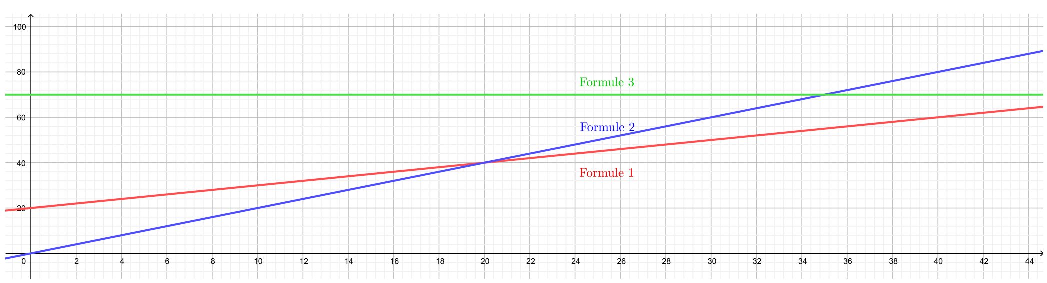
b) a) 90 francs (au magasin).
   b) Magasin.
   c) A partir de 8 cartouches.

c)

Exercice 5.22. Le modèle 1 jusqu'à 10'000 francs et le modèle 2 sinon.

Exercice 5.23.

a)



b) Entre 0 et 20 DVD loués : Formule 2. Entre 20 et 50 DVD loués : Formule 1. A partir de 50 DVD loués : Formule 3.

Exercice 5.24. $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

Exercice 5.25. 80 francs de l'heure.

Exercice 5.26.

a) $f(x) = -\dfrac{1}{10}x + 60$.

b) 60 litres.

c) 10 litres pour 100 km.

d) 600 km.

Exercice 5.27. Au courant de l'année 2007.

Exercice 5.28. $y_1 = 2,4x + 2,5$, $y_2 = 2,7x + 1,5$, $y_1 = y_2$ pour un trajet de $x = 3,33$ km.

Exercice 5.29.

a) $105,60$ francs.

b) 40 francs.

Exercice 5.30. Frais fixes : 250 francs et prix au kilomètre : 80 centimes.

Exercice 5.31. Jusqu'à 13 pièces : A. De 14 à 20 pièces : B. Plus de 20 pièces : C.

Exercice 5.32.

a) $6,25$ centimes et 5 centimes.

b) $y = 0,0625x$, $y = 0,05x + 36,9$. A partir de $x = 2952$ kilowatts.

Exercice 5.33. 26 ballons.

Exercice 5.34.

a) $R(x) = 50'000 + 10'000x$, $C(x) = 150'000 + 8'000x$ et $B(x) = 2'000x - 100'000$.

b) Non.

c) 50 représentations.

Exercice 5.35. 6 francs.

Exercice 5.36.

a) 500 navets.

b) Le nouveau seuil de rentabilité est de 600 navets. Il devra accepter cette offre s'il vend plus de 800 navets.

Exercice 5.37.

a) 1'000 livres.

b) 950 livres pour le seuil de rentabilité. Il devra opter pour ce nouveau procédé jusqu'à 1500 livres.

Exercice 5.38.

a) Les coûts variables se montent à 4,3 francs par DVD.

b) 36'600 francs.

c) Point mort : $x \cong 1'353$ DVDs et $y \cong 33'816$ francs.

d) 3'768 DVDs.

5.12 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

5.1 ☐ Représenter le graphe d'une fonction du premier degré à l'aide d'un tableau de valeurs.
5.2 ☐ Calculer la pente d'une droite.
5.3 ☐ Représenter le graphe d'une fonction du premier degré à l'aide de la pente et de l'ordonnée à l'origine.
5.4 ☐ Retrouver l'expression fonctionnelle d'une droite à partir de son graphe, de deux points ou de sa pente et d'un point.
5.5 ☐ Représenter le graphe d'une droite horizontale ou verticale.
5.6 ☐ Déterminer l'équation d'une parallèle à une droite donnée.
5.7 ☐ Déterminer l'équation d'une perpendiculaire à une droite donnée.
5.8 ☐ Calculer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection de deux droites.
5.9 ☐ Calculer les coordonnées des intersections d'une droite avec les axes.
5.10 ☐ Résoudre un problème impliquant des fonctions du premier degré.
5.11 ☐ Résoudre un problème lié à l'économie.

Chapitre 6

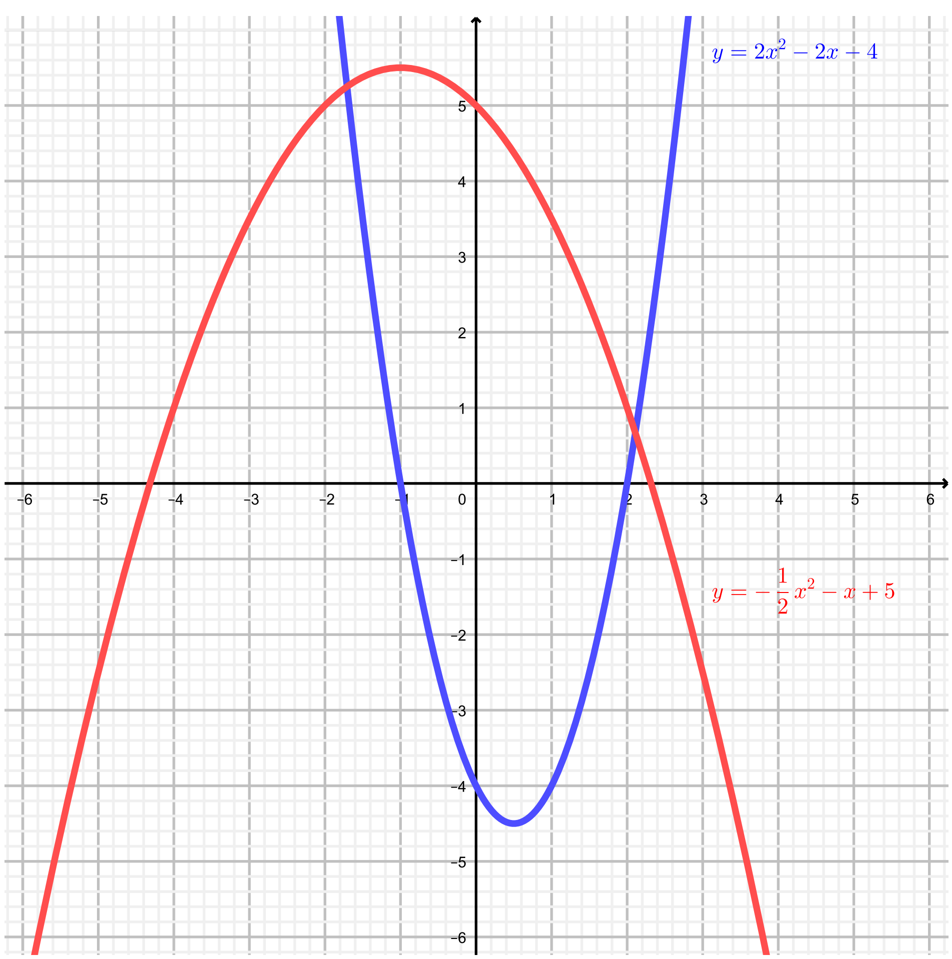
Fonctions du deuxième degré

6.1 Définition

Définition. On appelle *fonction du deuxième degré* ou *fonction quadratique* toute fonction dont l'expression fonctionnelle est de la forme

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c.}$$

Graphiquement, une fonction quadratique est une *parabole*.



Le coefficient a représente la *convexité* de la parabole.

— Si $a > 0$, alors la fonction est *convexe*. "Elle sourit".
— Si $a < 0$, alors la fonction est *concave*. "Elle n'est pas contente".
— Si $a = 0$, alors ce n'est plus une parabole mais une droite.

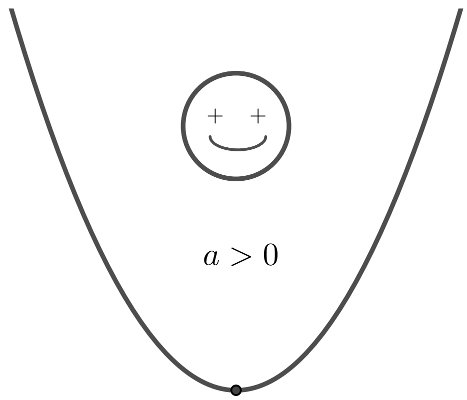


FIGURE 6.1 – f convexe.

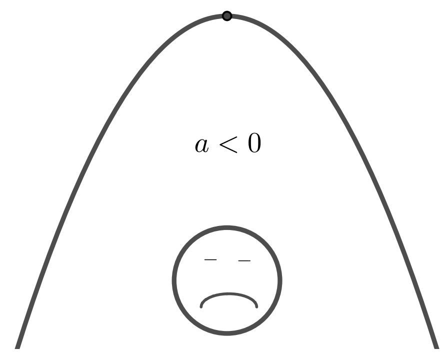


FIGURE 6.2 – f concave.

La lettre c représente *l'ordonnée à l'origine* de la parabole, comme l'était la lettre h pour les droites.

Exercice 6.1. Représenter graphiquement les fonctions f ci-dessous.

a) $f(x) = x^2 - 4x$ b) $f(x) = -x^2 + 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 4$

Exercice 6.2. Répondre aux questions suivantes sans graphe.

a) Le point $P(1;6)$ est-il sur le graphe de $f(x) = x^2 + 8x - 3$?
b) Le point $P(2;7)$ est-il sur le graphe de $f(x) = x^2 + 8x - 11$?
c) Le point P d'abscisse $x = 3$ est sur le graphe de $f(x) = x^2 - 7x + 3$. Déterminer son ordonnée y.

6.2 Propriétés de la parabole

Soit la *parabole* $\mathcal{P}$ d'équation

$$\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Courbure

Sa courbure est d'autant plus forte (la courbe est d'autant plus resserrée) que $|a|$ est grand.

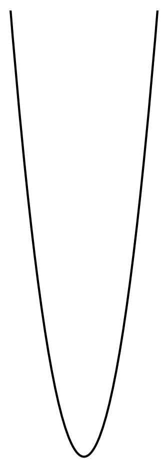


FIGURE 6.3 – $|a|$ grand.

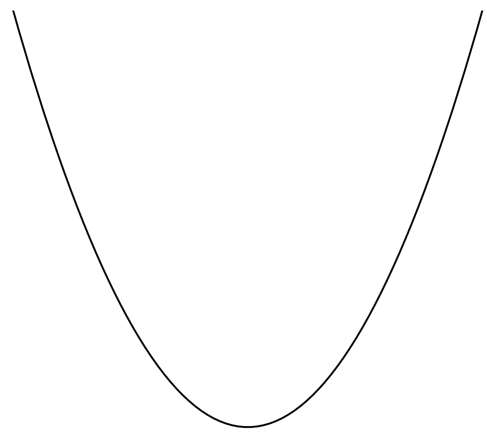
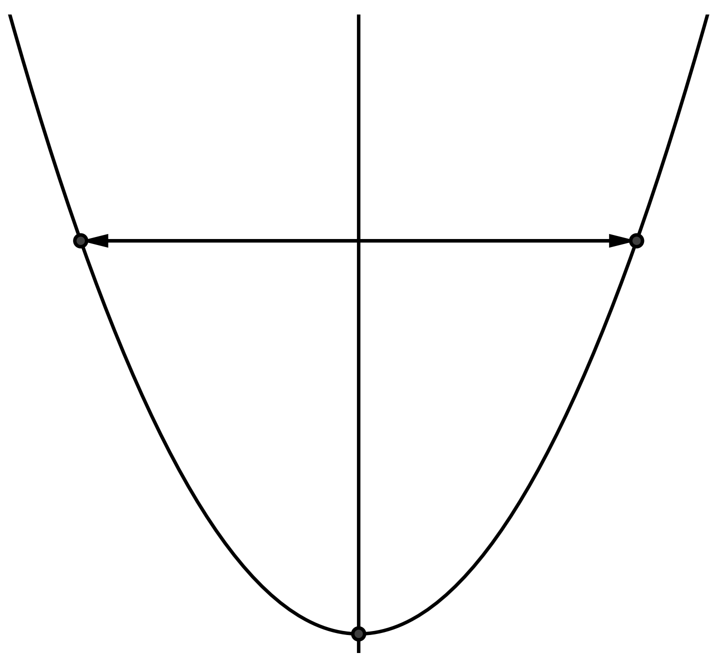


FIGURE 6.4 – $|a|$ petit.

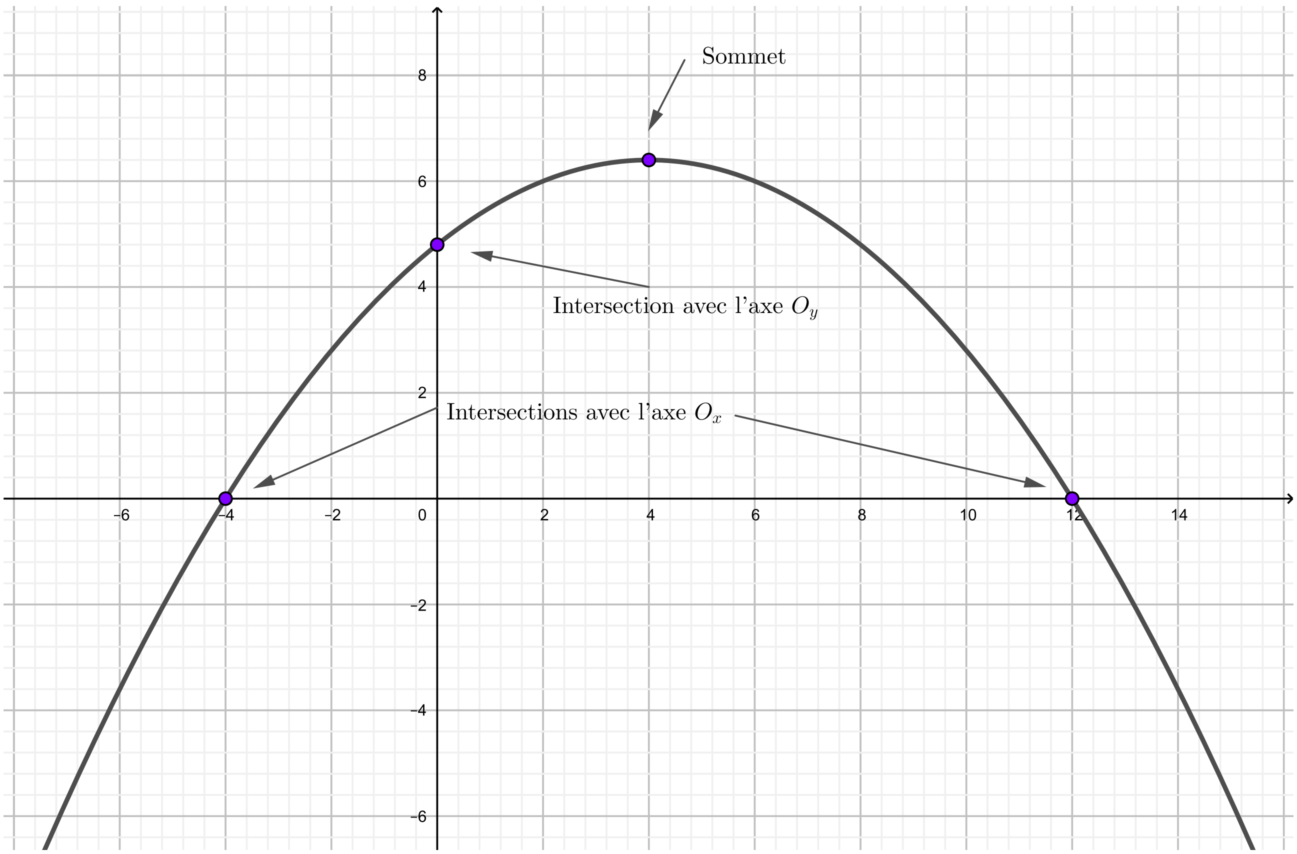
Symétrie

La courbe est symétrique par rapport à un axe vertical passant par son sommet.



Intersection avec les axes et sommet

Les paraboles possèdent des points importants. Il s'agit du *sommet* de la parabole et des *intersections avec les axes.*



Comment calculer ces points ?

1. **Intersections avec l'axe O_x.**
   Il faut trouver les éventuels zéros de la fonction (x_1 et x_2). Comme dans le cas des droites, on pose donc $y = 0$ et on trouve la(les) éventuelle(s) valeur(s) de x.

   Exemple. Soit $f(x) = 3x^2 + 3x - 18$.
   On résout

$$\begin{array}{rcl|l} 3x^2 + 3x - 18 & = & 0 & :3 \\ x^2 + x - 6 & = & 0 & \text{Factoriser} \\ (x+3)(x-2) & = & 0. & \end{array}$$

   On obtient $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$.
   On en déduit les points d'intersection $(-3; 0)$ et $(2; 0)$.

2. **Intersection avec l'axe O_y.**
   On pose $x = 0$ et on trouve la valeur de y.

   Exemple. Soit $f(x) = 3x^2 + 3x - 18$.
   En posant $x = 0$, on obtient

   $$y = 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 18 = -18.$$

   Donc le point d'intersection est $(0; -18)$.

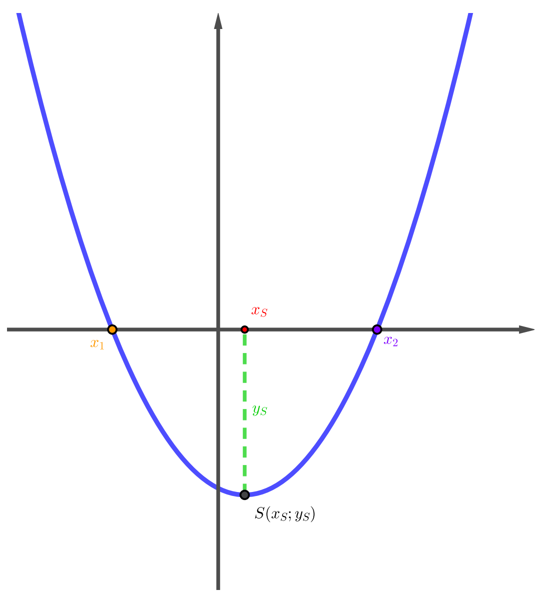
3. **Sommet $S(x_S; y_S)$.**

   Théorème. *Le sommet d'une fonction du deuxième degré est un minimum si $a > 0$, et un maximum si $a < 0$. Ses coordonnées sont données par*

   $$\boxed{x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a} \text{ et } y_S = f(x_S).}$$

   Remarque. On trouve donc y_S en remplacant x par la valeur de x_S dans l'expression fonctionnelle.

   Preuve. Le sommet de la parabole est situé au milieu des éventuels zéros x_1 et x_2.



   Son abscisse x_S est donnée par

   $$\begin{aligned} x_S &= \frac{x_1+x_2}{2} &= \frac{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} \\ &= -\frac{2b}{2a}\cdot\frac{1}{2} &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

   L'abscisse x_S étant alors connue, on en tire l'ordonnée y_S par

   $$y_S = f\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

□

Exemple. Soit $f(x) = 3x^2 + 3x - 18$.
On a

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2\cdot 3} = -\frac{1}{2} \text{ et } y_S = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 18 = -\frac{75}{4}.$$

On peut calculer x_S d'une autre manière :

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Le sommet est donc

$$S\left(-\frac{1}{2}; -\frac{75}{4}\right).$$

Exercice 6.3. Déterminer les coordonnées des intersections avec les axes et celles du sommet de chacune des fonctions f ci-dessous et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

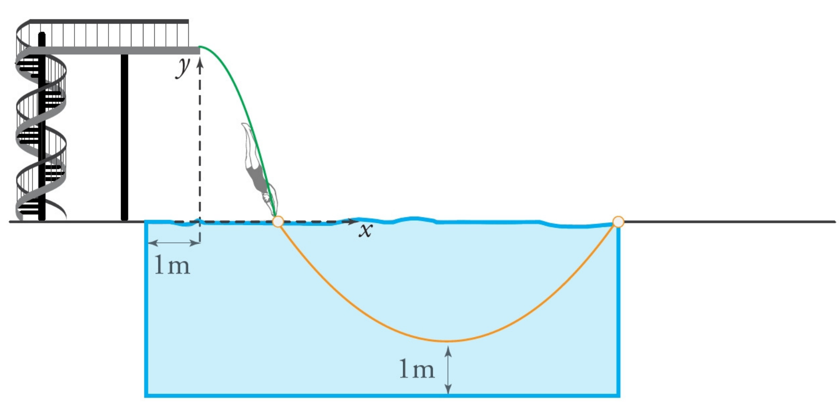
a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
b) $f(x) = -x^2 + 5x$
c) $f(x) = 3x^2 + 3$
d) $f(x) = -2x^2 + 5x - 4$

Exercice 6.4. Un plongeur saute d'un plongeoir et décrit une trajectoire parabolique modélisable par la fonction f définie par

$$f(x) = -1,25(x^2 - 4).$$

Une fois dans l'eau, il suit une autre trajectoire parbolique décrite par la fonction

$$g(x) = 0,6x^2 - 4,8x + 7,2.$$



Déterminer

a) La hauteur du plongeon.
b) La distance au bord de la piscine quand il entre dans l'eau.
c) La longueur de la piscine.
d) La profondeur de la piscine.

6.3 Différentes formes d'expression fonctionnelle

1. **La forme polynomiale :** $y = ax^2 + bx + c$.
   Avantage : On connait l'intersection avec l'axe O_y.

   Exemple.

   (a) Soit $y = x^2 - 4x + 1$.
   On en déduit les coordonnées de l'intersection avec l'axe O_y : $(0; 1)$.

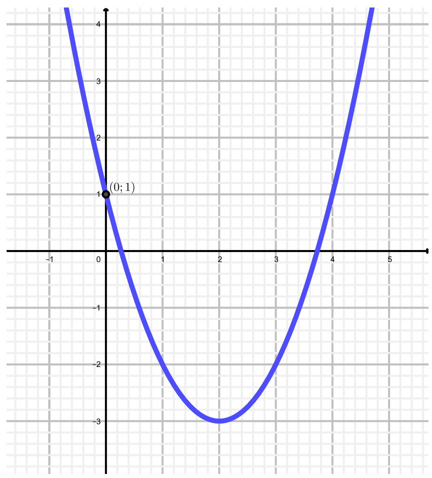


FIGURE 6.5 – Graphe de $y = x^2 - 4x + 1$.

   (b) Soit $y = -2x^2 + 6x - 4$.
   On en déduit les coordonnées de l'intersection avec l'axe O_y : $(0; -4)$.

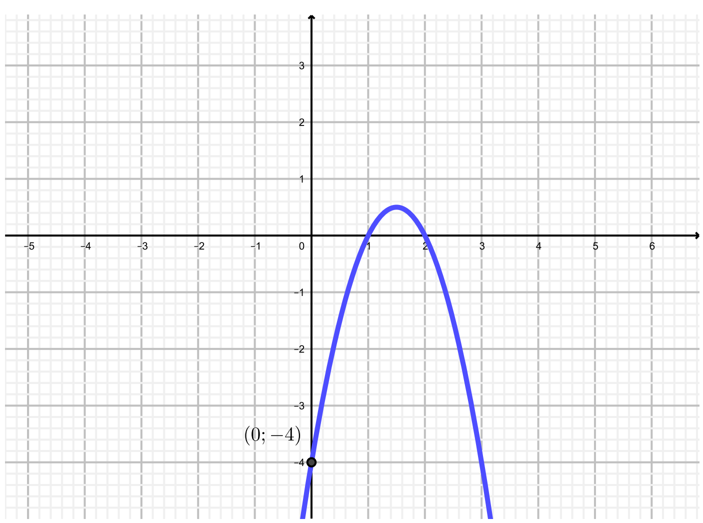


FIGURE 6.6 – Graphe de $y = -2x^2 + 6x - 4$.

2. **La forme standard :** $y = a(x - x_S)^2 + y_S$.
   Ici, la lettre a est la même que celle de la forme polynomiale. Elle donne donc la convexité.
   Avantage : on a le sommet. x_S et y_S sont ses coordonnées.

   Exemple.

   (a) Soit $y = 3(x - 2)^2 + 5$. On en déduit les coordonnées du sommet : $S(2; 5)$.

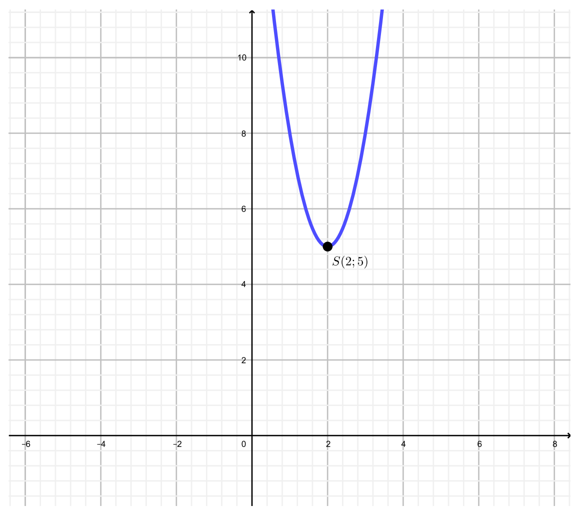


FIGURE 6.7 – Graphe de $y = 3(x - 2)^2 + 5$.

   (b) Soit $y = -2(x + 3)^2 - 3$, que l'on peut écrire également $y = -2(x - (-3))^2 - 3$. On en déduit les coordonnées : $S(-3; -3)$.

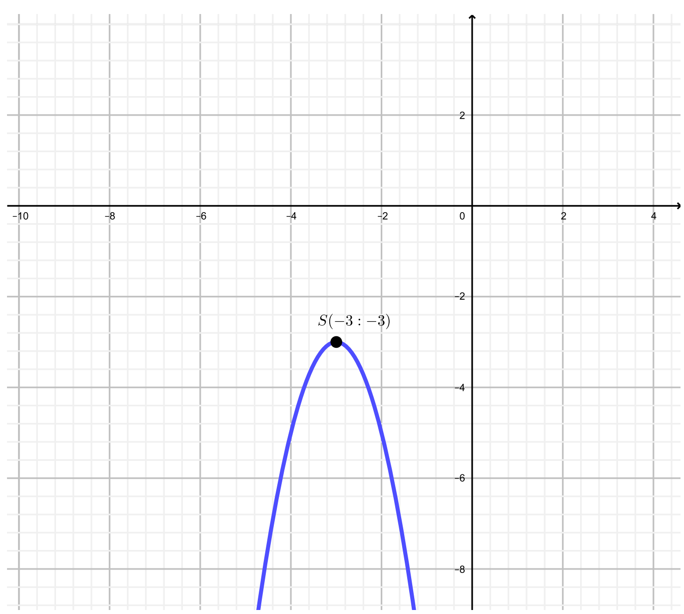


FIGURE 6.8 – Graphe de $y = -2(x + 3)^2 - 3$.

3. **La forme factorisée :** $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
   La lettre a est toujours la même et donne donc la convexité.
   Avantage : On possède les intersections avec l'axe O_x. x_1 et x_2 sont les zéros de la fonction (les coordonnées x des points d'intersection avec l'axe O_x).

   Exemple.

   (a) Soit $y = (x - 2)(x - 4)$.
   On en déduit que les intersections avec l'axe O_x sont les points $(2; 0)$ et $(4; 0)$.

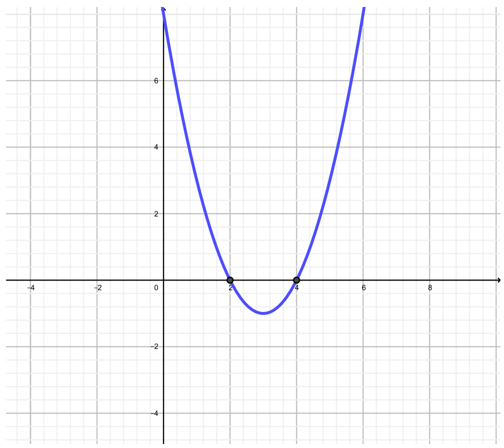


FIGURE 6.9 – Graphe de $y = (x - 2)(x - 4)$.

   (b) Soit $y = 3(x+5)\left(x - \frac{7}{2}\right)$, que l'on peut écrire également $y = 3(x - (-5))\left(x - \frac{7}{2}\right)$.
   On en déduit que les intersections avec l'axe O_x sont les points $(-5; 0)$ et $\left(\frac{7}{2}; 0\right)$.

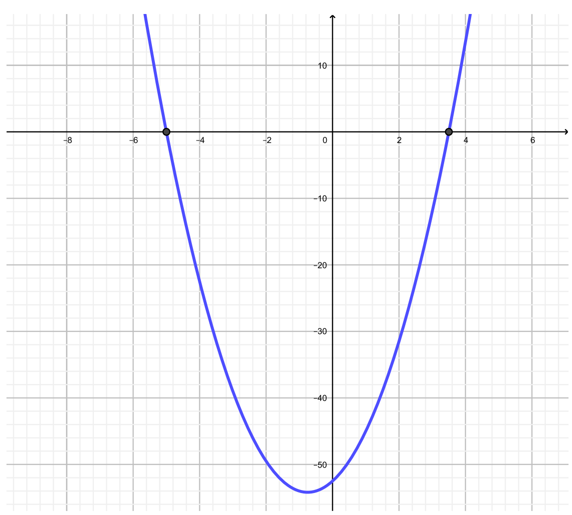
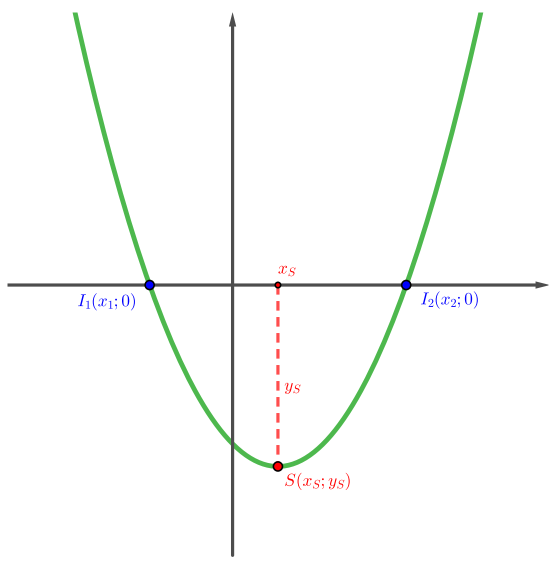


FIGURE 6.10 – Graphe de $y = 3(x+5)\left(x - \frac{7}{2}\right)$.

Chaque forme a ses propres avantages et inconvénients.

Le tableau ci-dessous récapitule les propriétés des trois formes.

Forme	Expression fonctionnelle	Sommet	Intersections avec O_x
Polynomiale	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$S(x_S; y_S)$ avec $x_S = -\dfrac{b}{2a}$	En résolvant $f(x) = 0$
Standard	$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$	$S(x_S; y_S)$	En résolvant $f(x) = 0$
Factorisée	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$S(x_S; y_S)$ avec $x_S = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$	$I_1(x_1; 0)$ et $I_2(x_2; 0)$



Exercice 6.5. Déterminer les coordonnées du sommet de chacune des paraboles suivantes et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

a) $y = 5(x-4)^2 - 3$
b) $y = (x-1)^2 + 2$
c) $y = 4(x-2)^2$
d) $y = -2(x+3)^2$
e) $y = (x-1)(x+1)$
f) $y = 5(x-4)(x+3)$
g) $y = -2(x+3)(x-4)$
h) $y = -0,5(x-10)^2$
i) $y = -0,5x(x-10)$
j) $y = 3x(x+5)$
k) $y = 4x^2 - 5$
l) $y = 3x^2 + 7$

Exercice 6.6. Déterminer les coordonnées des intersections avec les axes de chacune des paraboles suivantes.

a) $y = 2(x-3)(x-4)$ b) $y = 2(x-1)^2 - 8$

c) $y = -\frac{1}{3}(x-5)(x+3)$ d) $y = -3(x+2)^2 - 6$

6.4 Graphe d'une fonction du deuxième degré

Pour une droite, deux points suffisent pour la caractériser. Ce n'est plus forcément le cas pour une fonction du deuxième degré. Il faut calculer les coordonnées des intersections avec les axes et le sommet. Si cela n'est pas suffisant, on peut construire un tableau de valeurs.

Exemple. Traçons la parabole $\mathcal{P} : y = -2(x-2)(x+4)$.

La première chose à faire est d'identifier si la parabole est donnée sous une forme connue. On remarque ici qu'il s'agit de la forme factorisée. L'avantage de cette dernière est de pouvoir en déduire les zéros de la fonction :

$$x_1 = 2 \text{ et } x_2 = -4.$$

Les intersections avec l'axe O_x sont donc : $(2; 0)$ et $(-4; 0)$.

Pour trouver l'intersection avec l'axe O_y, il suffit de remplacer x par 0.

$$y = -2(0-2)(0+4) = -2(-2)(4) = 16.$$

Ainsi, l'intersection avec l'axe O_y est donné par le point $(0; 16)$.

Quant au sommet, nous pouvons choisir la méthode adéquate pour tout d'abord trouver sa coordonnée x_S. Comme nous possédons déjà x_1 et x_2, nous pouvons donc calculer

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = -1.$$

Pour trouver y_S, il suffit de remplacer la valeur de x_S dans l'expression fonctionnelle.

$$y_S = -2(-1-2)(-1+4) = -2(-3)(3) = 18.$$

Le sommet est donc le point $S(-1; 18)$.

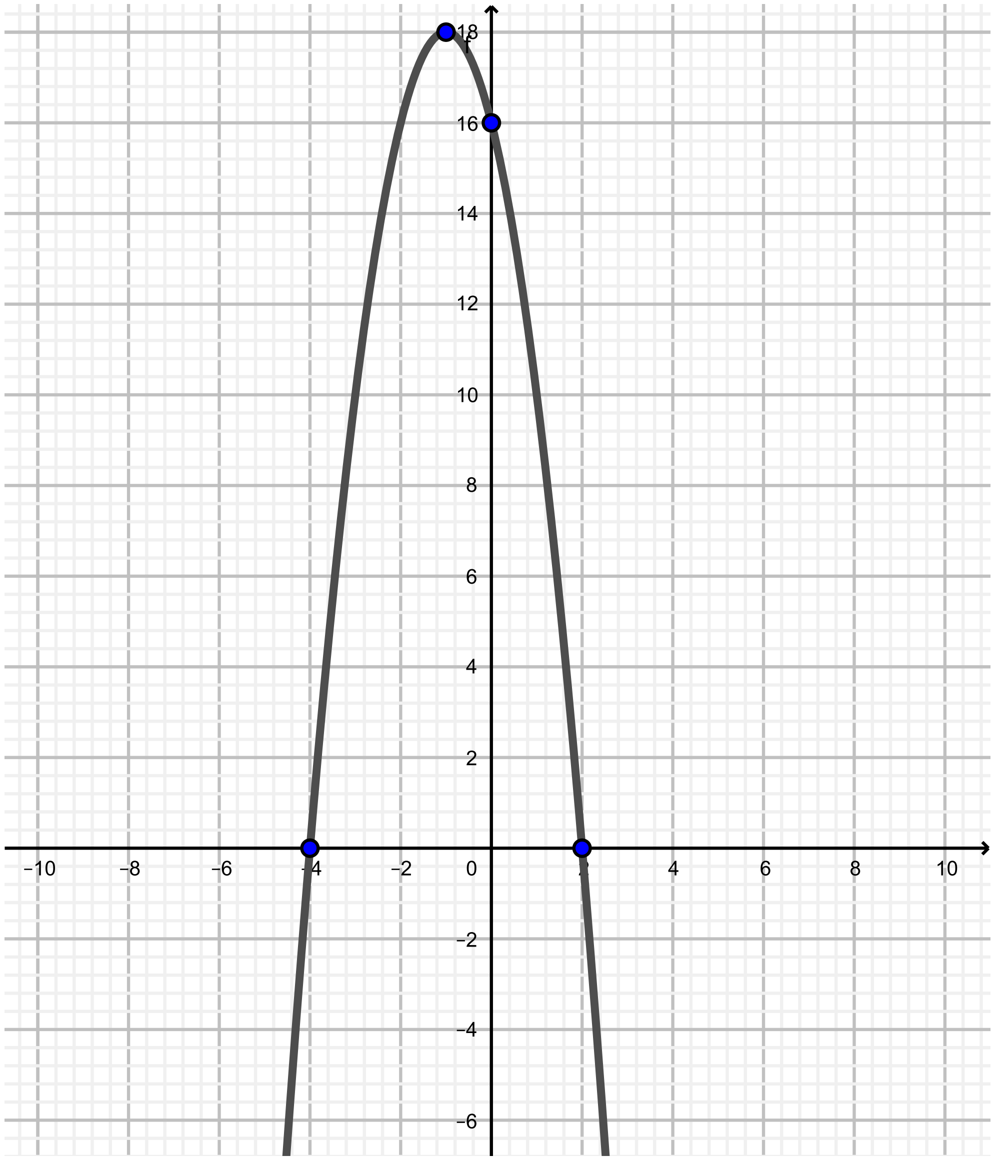


FIGURE 6.11 – Graphe de $y = -2(x-2)(x+4)$.

Comment retrouver l'équation d'une parabole passant par certains points donnés ?

En fonction de la nature des points connus, on choisit la forme adéquate. On utilise ensuite le dernier point donné pour trouver la valeur du coefficient a.

Exemple. Soit la parabole passant par les points $(-3; 0)$, $(1; 0)$ et $(3; 4)$.

On remarque ici que nous possédons les points d'intersection avec l'axe O_x. Autrement dit, nous savons que $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$ (ou vice-versa). Connaissant cela, nous allons opter pour la forme factorisée

$$y = a(x - x_1)(x - x_2),$$

qui s'écrit donc

$$\begin{array}{rcl} y & = & a(x - (-3))(x - 1) \\ y & = & a(x+3)(x-1). \end{array}$$

Pour trouver la valeur de a, on utilise le fait que la parabole passe par le point $(3\,;4)$. Donc, si $x = 3$, alors $y = 4$. En remplaçant dans l'équation ci-dessus, on obtent l'équation à une inconnue (à savoir a) :

$$\begin{array}{rcl|l} 4 & = & a(3+3)(3-1) & \\ 4 & = & 12a & :12 \\ a & = & \dfrac{1}{3}. & \end{array}$$

Donc l'équation de la parabole est

$$y = \frac{1}{3}(x+3)(x-1).$$

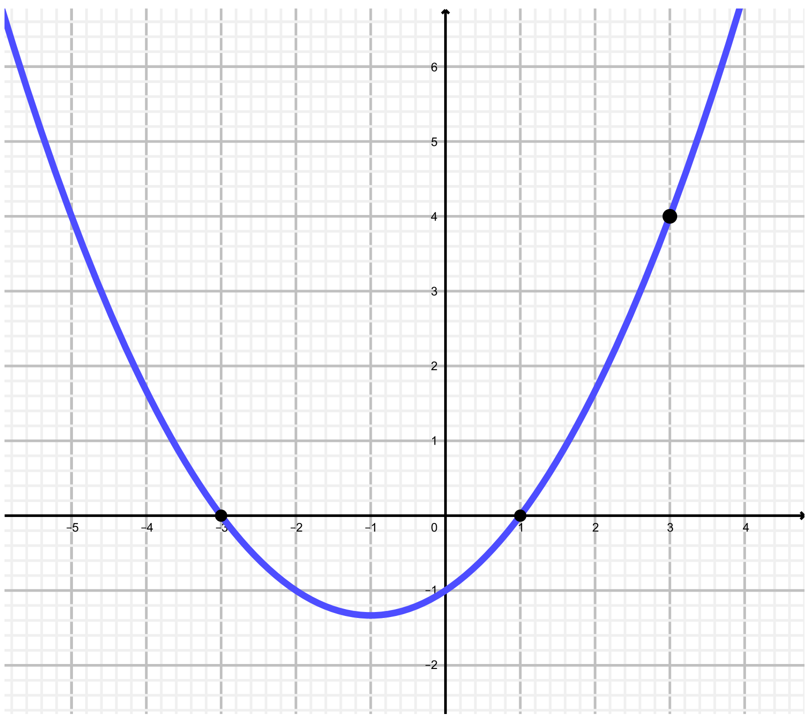


FIGURE 6.12 – Graphe de $y = \dfrac{1}{3}(x+3)(x-1)$.

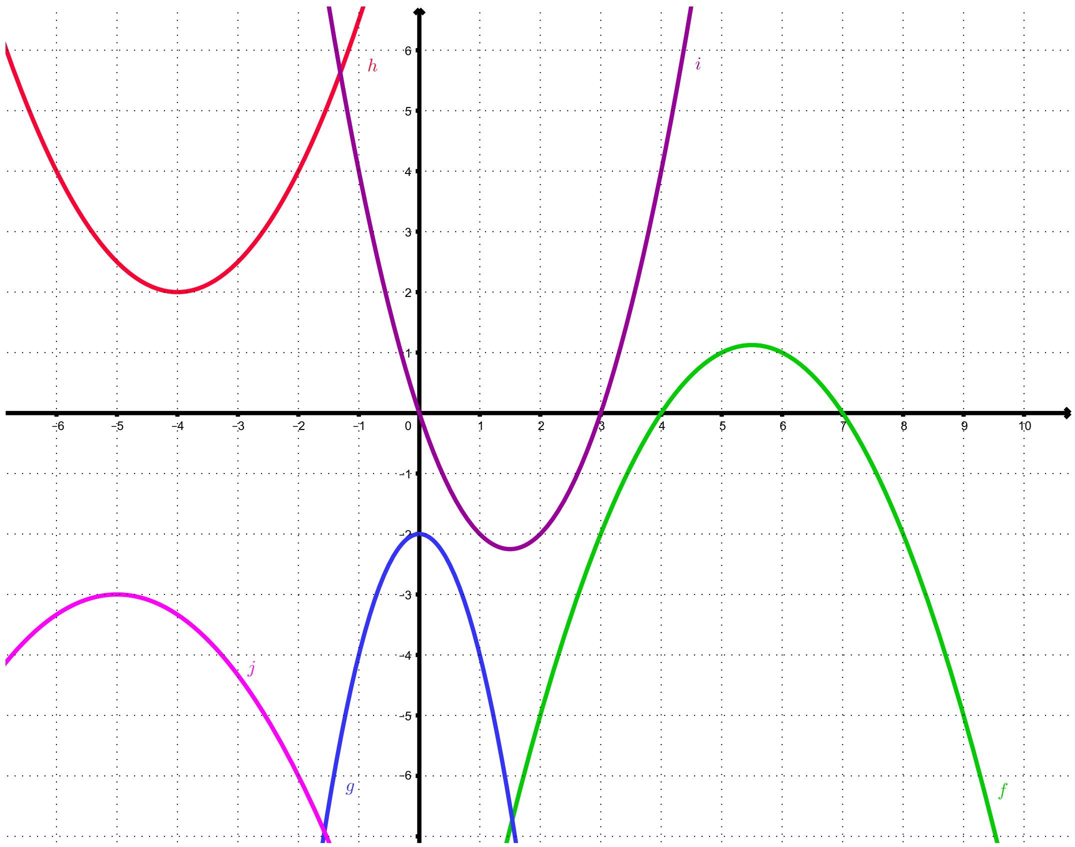
Exercice 6.7. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x - 6$.

a) Déterminer par calcul les coordonnées des points d'intersection entre le graphe de f et les axes de coordonnées.

b) Déterminer par calcul les coordonnées du sommet de la parabole.

c) Calculer les coordonnées d'autres points du graphe de f et le tracer.

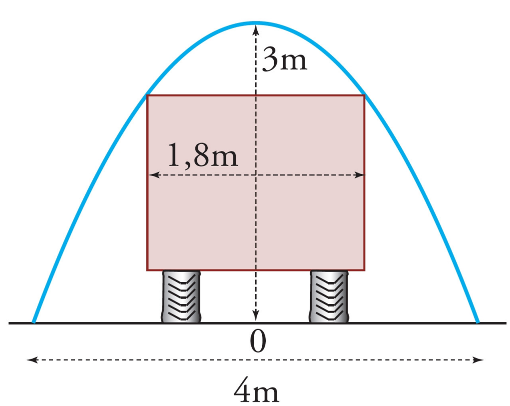
Exercice 6.8. Trouver l'expression fonctionnelle des cinq fonctions dont les graphes sont les paraboles ci-dessous.



Exercice 6.9. Déterminer l'expression fonctionnelle de la fonction du deuxième degré f intersectant l'axe O_x en $x = 5$ et $x = -2$ et passant par le point $A(1; 24)$.

Exercice 6.10. Déterminer l'expression fonctionnelle de la fonction du deuxième degré f de sommet $S(-7; -8)$ passant par le point $A(-3; 7)$.

Exercice 6.11. Un tunnel a une forme parabolique de 4 m de diamètre et d'une hauteur de 3 m. Un camion mesurant 1,8 m de large souhaite traverser ce tunnel. Quelle doit alors être sa hauteur maximale ?



6.5 Intersection de deux fonctions

La méthode est identique à celle utilisée pour calculer l'intersection de deux droites. Il suffit de résoudre le système constitué des deux équations de parabole.

Exemple. Soient

$$\mathcal{P} : y = \frac{1}{2}(x+1)^2 \text{ et } d : -x - y = -3.$$

On résout le système suivant :

$$\begin{cases} y & = & \frac{1}{2}(x+1)^2 \\ -x-y & = & -3 \end{cases}.$$

Il existe bien sûr plusieurs manières de procéder, mais en isolant y dans l'équation de la droite, nous pouvons procéder facilement à une comparaison (substitution des y).

$$\begin{array}{rcl|l} -x-y & = & -3 & +y+3 \\ y & = & -x+3. & \end{array}$$

Ainsi, par substitution des y, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{1}{2}(x+1)^2 & = & -x+3 & \\ \frac{1}{2}(x^2+2x+1) & = & -x+3 & \cdot 2 \\ x^2+2x+1 & = & -2x+6 & +2x-6 \\ x^2+4x-5 & = & 0 & \text{Factoriser} \\ (x+5)(x-1) & = & 0 & \end{array}$$

On obtient :

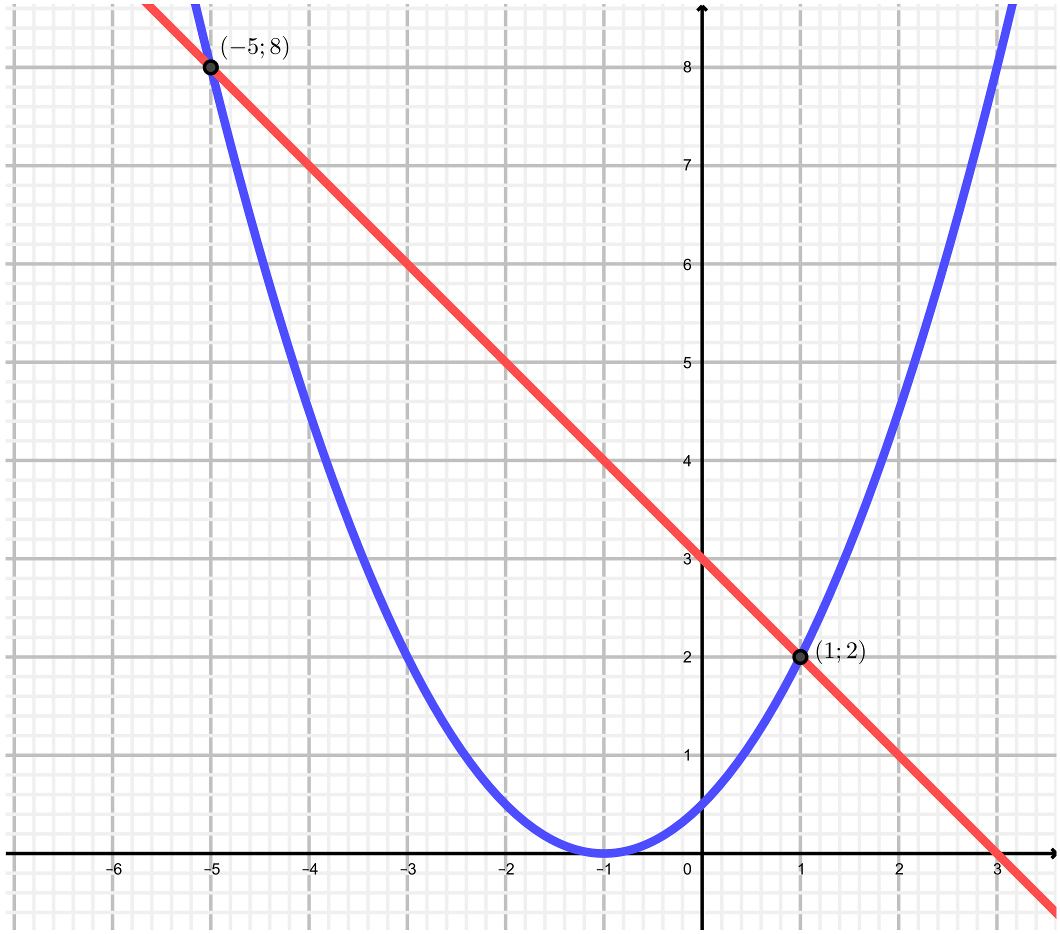
$$x_1 = -5 \text{ et } x_2 = 1.$$

Il s'agit là de la coordonnée x des deux points d'intersection, qui sont donc de la forme $(-5; ?)$ et $(1; ?)$.

Pour trouver leur coordonnée y respective, il suffit de remplacer la valeur de x dans l'une des deux fonctions.

$y = -(-5) + 3 = 8$. Donc le point est $(-5; 8)$.

$y = -1 + 3 = 2$. Donc le point est $(1; 2)$.



Exercice 6.12. Déterminer les coordonnées du (ou des) éventuel(s) point(s) d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ avec la droite d dans chacun des cas suivants.

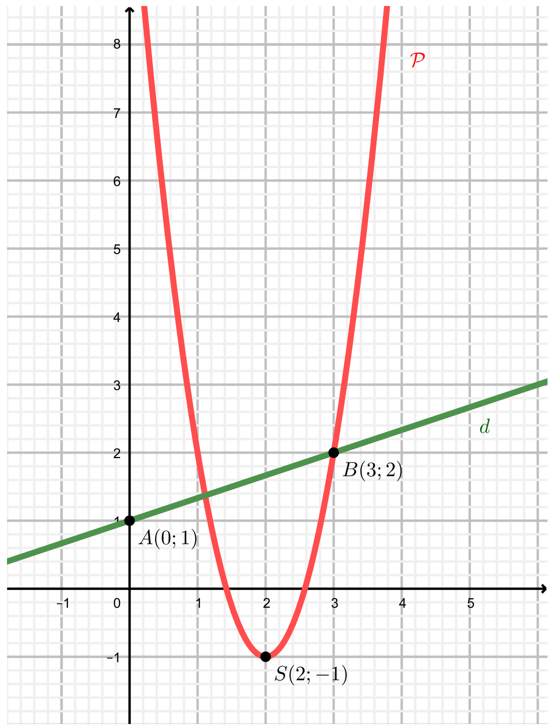
a) $\mathcal{P} : y = x^2 + 7x - 5$ et $d : y = 4x + 5$.
b) $\mathcal{P} : y = 4x^2 - x + 2$ et $d : y = 3x + 1$.
c) $\mathcal{P} : y = 7x^2 + 3x + 2$ et $d : y = x - 2$.

Exercice 6.13. Déterminer les coordonnées du (ou des) éventuel(s) point(s) d'intersection des paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ suivantes.

$$\mathcal{P}_1 : y = x^2 + 5x - 2;$$

$$\mathcal{P}_2 : y = 2x^2 + 11x - 9.$$

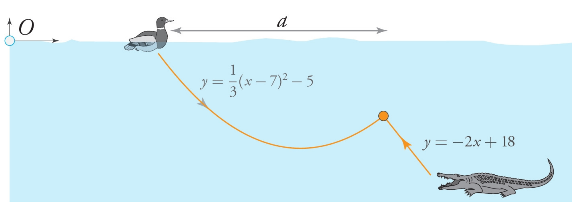
Exercice 6.14. Soit le graphe suivant.



a) Trouver l'équation de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite d.

b) Calculer les points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et d.

Exercice 6.15. Un canard flottant au-dessus d'un petit lac décide de plonger à la recherche de nourriture. La situation est illustrée dans le schéma ci-dessous, dans lequel les distances sont exprimées en mètres.



La trajectoire du canard lors de sa plongée est donnée par la fonction quadratique indiquée sur le schéma. A l'affût, au fond du lac, se trouve un crocodile rusé. Ce dernier s'élance en ligne droite vers le canard, après que ce dernier eut entamé sa remontée. La trajectoire du crocodile est également représentée sur le schéma.

a) A quelle distance de la berge (origine O) le canard se situe-t-il initialement ?

b) A quelle profondeur maximale le canard plonge-t-il ?

c) Quelle est la distance a ? (distance par rapport à la surface du lac, entre le point initial de flottaison du canard et l'endroit de sa fin tragique).

Exercice 6.16 (Examen 2005). La parabole $\mathcal{P}$ est donnée par l'équation

$$y = -2x^2 - 4x + 6.$$

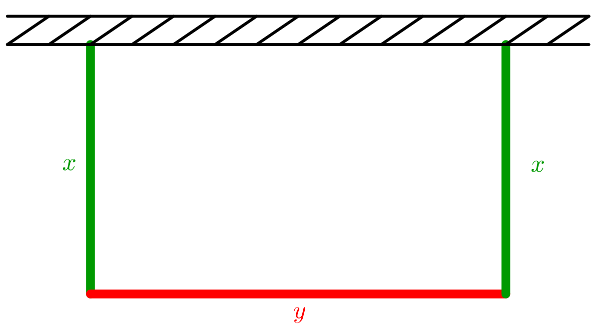
a) Répondre aux différentes questions et montrer tous les calculs.
   a) Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}$.
   b) Calculer les coordonnées de l'intersection de $\mathcal{P}$ avec les axes.
   c) Tracer la parabole (1 unité = 2 carrés).

b) En observant le graphe de la fonction, répondre aux questions suivantes.
   a) Combien de solutions possède l'équation $-2x^2 - 4x + 6 = 100$?
   b) Combien de solutions possède l'équation $-2x^2 - 4x + 6 = -100$?
   c) Combien de solutions possède l'équation $-2x^2 - 4x + 6 = 8$?
   d) Combien de solutions possède l'équation $-2x^2 - 4x + 6 = x$?

6.6 Optimisation du deuxième degré

Exemple. On dispose de barrières d'une longueur totale de 100 mètres pour construire un enclos rectangulaire le long d'un mur rectiligne. Quelles dimensions faut-il donner à cet enclos pour que le pré qu'il délimite ait une aire maximale ?

Posons x et y comme indiqué dans la figure ci-dessous.



On remarque que x et y ne peuvent pas prendre n'importe quelles valeurs. Par exemple, si $x = 40$ m, alors y est contraint de valoir 20 m vu que l'on dispose de 100 m de barrière au total.

On en tire ainsi la contrainte suivante :

Contrainte :

$$\begin{aligned} 2x + y &= 100 \\ y &= 100 - 2x. \end{aligned}$$

L'aire de l'enclos est donnée par

$$A = x \cdot y = x \cdot (100 - 2x) = 100x - 2x^2.$$

Ainsi, la fonction $A(x) = -2x^2 + 100x$ détermine l'aire de l'enclos en fonction de la valeur du côté x.

L'abscisse de son sommet, qui sera un maximum vu que $a = -2 < 0$ est donnée par

$$x_S = \frac{-100}{2 \cdot (-2)} = 25.$$

Ainsi, l'enclos cherché aura pour dimensions $x = 25$ m et $y = 100 - 2 \cdot 25 = 50$ m. Son aire est donnée par

$$A(25) = 25 \cdot 50 = 1250 \text{ m}^2.$$

Exemple. Une société immobilière possède 160 appartements qui sont tous occupés quand le loyer est de 1'000 francs par mois. La société estime qu'à chaque augmentation de loyer de 100 francs, dix appartements sont libérés. Quel est actuellement le revenu mensuel de la société ? Quel devrait être le loyer pour que la société ait un revenu mensuel maximal ?

Actuellement, le revenu de la société est donné par

$$R = 160 \cdot 1'000 = 160'000 \text{ francs.}$$

Posons x le nombre d'augmentations de loyer de 100 francs.

Il convient de s'aider du tableau ci-dessous.

Nombre d'augmentations	Loyer par appartement	Nombre d'appartements	Revenu de la société
0	1'000	160	$1'000 \cdot 160 = 160'000$
1	$1'000 + 100 \cdot 1 = 1'100$	$160 - 10 \cdot 1 = 150$	$1'100 \cdot 150 = 165'000$
2	$1'000 + 100 \cdot 2 = 1'200$	$160 - 10 \cdot 2 = 140$	$1'200 \cdot 140 = 168'000$
3	$1'000 + 100 \cdot 3 = 1'300$	$160 - 10 \cdot 3 = 130$	$1'300 \cdot 130 = 169'000$
x	$1'000 + 100 \cdot x$	$160 - 10 \cdot x$	$(1'000 + 100x) \cdot (160 - 10x)$

Le revenu $R(x)$ est donc donné par

$$\begin{aligned} R(x) &= (1'000 + 100x) \cdot (160 - 10x) \\ &= 160'000 - 10'000x + 16'000x - 1'000x^2 \\ &= -1'000x^2 + 6'000x + 160'000. \end{aligned}$$

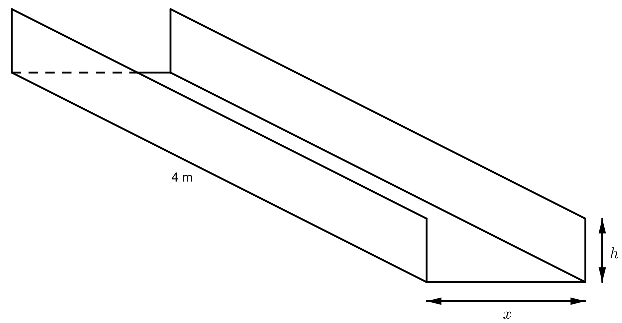
Pour trouver le revenu maximal de la société, il suffit de déterminer la première coordonnée du sommet :

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-6'000}{2 \cdot (-1'000)} = 3.$$

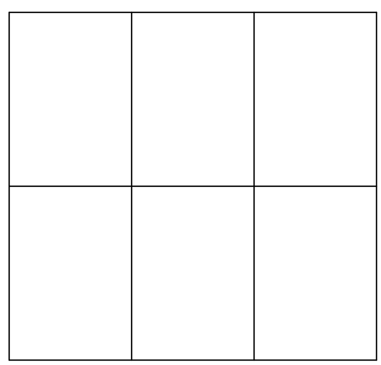
Ainsi, le loyer permettant de maximiser le revenu correspond à 3 augmentations de 100 francs, c'est-à-dire à 1'300 francs.

Exercice 6.17. Parmi tous les rectangles de périmètre 10, quel est celui dont l'aire est la plus grande ? Quelle est cette aire ?

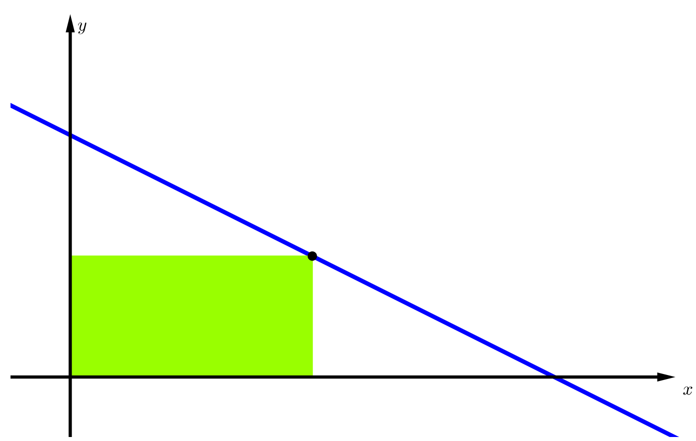
Exercice 6.18. Une plaque de métal rectangulaire longue de 4 mètres et large de 40 centimètres est pliée de sorte à former une gouttière en forme de parallélépipède rectangle. Quelles dimensions faut-il donner à cette gouttière pour qu'elle ait un volume maximal ?



Exercice 6.19. On dispose de 288 mètres de clôture grillagée pour construire 6 enclos identiques pour un zoo selon le plan ci-dessous. Quelles dimensions faut-il donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol ?



Exercice 6.20. Soit le rectangle coloré ci-dessous, limité par l'axe O_x, l'axe O_y et la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Quelles sont les dimensions de ce rectangle, sachant qu'il est d'aire maximale ?



Exercice 6.21. Une société immobilière possède 180 studios qui sont tous occupés quand le loyer est de 300 francs par mois. La société estime qu'à chaque augmentation de loyer de 10 francs, 5 studios sont libérés. Quel devrait être le loyer pour que la société ait un revenu mensuel maximal ?

Exercice 6.22. Lorsque les places pour un match de football sont de 40 francs, il y a 14'000 spectateurs. Chaque augmentation de 1 franc fait perdre 280 spectateurs. Quel prix d'entrée doit-on fixer pour maximiser la recette du club ?

Exercice 6.23. Un parking d'une capacité totale de 600 places loue ses places à 120 francs par mois. Actuellement, 480 places sont occupées. Si on diminuait le prix mensuel de 1 franc, alors 5 places supplémentaires seraient occupées. Quel devrait être le prix mensuel pour maximiser le revenu ?

Exercice 6.24. Soient la droite $d : y = -x + 1$ et la parabole $p : y = x^2 + 2x - 3$.

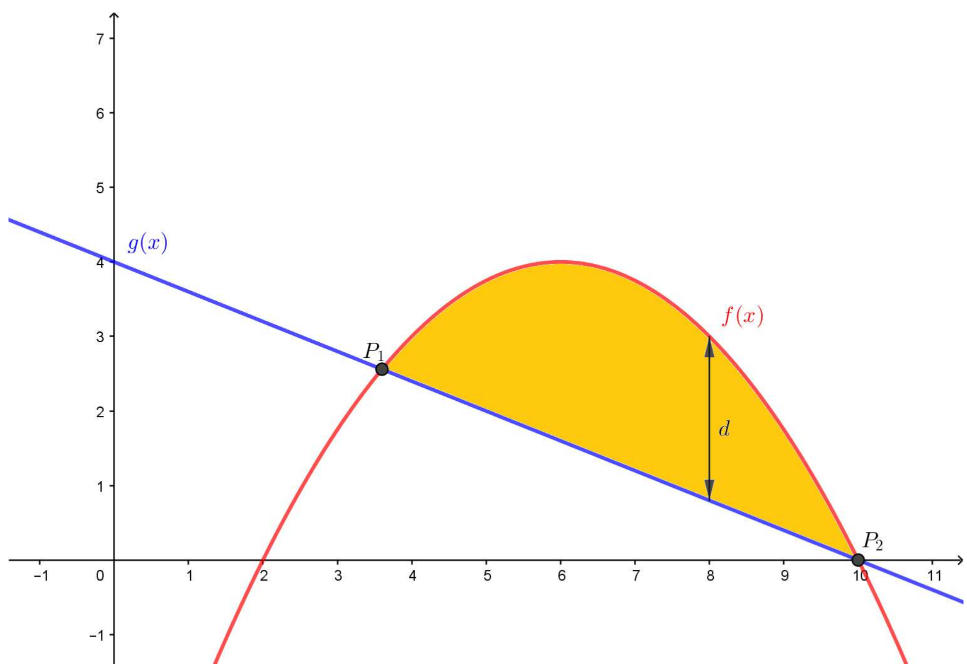
a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection $I_1(x_1; y_1)$ et $I_2(x_2; y_2)$ entre d et p.

b) Trouver la distance verticale maximale entre la parabole et la droite dans l'intervalle $[x_1; x_2]$.

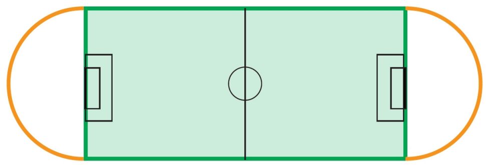
Exercice 6.25. On donne l'équation d'une parabole $f(x) = -0,25x^2 + 3x - 5$ ainsi que l'équation d'une droite $g(x) = -0,4x + 4$.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection P_1 et P_2 entre la droite et la parabole.

b) Déterminer la distance maximale d entre la parabole et la droite dans la région hachurée.



Exercice 6.26. Une piste d'athlétisme de 400 m est formée par deux demi-disques en ses extrêmités, à l'image de ce qui apparaît ci-dessous. Déterminer la longueur et la largeur du terrain de football d'aire maximale.
Rappel : Le périmètre P d'un cercle est donné par $P = 2\pi r$.



6.7 Application à l'économie

Cette section constitue la suite de celle se trouvant dans le chapitre 5. Cependant, nous considérerons une variable supplémentaire. En effet, on sait que le nombre d'objets vendus dépend fortement de son prix. Plus un article est cher, moins il y aura de demande et vice-versa. Il existe donc une relation directe entre le nombre d'objets x, à savoir la demande et le prix de vente p :

$$x = m - np.$$

Ici, la valeur m décrit le nombre d'objets maximal que l'on peut mettre à disposition alors que la valeur de n représente la quantité vendue en moins pour chaque augmentation du prix de 1 franc. Grâce à cette relation, il sera désormais possible d'exprimer les coûts, le revenu ainsi que le bénéfice directement en fonction du prix p et plus par rapport au nombre d'objets x.

Exemple. Une fabrique produit des grille-pains. Une étude lui a permis d'établir que la demande x en fonction du prix p est donnée par la relation $x = 10'200 - 300p$. La compagnie calcule que la production va requérir un investissement fixe de 14'400 francs auquel s'ajouteront 8 francs par grille-pain fabriqué. Quel prix la compagnie devra-t-elle fixer pour ses grille-pains si elle entend réaliser un bénéfice maximal ?

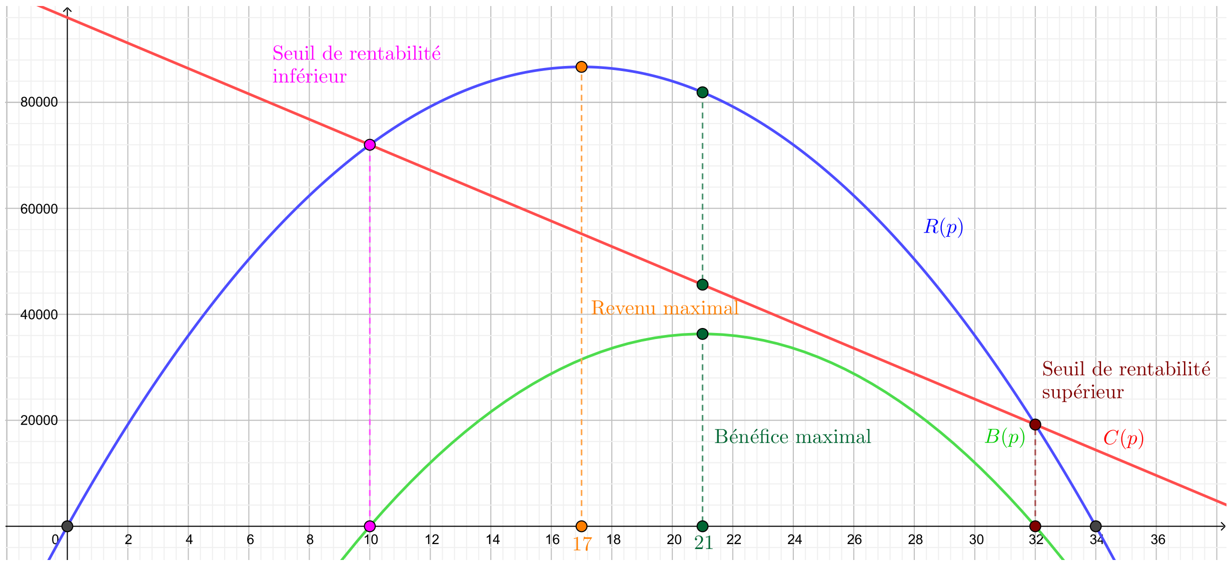
On commence par déterminer les fonctions économiques :

$$\begin{array}{lrl}
\textbf{Demande :} & x & = 10'200 - 300p. \\
\textbf{Revenu :} & R(p) & = px = p(10'200 - 300p) = 10'200p - 300p^2. \\
\textbf{Coûts :} & C(p) & = 14'400 + 8x = 14'400 + 8(10'200 - 300p) = -2'400p + 96'000. \\
\textbf{Bénéfice :} & B(p) & = R(p) - C(p) = 10'200p - 300p^2 - (-2'400p + 96'000) \\
 & & = -300p^2 + 12'600p - 96'000.
\end{array}$$

En posant $R(p) = 0$, on établit que le revenu est nul pour des prix de vente de $p = 0$ et $p = 34$. Pour un prix compris entre ces deux valeurs, le revenu sera positif. Le revenu sera maximal au prix de vente $p = \dfrac{0 + 34}{2} = 17$ francs.

En résolvant l'équation $B(p) = 0$, ou de manière équivalente $R(p) = C(p)$, on trouve les seuils de rentabilité $p = 10$ francs et $p = 32$ francs.

Au prix de vente $p = \dfrac{10 + 32}{2} = 21$ francs, on aura un bénéfice maximal de $B(21) = 36'300$ francs.



Exercice 6.27. Une étude de marché a permis d'établir la relation suivante entre le prix p d'une calculatrice et le volume x de calculatrices vendues :

$$x = 3'920 - 28p.$$

Le coût de production de x calculatrices (en francs) est donné par

$$C(x) = 30x + 11'872.$$

a) Déterminer le revenu $R(p)$ en fonction du prix de vente p des calculatrices.

b) Déterminer le coût de production $C(p)$ en fonction du prix de vente p des calculatrices.

c) Déterminer le profit maximal.

Exercice 6.28. Un auteur de livre de mathématiques souhaite vendre son ouvrage. Une étude de marché lui indique que la demande s'exprime par $x = 1'200 - 15p$ où p est le prix de vente du livre. Les coûts de production sont évalués à 9'300 francs de frais fixes et 8 francs de frais variables par livre. A quel prix de vente doit-il fixer son ouvrage s'il désire

a) Un revenu maximal ? Quel sera alors ce revenu ?

b) Atteindre le seuil de rentabilité inférieur ?

c) Atteindre le seuil de rentabilité supérieur ?

d) Un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

Exercice 6.29. On souhaite mettre sur le marché un nouveau produit dont la demande (nombre d'objets vendus) est donné par

$$x = 660 - 22p$$

avec p le prix de vente. Les coûts de production se montent à 820 francs plus 7 francs de frais variables par objet.

a) Déterminer les fonctions qui donnent le revenu, le coût et le bénéfice en fonction du prix.
b) Déterminer la fourchette de prix qui assure un revenu positif.
c) Calculer le prix et le nombre d'objets qui maximisent le revenu. Quel est ce revenu maximal ?
d) Déterminer la fourchette de prix qui permet de réaliser un bénéfice.
e) Calculer le prix et le nombre d'objets qui maximisent le bénéfice. Quel est ce bénéfice ?

Exercice 6.30. La compagnie MALBARRÉE lance sur le marché un nouveau cadenas. Une étude de la demande et de ses coûts de production lui a permis d'établir que son profit mensuel P en fonction du prix de vente x est donné par

$$P(x) = -210x^2 + 4'620x - 13'650.$$

a) Quel sera son profit mensuel si le prix de vente est de 8 francs ?
b) Quel doit être le prix de vente pour que le profit soit nul ?
c) Quel prix de vente la compagnie doit-elle fixer si elle veut obtenir un profit maximal ?
d) Que vaut ce profit ?
e) 20 francs pour un cadenas, cela paraît-il une bonne idée ?
f) Sur quel intervalle le profit est-il positif et augmente ?

Exercice 6.31. Un jeune inventeur entend commercialiser un disque de stationnement électronique. Après un investissement initial en équipement de 72'000 francs, la fabrication lui coûterait 12 francs par article. D'après une étude de marché, la demande x du produit en fonction du prix p serait donnée par la relation

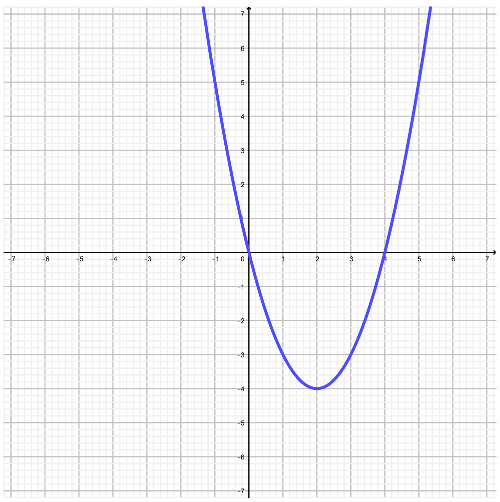
$$x = 42'000 - 1'400p.$$

a) Déterminer, dans ces conditions le prix unitaire qui amènera le plus grand bénéfice, le montant du bénéfice maximal et le nombre d'articles ainsi vendus.
b) Ce jeune inventeur croit bon de fixer le prix unitaire au-dessus de celui trouvé sous a). Il réalise alors un bénéfice de 35'800 francs. Quel prix de vente a-t-il fixé ?

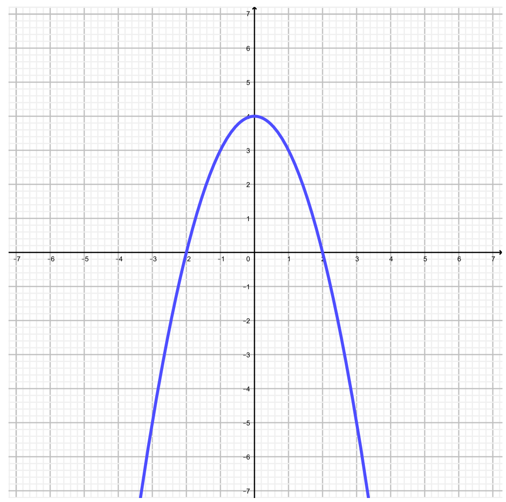
6.8 Solutions

Exercice 6.1.

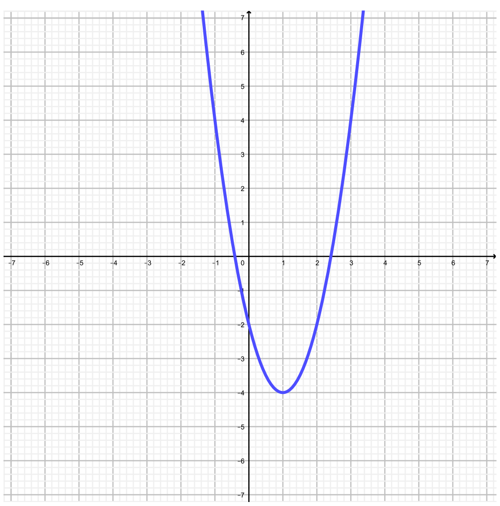
a)



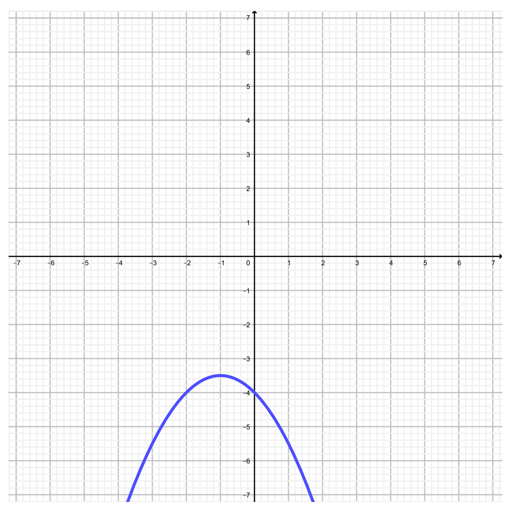
b)



c)



d)



Exercice 6.2.

a) Oui car $f(1) = 6$.

b) Non car $f(2) = 9$.

c) $y = -9$ car $f(3) = -9$.

Exercice 6.3.

a) $I_1(-1;0), I_2(3;0), I_3(0;-3)$ et $S(1;-4)$, minimum

b) $I_1(0;0), I_2(5;0)$ et $S\left(\frac{5}{2};\frac{25}{4}\right)$, maximum

c) $I(0;3)$ et $S(0;3)$, minimum

d) $I(0;-4)$ et $S\left(\frac{5}{4};-\frac{7}{8}\right)$, maximum

Exercice 6.4.

a) 5 m.

b) 3 m.

c) 7 m.

d) $3,4$ m.

Exercice 6.5.

a) $S\left(4;-3\right)$, minimum

b) $S\left(1;2\right)$, minimum

c) $S\left(2;0\right)$, minimum

d) $S\left(-3;0\right)$, maximum

e) $S\left(0;-1\right)$, minimum

f) $S\left(\frac{1}{2};-\frac{245}{4}\right)$, minimum

g) $S\left(\frac{1}{2};\frac{49}{2}\right)$, maximum

h) $S\left(10;0\right)$, maximum

i) $S\left(5;\frac{25}{2}\right)$, maximum

j) $S\left(-\frac{5}{2};-\frac{75}{4}\right)$, minimum

k) $S\left(0;-5\right)$, minimum

l) $S\left(0;7\right)$, minimum

Exercice 6.6.

a) $I_1(3;0), I_2(4;0)$ et $I_3(0;24)$

b) $I_1(-1;0), I_2(3;0)$ et $I_3(0;-6)$

c) $I_1(5;0), I_2(-3;0)$ et $I_3(0;5)$

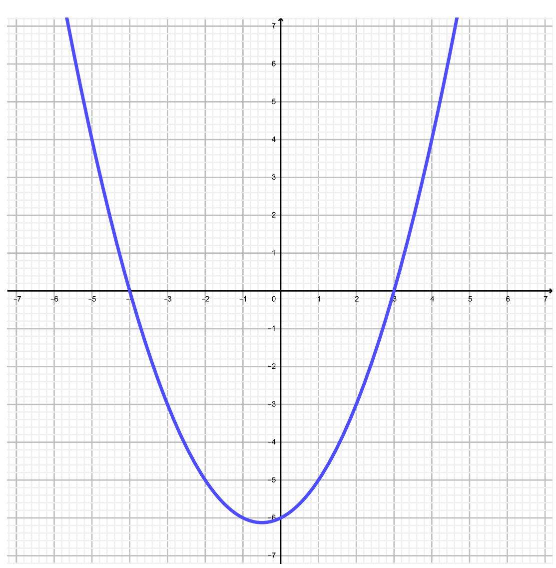
d) $I(0;-18)$

Exercice 6.7.

a) $I_1(-4;0)$, $I_2(3;0)$ et $I_3(0;-6)$.

b) $S\left(-\frac{1}{2};-\frac{49}{8}\right)$.

c)



Exercice 6.8.

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)(x-7)$ (forme polynomiale : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 14$).

$g(x) = -2x^2 - 2$.

$h(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2 + 2$ (forme polynomiale : $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 10$).

$i(x) = x(x-3)$ (forme polynomiale : $i(x) = x^2 - 3x$).

$j(x) = -\frac{1}{3}(x+5)^2 - 3$ (forme polynomiale : $j(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{34}{3}$).

Exercice 6.9. $f(x) = -2(x-5)(x+2)$.

Exercice 6.10. $f(x) = \frac{15}{16}(x+7)^2 - 8$.

Exercice 6.11. $2,39$ m.

Exercice 6.12.

a) $I_1(2;13)$ et $I_2(-5;-15)$.

b) $I\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

c) Pas d'intersection.

Exercice 6.13. $I_1(-7;12)$ et $I_2(1;4)$.

Exercice 6.14.

a) $\mathcal{P} : y = 3(x-2)^2 - 1$ et $d : y = \frac{1}{3}x + 1$.

b) $I_1\left(\frac{10}{9};\frac{37}{27}\right)$ et $I_2\,(3;2)$.

Exercice 6.15.

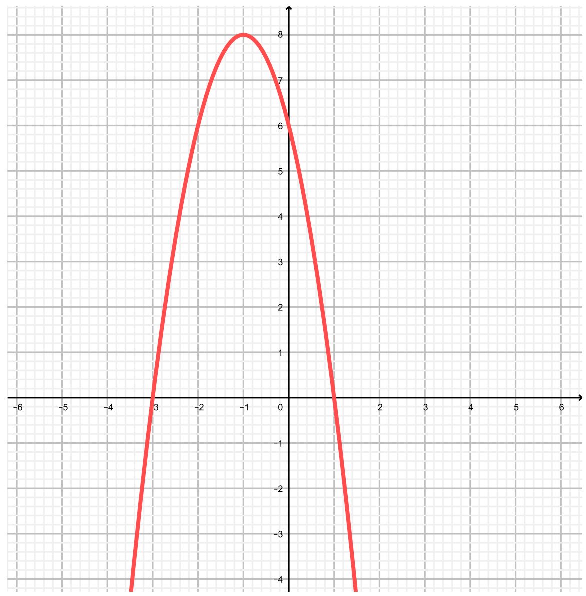
a) A $3,13$ m.

b) 5 m.

c) $a \cong 6,87$ m.

Exercice 6.16.

a) a) $S(-1;8)$.
   b) $I_1(-3;0)$, $I_2(1;0)$ et $I_3(0;6)$.
   c)



b) a) 0 solution.
   b) 2 solutions.
   c) 1 solution.
   d) 2 solutions.

Exercice 6.17. Un carré de côté $2,5$ et d'aire $6,25$.

Exercice 6.18. $x = 20$ cm et $h = 10$ cm.

Exercice 6.19. 16 m sur 18 m.

Exercice 6.20. 3 et $\frac{3}{2}$.

Exercice 6.21. 330 francs par mois.

Exercice 6.22. Le prix d'entrée doit être de 45 francs.

Exercice 6.23. 108 francs.

Exercice 6.24.

a) $I_1(-4;5)$ et $I_2(1;0)$.

b) $\frac{25}{4}$.

Exercice 6.25.

a) $(3,6;2,56)$ et $(10;0)$.

b) $2,56$.

Exercice 6.26. 100 m sur $\dfrac{200}{\pi} \cong 63,66$ m.

Exercice 6.27.

a) $R(p) = 3'920p - 28p^2$.

b) $C(p) = 129'472 - 840p$.

c) 72'828 francs.

Exercice 6.28.

a) 40 francs, 24'000 francs.

b) 18 francs.

c) 70 francs.

d) 44 francs, 10'140 francs de bénéfice.

Exercice 6.29.

a) $R(p) = 660p - 22p^2$, $C(p) = 5'440 - 154p$ et $B(p) = -22p^2 + 814p - 5'440$.

b) Entre 0 et 30 francs.

c) 330 objets au prix de 15 francs. Le revenu sera alors de 4'950 francs.

d) Entre environ $8,75$ francs et $28,25$ francs.

e) 253 objets au prix de $18,5$ francs. Le bénéfice sera de $2'089,5$ francs.

Exercice 6.30.

a) 9'870 francs.

b) Pour $3,50$ francs et pour $18,50$ francs.

c) 11 francs.

d) 11'760 francs.

e) Certainement pas, le profit serait négatif.

f) Entre les 2 prix suivants : 3,50 francs et 11 francs.

Exercice 6.31.

a) Le prix unitaire qui amènera le plus grand bénéfice est de 21 francs, le montant du bénéfice maximal de 41'400 et 12'600 articles seront ainsi vendus.

b) Le prix a été fixé à 23 francs.

6.9 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

6.1 ☐ Représenter le graphe d'une fonction du deuxième degré.

6.2 ☐ Calculer les coordonnées des intersection d'une parabole avec les axes.

6.3 ☐ Calculer les coordonnées du sommet d'une parabole et préciser la nature de celui-ci.

6.4 ☐ Déterminer l'équation d'une parabole (sous forme polynômiale, standard ou factorisée) à partir de son graphe et d'un point et son sommet ou de ses intersections avec l'axe O_x.

6.5 ☐ Calculer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection d'une parabole et d'une parabole ou d'une autre droite.

6.6 ☐ Résoudre un problème d'optimisation débouchant sur une fonction du deuxième degré.

6.7 ☐ Résoudre un problème lié à l'économie à l'aide des fonctions du deuxième degré.

Chapitre 7

Fonctions exponentielles et logarithmes

7.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous étudiions des fonctions dont l'expression fonctionnelle était de la forme

$$y = \text{variable}^{\text{constante}},$$

comme par exemple $f(x) = x^2$ ou $f(x) = 2x + 3$.

Ces fonctions étudiées jusqu'ici permettent de modéliser des phénomènes relativement simples comme les mouvements uniformes en physique ou l'intérêt simple en économie. Des processus plus sophistiqués, tels que l'intérêt composé (finance), la radioactivité (datation au carbone 14, déchets radioactifs, ...) ou l'évolution de populations (humaine, bactériologique, propagation d'un virus, proies-prédateurs, ...) pour ne citer que quelques exemples, font appel à des fonctions d'un genre différent : *les fonctions exponentielles et logarithmes*. En plus de cet aspect pratique, les fonctions exponentielles et logarithmes présentent des propriétés mathématiques remarquables.

Exemple. On plie une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur en deux, puis en quatre, puis en huit, et ainsi de suite. Serait-il possible d'atteindre une épaisseur qui dépasse :

$$2 \text{ m}, \ 20 \text{ m}, \ 1 \text{ km}, \ \text{ la distance Terre-Soleil ?}$$

D'une part, l'extrême minceur de 0,1 mm fait douter d'arriver à dépasser des grandeurs comme 20 m, 1 km, et encore plus la distance Terre-Soleil ; en doublant quelque chose de très petit, on obtient certainement quelque chose de très petit ! Mais, en le doublant un grand nombre de fois on finit par dépasser n'importe quel nombre. Pour se faire une idée, calculons les épaisseurs obtenues après les premiers pliages.

Nombre de pliages	Epaisseur en mm
0	$0,1$
1	$0,2$
2	$0,4$
3	$0,8$
4	$1,6$
5	$3,2$
6	$6,4$
7	$12,8$
8	$25,6$
9	$51,2$
10	$102,4$

On y observe qu'après 10 pliages l'épaisseur est de l'ordre de 10 cm, ce qui n'est pas encore très grand. Après 15 pliages, l'épaisseur est de l'ordre de 3,2 m, ce qui est déjà plus surprenant. Après 20 pliages, elle est de l'ordre de 100 m et enfin après 60 pliages, elle vaut $0,1 \cdot 2^{60}$ mm. Or,

$$0,1 \cdot 2^{60} = 1,152922 \cdot 10^{17}.$$

il s'agit d'un nombre de millimètres. Comme 1 km $= 10^6$ mm, cela fait quand même

$$115'292'200'000 \text{ km}.$$

Pour comparaison, la distance de la Terre au Soleil vaut

$$149'597'870'700 \text{ km}.$$

Exemple. Il arrive qu'on reçoive dans sa boîte aux lettres un message libellé comme suit : "Quand vous recevrez cette lettre, envoyez-moi 10 francs" puis recopiez la lettre dix fois et envoyez-la à dix de vos connaissances. Ainsi, vous recevrez 100 francs après avoir donné seulement 10 francs. Merci de ne pas interrompre cette chaîne".

Que penser d'une telle pratique ?

Supposons que tout le monde joue le jeu. Au premier coup, 10 lettres sont envoyées, au deuxième, $10^2 = 100$, au troisième $10^3 = 1000$, etc. Ainsi, après seulement 10 coups, le nombre de lettres écrites à cette étape (et de personnes ainsi engagées) atteint

$$10^{10} = 10'000'000'000,$$

ce qui est plus que la population mondiale ! C'est donc l'impasse. Une foule de gens auront perdu 10 francs, à savoir tous ceux qui ne trouveront plus de personnes après eux pour continuer. On comprend que la loi interdise ce genre de pratique : les premiers dans la chaîne volent tout simplement les suivants.

Exemple. Une légende, probablement apocryphe, raconte que Sissa ayant inventé le jeu d'échecs fut convoqué par son maître, roi de Perse : “Ton jeu m'a redonné la joie de vivre ! Je t'offre ce que tu désires !”

Le sage ne voulait rien et ne dit mot. Le roi offensé s'énerva : “Parle donc, insolent ! Tu as peur que je ne puisse exaucer tes souhaits ?”

Le sage fut blessé par ce ton et décida de se venger : “J'accepte ton présent. Tu feras déposer un grain de blé sur la première case de l'échiquier.”

“Et c'est tout ? Te moquerais-tu de moi ?”

“Pas du tout Sire. Vous ferez mettre ensuite 2 grains sur la deuxième case, 4 sur la troisième et ainsi de suite...”

Le roi s'énerva pour de bon : “Puisque tu honores si mal ma générosité, vas-t'en ! Ton sac de blé te sera porté demain et ne me dérange plus !”

Le lendemain matin, le roi fut réveillé par son intendant affolé : “Sire, c'est une catastrophe ! Nous ne pouvons pas livrer le blé ! Nos mathématiciens ont travaillé toute la nuit : il n'y a pas assez de blé dans tout le royaume pour exaucer le souhait du savant”.

En effet, rien que sur la dernière case il faudrait $2^{63} = 9'223'372'036'854'775'808$ grains de blé.

S'il voulait fournir la quantité totale de blé, le roi devrait accumuler toutes les moissons réalisées sur Terre depuis 5000 ans ! Si son silo mesure 4 mètres sur 10, sa hauteur devra être de 300 millions de kilomètres !

7.1.1 Fonctions exponentielles

Définition. Une *fonction exponentielle* est une fonction de la forme

$$y = \text{base constante}^{\text{variable}},$$

avec la base constante strictement positive et différente de 1.

Exemple. $f(x) = 2^x$ ou $f(x) = 0,5^x$.

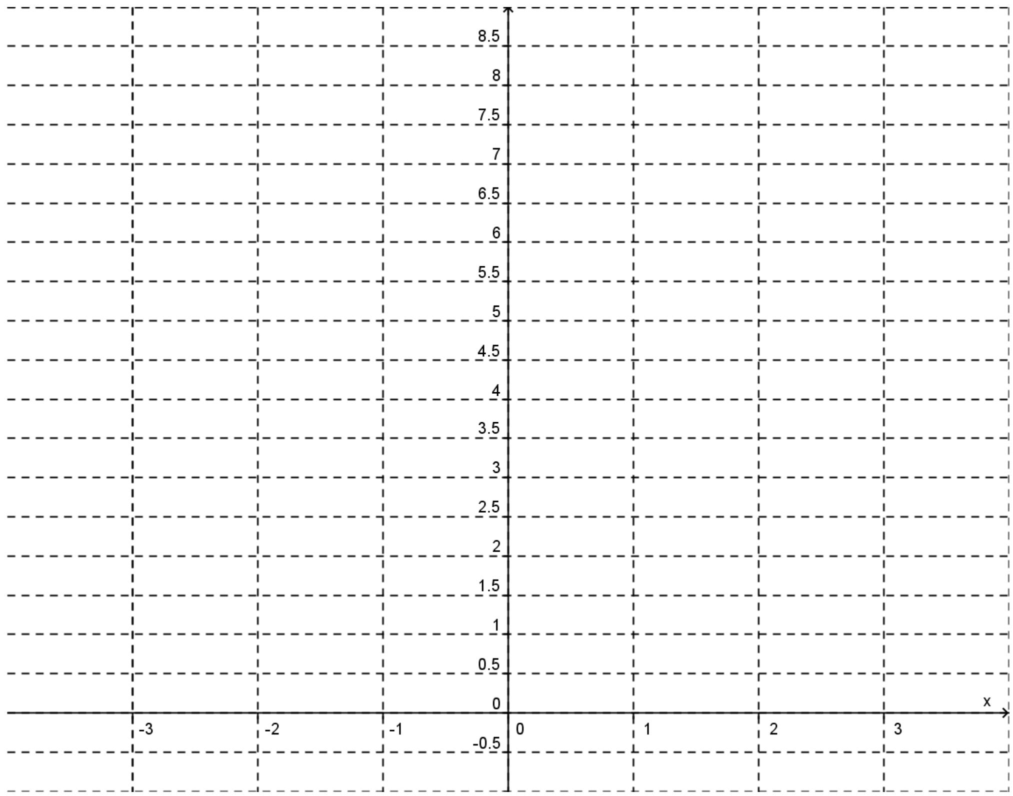
On dit que $f(x) = 2^x$ est une *fonction exponentielle de base 2.*

Exemple. Soient $f(x) = 2^x$ et $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Remplissons les tableaux de valeurs ci-dessous afin de pouvoir tracer les fonctions f et g.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							



Exercice 7.1. Représenter graphiquement les fonctions f ci-dessous.

a) $f(x) = 5^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

c) $f(x) = 10^x$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

Pour quelles valeurs de a la fonction $f(x) = a^x$ est-elle croissante ? Décroissante ?

7.2 Equations exponentielles simples

Tout d'abord, procédons à un rappel des propriétés des puissances :

1. $a^0 = 1$.
2. $a^1 = a$.
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
5. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
6. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.
7. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Nous commencerons par traiter deux cas précis.

Exemple (mêmes bases). Résoudre l'équation $5^{2x-3} = 5^{x+7}$.

$$\begin{array}{rcl|l} 5^{2x-3} & = & 5^{x+7} & \text{On en déduit} \\ 2x-3 & = & x+7 & -x+3 \\ x & = & 10. & \end{array}$$

Exemple (bases reliées). Résoudre l'équation $3^{5x-8} = 9^{x+2}$.

$$\begin{array}{rcl|l} 3^{5x-8} & = & 9^{x+2} & \text{On exprime avec la même base} \\ 3^{5x-8} & = & (3^2)^{x+2} & \text{Propriété des puissances de puissances} \\ 3^{5x-8} & = & 3^{2(x+2)} & \\ 3^{5x-8} & = & 3^{2x+4} & \text{On en déduit} \\ 5x-8 & = & 2x+4 & -2x+8 \\ 3x & = & 12 & :3 \\ x & = & 4. & \end{array}$$

Exercice 7.2. Résoudre les équations suivantes.

a) $7^{x+6} = 7^{3x-4}$ b) $6^{7-x} = 6^{2x+1}$

c) $3^{2x+3} = 3^{(x^2)}$ d) $2^x = 8$

e) $3^{4x} = 9^{x+5}$ f) $3^{5x-8} = 9^{x+2}$

g) $9^{(x^2)} = 3^{3x+2}$ h) $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

i) $4^{x-3} = 8^{4-x}$ j) $5^{x+2} \cdot 25^{-x} = 625$

k) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} = 2$ l) $2^{-100x} = 0,5^{x-4}$

7.3 Formule des intérêts composés

Les fonctions exponentielles sont très utilisées lorsque l'on décrit l'évolution de différentes populations (animales, bactéries, etc.), l'évolution d'un prix (maison, voiture, etc.) ou encore pour le calcul d'intérêts composés.

Ces derniers illustrent parfaitement une croissance exponentielle.

Si l'on place 1'000 francs sur un compte en banque à un taux annuel de 9%, nous aurons après un an la somme de

$$C_1 = 1'000 + 1'000 \cdot 0,09 = 1'090 \text{ francs.}$$

L'année suivante, nous n'aurons pas une augmentation de 90 francs, car nous calculons le 9% sur le capital en place, soit 1'090 francs.

Ainsi,

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot 9\% = 1'090 + 1'090 \cdot 0,09 = 1'188,10 \text{ francs.}$$

De manière générale, si l'on place une somme C_0 sur un compte en banque à un taux de t (en code décimal), on peut calculer les différents capitaux de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & C_0 + C_0 \cdot t = C_0 \cdot (1+t) \\ C_2 & = & C_1 + C_1 \cdot t = C_1 \cdot (1+t) = C_0 \cdot (1+t) \cdot (1+t) = C_0 \cdot (1+t)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_n & = & C_0 \cdot (1+t)^n. \end{array}$$

Ici, n représente la durée, qui peut être exprimée en heures, jours, semaines, mois, années, etc. selon le contexte.

Théorème. *La formule des intérêts composés est*

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1+t)^n.}$$

où

$$\begin{array}{rcl} C_n & = & \textit{Capital final (après n années, n jours etc.).} \\ t & = & \textit{Le taux d'intérêt (ATTENTION, à noter en code décimal!).} \\ n & = & \textit{La durée.} \\ C_0 & = & \textit{Le capital initial.} \end{array}$$

Remarque. En cas d'amortissement ou si la valeur diminue au fil du temps, t est négatif.

Exemple.

1. On place 1'000 francs sur un compte en banque à un taux de 3,5% annuel. A combien se montera le capital dans 7 ans ?
   On sait que $C_0 = 1'000$, $t = 0,035$ et $n = 7$. On cherche C_7.
   $$C_7 = 1'000(1+0,035)^7 \cong 1'272,30 \text{ francs.}$$
2. On amortit l'achat d'une voiture au taux annuel de t. Sachant que son prix initial était de 40'000 francs, déterminer le taux t pour qu'il ne reste plus que 10'000 francs à rembourser après 9 ans.
   On sait que $n = 9$, $C_0 = 40'000$ et $C_9 = 10'000$. On cherche t.
   $$\begin{array}{rcl|l} 10'000 & = & 40'000(1+t)^9 & : 40'000 \\ 0,25 & = & (1+t)^9 & \sqrt[9]{\ } \\ 0,857 & \cong & 1+t & -1 \\ t & \cong & -0,143. & \end{array}$$
   Donc $t \cong -14,3\%$.

Exercice 7.3. Un capital placé au taux d'intérêt de 5% vaut aujourd'hui 1'000 francs.

a) Quelle sera sa valeur dans 6 ans ?

b) Quelle était sa valeur il y a 4 ans ?

c) A quel taux faudrait-il le placer pour qu'il double en 11 ans ?

Exercice 7.4. Une population de 350 élans, tous âgés d'un an, est introduite dans une réserve naturelle. Chaque année, 8% de l'effectif disparaît. Donner le nombre approximatif d'animaux survivant après 5, 8 et 12 ans.

Exercice 7.5. Une maladie est observée dans un pays et on désire étudier la vitesse de sa propagation. On dénombre aujourd'hui 1'000 personnes atteintes, et on a constaté qu'en un mois, la quantité de malades augmente de 14% par rapport au mois précédent.

a) Déterminer la fonction $M(t)$ qui évalue le nombre de malades en fonction du nombre t de mois écoulés depuis aujourd'hui.

b) Combien y aura-t-il de malades dans trois mois ?

c) Combien y avait-il de malades il y a deux mois ?

Exercice 7.6. Une forêt s'étend exponentiellement. Elle occupe aujourd'hui $72'515$ m^3. Il y a 12 ans, elle occupait $47'228,5$ m^3.

a) Quel est, en %, le taux d'accroissement annuel de cette forêt ?

b) Quel volume occupait-elle il y a 5 ans ?

c) Quel volume occupera-t-elle dans 7 ans ?

7.4 Logarithmes

Exemple. Après combien d'années est-ce que 1'000 francs placés sur un compte à 2% atteindront la somme de 1'268,24 francs ?

Pour répondre à une telle question, il s'agit de résoudre l'équation

$$1'268,24 = 1'000(1+0,02)^n.$$

Or nous ne disposons pas d'outil pour résoudre une équation dans laquelle l'inconnue est un exposant.

Ce qui suit va nous aider à pallier ce problème.

Définition. Une *fonction logarithmique* de base a est définie comme la fonction inverse de l'exponentielle de base a. Nous avons la relation

$$\boxed{y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y.}$$

Où a est un nombre réel positif différent de 1 et x un nombre réel strictement positif.

En d'autres termes, le logarithme répond à la question suivante :

$$\boxed{\text{"}a \text{ puissance combien donne } x\,\text{?"}}$$

Exemple.

1. $\log_2(8) = 3$ car $2^3 = 8$.
2. $\log_3(27) = 3$ car $3^3 = 27$.
3. $\log_4(2) = \frac{1}{2}$ car $4^{\frac{1}{2}} = 2$.
4. $\log_{10}(10) = 1$ car $10^1 = 10$.
5. $\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$ car $10^{-2} = \frac{1}{100}$.
6. $\log_3(1) = 0$ car $3^0 = 1$.
7. $\log_2(-4)$ n'existe pas. En effet, il n'est pas possible d'obtenir un nombre négatif par n'importe quelle puissance de 2.
8. Il en est de même pour $\log_a(0)$.

Remarque.

1. Il est impossible de calculer le logarithme d'un nombre négatif ou nul.
2. Lorsqu'aucune base n'est précisée, on considère qu'il s'agit d'une base 10. Autrement dit, $\log(x) = \log_{10}(x)$.
3. On appelle *logarithme naturel* ou *logarithme népérien* le logarithme en base $e \cong 2,718$. On le note $\ln(x)$. Le nombre e est une constante mathématique appelée *nombre d'Euler*, d'après le nom de ce mathématicien bâlois (1707-1783). Elle est utilisée dans beaucoup de domaines comme l'évolution de population ou encore le calcul différentiel et intégral.

Exercice 7.7. Calculer les logarithmes suivants.

a) $\log_{10}(1'000)$ b) $\log_2(8)$
c) $\log_3(27)$ d) $\log_2(64)$
e) $\log_2(1'024)$ f) $\log_{10}(10^7)$
g) $\log_3(3)$ h) $\log_5(1)$
i) $\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)$ j) $\log_9\left(\frac{1}{81}\right)$
k) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$ l) $\log_3\left(\sqrt{3}\right)$
m) $\log_{16}(4)$ n) $\log_5\left(\sqrt[9]{5}\right)$
o) $\ln(e^3)$ p) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

Exercice 7.8. Trouver, si elle existe, la valeur de x qui vérifie les égalités suivantes.

a) $\log_2(x) = 4$ b) $\log_3(x) = 5$
c) $\log_4(x) = 3$ d) $\log_x(256) = 4$
e) $\log_x(125) = 3$ f) $\log_x(1'000) = 3$

7.5 Fonctions logarithmiques

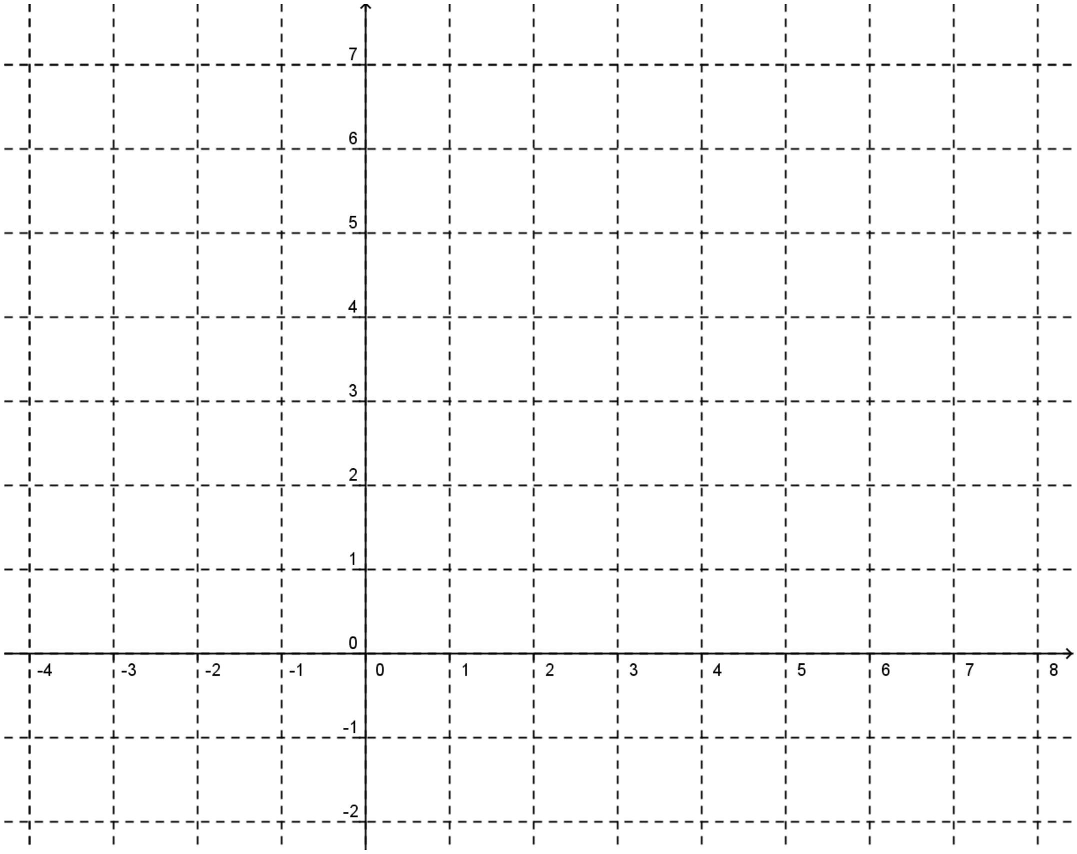
Exemple. Soient les fonctions

$$f(x) = 2^x \text{ et } g(x) = \log_2(x).$$

Remplissons ces tableaux de valeurs et traçons les fonctions.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

x	-1	0	$0,25$	$0,5$	1	2	4	8
$g(x)$								



Traçons maintenant la droite d'équation $y = x$.

Comme la fonction $g(x) = \log_2(x)$ est l'inverse de la fonction $f(x) = 2^x$, on remarque qu'elles sont parfaitement symétriques par rapport à la droite $y = x$.

7.6 Propriétés des logarithmes

Théorème. *Pour toute base a, on a*

1. $\log_a(1) = 0$.
2. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
3. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
4. $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$

Preuve.

1. $\log_a(1) = 0$ car $a^0 = 1$.
2. Il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tels que
$$x = a^u \text{ et } y = a^v.$$
Dans ce cas, on a
$$\log_a(x) = \log_a(a^u) = u\,;$$
$$\log_a(y) = \log_a(a^v) = v.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\log_a(xy) &= \log_a(a^u \cdot a^v)\\ &= \log_a(a^{u+v})\\ &= u+v\\ &= \log_a(x)+\log_a(y)\end{aligned}$$

3. On a

$$\log_a(x) = \log_a\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right) + \log_a(y).$$

Ainsi, on a bien

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y).$$

4. Posons $m = \log_a(x)$.
Sous forme exponentielle, on a

$$\begin{array}{rcl|l} x &=& a^m & (...)^n \\ x^n &=& (a^m)^n & \\ x^n &=& a^{mn}. & \end{array}$$

Si on retourne sous écriture logarithmique, nous obtenons

$$\log_a(x^n) = mn.$$

Comme $m = \log_a(x)$, on a bien

$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x).$$

□

Exercice 7.9. Calculer les expressions ci-dessous à l'aide des propriétés des logarithmes.

a) $\log_5(100) - \log_5(4)$

b) $\log_{10}(6) - \log_{10}(6'000)$

c) $\log_3\left(\frac{9}{2}\right) + \log_3(6)$

d) $2\cdot\log_{10}(5) + \log_{10}(4)$

e) $\frac{1}{2}\cdot\log_4(16) - \frac{1}{3}\log_4(8)$

f) $2\cdot\log_8\left(\sqrt[4]{8}\right)$

7.7 Equations exponentielles et logarithmiques

Nous allons traiter deux cas de figure.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl|l} \log_6(4x-5) &=& \log_6(2x+1) & \\ 4x-5 &=& 2x+1 & -2x+5 \\ 2x &=& 6 & :2 \\ x &=& 3. & \end{array}$$

Il convient de vérifier qu'en remplaçant x par 3 dans l'équation de départ, on ne soit pas amené à calculer le logarithme de 0 ou d'un nombre négatif. Ici, on obtient bien le logarithme de 7 des deux côtés de l'équation de départ.

Ainsi, $x = 3$ est bien solution.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl|l} \log_4(5+x) & = & 3 & \text{Ecriture exponentielle} \\ 5+x & = & 4^3 & \\ 5+x & = & 64 & -5 \\ x & = & 59. & \end{array}$$

Après vérification, $x = 59$ est bien solution de l'équation.

Exercice 7.10. Résoudre.

a) $\log_4(x) = \log_4(8-x)$
b) $\log_5(x-2) = \log_5(3x+7)$
c) $\log_{10}(x-12) = \log_{10}(-3x-4)$
d) $\log_4(x+4) = \log_4(1-x)$
e) $\log_{10}(2x-3) = \log_{10}(3x+1)$
f) $\log_3(x-4) = 2$
g) $\log_2(x-5) = 4$
h) $\log_9(x) = \dfrac{1}{2}$
i) $\log_4(3x+3) = \log_4(5) + \log_4(3)$
j) $\ln(2x-6) = \ln(12) - \ln(3)$
k) $3\log_{10}(x) = 2\log_{10}(8)$
l) $\log_2(x^2-4) = 2 \cdot \log_2(x+3)$

Exercice 7.11. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $17^x = 4'913$
b) $10^x = 350$
c) $100 \cdot 9^x = 6'561$
d) $3 \cdot e^x - 250 = 1'625$

7.8 Changement de base

Calculer $\log_3(9)$ ne nécessite pas de calculatrice, on peut trouver facilement le résultat. Or, cela se complique si l'on cherche un logarithme moins évident comme $\log_5(8)$. Bien que la calculatrice possède une touche LOG, celle-ci est définie en base 10. La touche LN est, quant à elle, évidemment un logarithme en base e. Pour réussir à calculer une approximation de $\log_5(8)$, nous devons effectuer un changement de base.

Théorème (Formule du changement de base).

$$\boxed{\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}}$$

où b et x sont des nombres strictement positifs ; b différent de 1.

Preuve. Posons $m = \log_b(x)$.

Sous forme exponentielle, cette dernière relation s'écrit

$$b^m = x.$$

Si l'on applique le logarithme en base 10 des deux côtés de l'égalité, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl|l} \log(b^m) & = & \log(x) & \text{Propriété 4} \\ m \cdot \log(b) & = & \log(x) & : \log(b) \\ m & = & \dfrac{\log(x)}{\log(b)}. & \end{array}$$

□

Exercice 7.12. Calculer les logarithmes ci-dessous.

a) $\log_7(200)$
b) $\log_{5,1}(34,7)$
c) $\log_{25}(125)$
d) $\log_{49}(2'401)$

7.9 Applications

Le logarithme est très utile lorsqu'on souhaite résoudre une équation où l'inconnue se trouve en exposant.

Exemple. Reprenons l'exemple précédent.

Après combien d'années est-ce que 1'000 francs placés sur un compte à 2% atteindront la somme de 1'268,24 francs ?

$$\begin{array}{rcl|l} 1'268,24 & = & 1'000 \cdot (1+0,02)^n & : 1'000 \\ 1,26824 & = & 1,02^n & \text{On passe sous forme logarithmique} \\ \log_{1,02}(1,26824) & = & n & \text{Formule du changement de base} \\ n & = & \dfrac{\log(1,26824)}{\log(1,02)} & \\ n & = & 12 \text{ ans.} & \end{array}$$

Il est également possible de résoudre cette équation comme suit :

$$\begin{array}{rcl|l} 1'268,24 & = & 1'000 \cdot (1+0,02)^n & : 1'000 \\ 1,26824 & = & 1,02^n & \text{On prent le log de chaque côté} \\ \log(1,26824) & = & \log(1,02^n) & \text{Propriété 4} \\ \log(1,26824) & = & n \cdot \log(1,02) & : \log(1,02) \\ n & = & \dfrac{\log(1,26824)}{\log(1,02)} & \\ n & = & 12 \text{ ans.} & \end{array}$$

Exercice 7.13. L'île de Manhattan a été vendue 24 francs en 1626. A combien se monterait cette somme en 1996 si elle avait été investie à 6% par an ?

Exercice 7.14. Combien d'années doit-on placer un capital de 3'000 francs au taux de 5% pour obtenir une somme de 5'000 francs ?

Exercice 7.15. 1 franc est placé à la banque en 1900 au taux annuel de 4%.

a) Quel capital y aura-t-il un siècle plus tard, c'est-à-dire en l'an 2000 ?

b) Après combien d'années le capital aura atteint 1'000 francs ?

Exercice 7.16. Un capital de 2'500 francs est placé à la banque en 2014. Sachant que le taux d'intérêt est de 2,25%, en quelle année le capital dépassera-t-il 7'500 francs ?

Exercice 7.17. Un capital C_0 est placé à la banque à un taux d'intérêt de 5%.

a) Quelle sera sa valeur après t années ?

b) Après combien d'années aura-t-il doublé ? Triplé ?

Exercice 7.18. On place 40'000 francs sur un compte le 1er janvier 2003 à un taux d'intérêt annuel de 5%. En janvier 2009, on retire de ce capital une certaine somme pour financer un projet. Puis on retire l'entier du compte en janvier 2013, compte qui s'élève à 34'768,15 francs. Quel était le montant du retrait de 2009 ?

Exercice 7.19. Après combien d'années, un capital de 125'000 francs placé au taux de 4% dépasse celui de 250'000 francs placé au taux de 2% ?

Exercice 7.20. Entre 1990 et 2000, la population de la ville A a passé de 3'000 à 5'000 habitants. Durant la même période, celle de la ville B a passé de 6'000 à 4'000 habitants. On se fonde sur l'hypothèse que l'évolution démographique de ces deux villes est exponentielle.

a) Déterminer, en %, les taux de variation annuels de ces deux populations.

b) En quelle année, la population de la ville A a-t-elle dépassé celle de la ville B ?

Exercice 7.21. Comme le montre le tableau ci-dessous, pour le même assuré-modèle, les primes de l'assurance-maladie auprès des deux caisses Assurmed et Visante ont évolué de manière exponentielle entre 2000 et 2011.

	2000	2011
Assurmed	172,00	264,80
Visante	131,00	236,05

Les primes mensuelles sont exprimées en francs.

a) Quels ont été, sur cette période, les taux de croissance annuels respectifs des primes de cet assuré-modèle auprès des deux caisses ?

b) Quels étaient les montants respectifs des primes en 2008 ?

c) A partir de quelle année la caisse Assurmed sera-t-elle la plus avantageuse ?

Exercice 7.22 (Croissance de la population des USA). La population $N(t)$ (en millions) des USA t années après 1980 peut être représenté par la formule :

$$N(t) = 227 \cdot 10^{0,0009t}.$$

En quelle année est-ce que la population vaudra le double de celle de 1980 ?

Exercice 7.23. Un médicament est éliminé du corps par l'urine. On sait que, pour une dose de 10 milligrammes, la quantié $q(n)$ restante dans le corps n heures après la prise est donnée par la relation

$$q(n) = 10 \cdot 0,8^n.$$

a) Quelle est la quantité restante de ce médicament après trois heures ?

b) Après combien de temps reste-il 2 mg de ce médicament dans le corps ?

Exercice 7.24 (La mémoire humaine). Des étudiants en mathématiques ont passé un test sur un sujet et le refont chaque mois avec un test similaire. Le score moyen $f(t)$ pour la classe est donné par le modèle suivant :

$$f(t) = 80 - 17\log_{10}(t+1), 0 \leq t \leq 12$$

où t est le temps en mois.

a) Quel était le score moyen pour le tout premier test ?

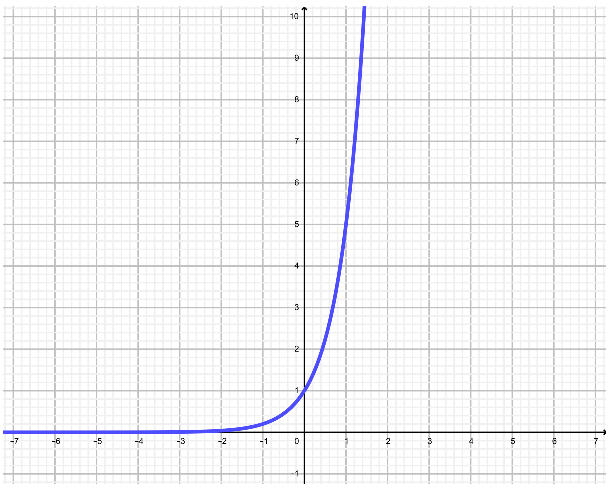
b) Quel est le score moyen après 6 mois ?

c) Déterminer le nombre de mois passés si le score moyen est de $61,5$.

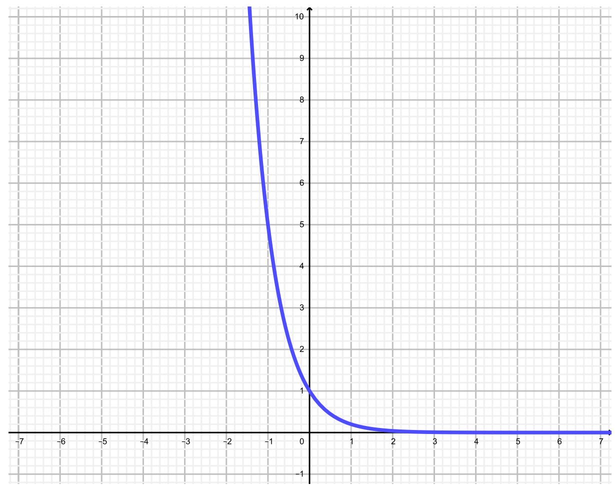
7.10 Solutions

Exercice 7.1.

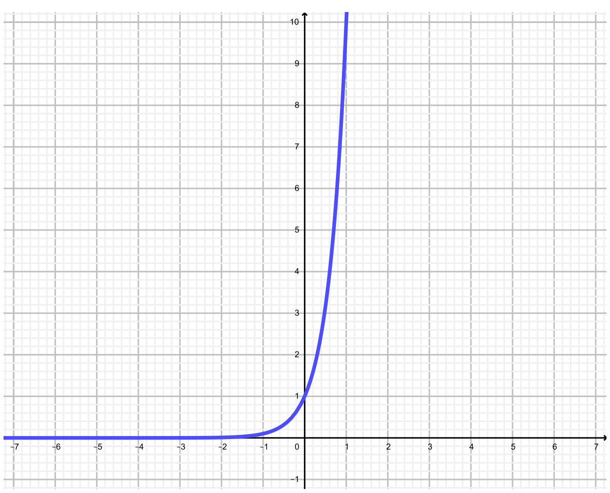
a)



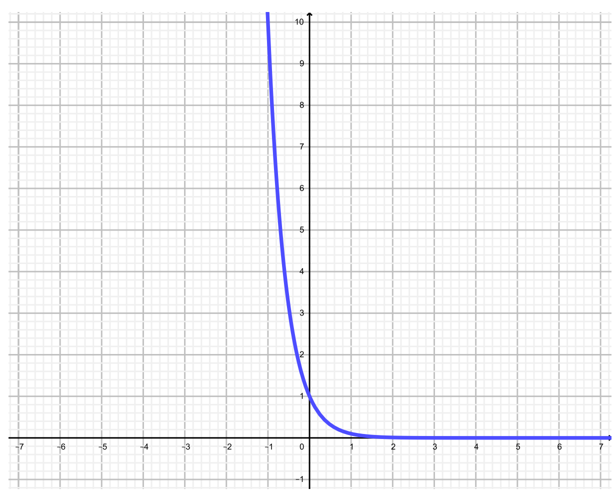
b)



c)



d)



f est croissante si $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$.

Exercice 7.2.

a) $x = 5$	b) $x = 2$
c) $x = 3$ et $x = -1$	d) $x = 3$
e) $x = 5$	f) $x = 4$
g) $x = 2$ et $x = -\dfrac{1}{2}$	h) $x = 3$
i) $x = \dfrac{18}{5}$	j) $x = -2$
k) $x = 7$	l) $x = -\dfrac{4}{99}$

Exercice 7.3.

a) $\sim 1'340,10$ francs.

b) $\sim 822,70$ francs.

c) $6,5\%$.

Exercice 7.4. $E(5) \cong 231, E(8) \cong 180, E(12) \cong 129$.

Exercice 7.5.

a) $M(t) = 1'000 \cdot 1,14^t$.

b) Environ 1'482 malades.

c) Environ 769 malades.

Exercice 7.6.

a) $\sim 3,64\%$.

b) $\sim 60'650,54$ m^3.

c) $\sim 93'123,29$ m^3.

Exercice 7.7.

a) 3	b) 3
c) 3	d) 6
e) 10	f) 7
g) 1	h) 0
i) -1	j) -2
k) -3	l) $\frac{1}{2}$
m) $\frac{1}{2}$	n) $\frac{1}{9}$
o) 3	p) -2

Exercice 7.8.

a) 16	b) 243
c) 64	d) 4
e) 5	f) 10

Exercice 7.9.

a) 2	b) -3
c) 3	d) 2
e) $\frac{1}{2}$	f) $\frac{1}{2}$

Exercice 7.10.

a) $x = 4$
b) Pas de solution
c) Pas de solution
d) $x = -\frac{3}{2}$
e) Pas de solution
f) $x = 13$
g) $x = 21$
h) $x = 3$
i) $x = 4$
j) $x = 5$
k) $x = 4$
l) $x = -\frac{13}{6}$

Exercice 7.11.

a) $x = 3$
b) $x \cong 2,544$
c) $x \cong 1,904$
d) $x \cong 6,438$

Exercice 7.12.

a) $\sim 2,723$
b) $\sim 2,177$
c) $\frac{3}{2}$
d) 2

Exercice 7.13. $55'383'626'485,90$ francs.

Exercice 7.14. 11 ans.

Exercice 7.15.

a) 50,50 francs.
b) Après 177 ans.

Exercice 7.16. Le capital dépassera 7'500 francs en 2064.

Exercice 7.17.

a) $C(n) = C_0 \cdot 1,05^n$.
b) Il aura doublé après 15 ans et triplé après 23 ans.

Exercice 7.18. 25'000 francs.

Exercice 7.19. Après 36 ans.

Exercice 7.20.

a) La ville A connaît un taux de croissance de $5,24\%$ et la ville B un taux de décroissance de 4%.
b) $t \cong 7,54$. Durant l'année 1997.

Exercice 7.21.

a) 4% pour Assurmed et $5,5\%$ pour Visante.
b) $235,4$ francs pour Assurmed et $201,05$ francs pour Visante.
c) A partir de 2020.

Exercice 7.22. $t \cong 334,48$. Donc durant l'année 2314.

Exercice 7.23.

a) $5,12$ mg.

b) $n \cong 7,21$. Donc pendant la septième heure.

Exercice 7.24.

a) 80 points.

b) 65,63 points.

c) $t \cong 11,25$. Après 12 mois, le résultat sera un peu inférieur à 61,5.

7.11 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

7.1 ☐ Représenter le graphe d'une fonction exponentielle.
7.2 ☐ Résoudre une équation exponentielle simple.
7.3 ☐ Calculer des logarithmes simples.
7.4 ☐ Représenter le graphe d'une fonction logarithmique.
7.5 ☐ Résoudre une équation logarithmique simple.
7.6 ☐ Résoudre une équation exponentielle quelconque.
7.7 ☐ Calculer un logarithme à l'aide de la formule du changement de base.
7.8 ☐ Résoudre un problème faisant intervenir la formule des intérêts composés.
7.9 ☐ Résoudre un problème faisant intervenir une fonction exponentielle ou logarithmique.

Chapitre 8

Inéquations

8.1 Introduction

Définition. Une *inéquation* est une inégalité ($<$, $\leq$, $>$ ou $\geq$) entre deux expressions algébriques.

Exemple. Un étudiant a obtenu les notes de 3, 4 et $3,5$ à ses trois premiers travaux écrits. Quelle note devrait-il obtenir au minimum au quatrième (et dernier) travail écrit pour que sa moyenne soit suffisante ?

Résolution. Soit x la dernière note du travail écrit.
La moyenne finale est donnée par

$$\frac{3+4+3,5+x}{4} = \frac{10,5+x}{4}.$$

Pour que l'étudiant obtienne une moyenne finale suffisante, il faut qu'elle soit supérieure ou égale à $3,75$.
Cette condition se traduit par *l'inéquation du premier degré à une inconnue*

$$\frac{10,5+x}{4} \geq 3,75.$$

Une *solution* de cette inéquation est un nombre x pour lequel l'inéquation est verifiée. Ainsi, $x=6$ est solution de cette inéquation, car

$$\frac{10,5+6}{4} = \frac{16,5}{4} = 4,125 \geq 3,75.$$

Il en est de même pour $x = 5,5$, car

$$\frac{10,5+5,5}{4} = \frac{16}{4} = 4 \geq 3,75.$$

En revanche, $x = 1$ n'est pas solution de cette inéquation, car

$$\frac{10,5+1}{4} = \frac{11,5}{4} = 2,875 < 3,75.$$

Résoudre une inéquation consiste à trouver tous les nombres qui vérifient l'inégalité :

$$\begin{array}{rcl|l} \dfrac{10,5+x}{4} & \geq & 3,75 & \cdot 4 \\ 10,5+x & \geq & 15 & -10,5 \\ x & \geq & 4,5. & \end{array}$$

Ainsi, cet étudiant devra obtenir au moins $4,5$ afin de terminer son semestre avec une moyenne suffisante. L'ensemble S_i des solutions de l'inéquation s'écrit également

$$S_i = [4,5;+\infty[.$$

Remarque. $[4,5;+\infty[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation. Etant donné que la note maximale que l'on puisse obtenir est 6, il convient de rejetter toutes les solutions strictement supérieures à 6. Ainsi, l'ensemble S_p des solutions du problème (mais pas de l'inéquation !) est donné par

$$S_p = [4,5;6].$$

8.2 Inéquations du premier degré à une inconnue

Une inéquation est comme une équation dans laquelle on remplace le signe "=" par un signe *d'inégalité*. Il en existe 4 :

- $>$: *plus grand que*
- $<$: *plus petit que*
- $\geq$: *plus grand ou égal à*
- $\leq$: *plus petit ou égal à*

Résoudre une inéquation est similaire à résoudre une équation. A une exception :

$\boxed{\text{Lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif, le signe d'inégalité change.}}$

En effet,

$$\begin{array}{rcl|l} 3 & \geq & 2 & \cdot(-2) \\ -6 & \leq & -4. & \end{array}$$

Exemple.

1.
$$\begin{array}{rcl|l} 5(x-2)-4(2x-3) & \geq & 40 & \\ 5x-10-8x+12 & \geq & 40 & \\ -3x+2 & \geq & 40 & -2 \\ -3x & \geq & 38 & :(-3) \\ x & \leq & -\dfrac{38}{3}. & \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcccl|l} -6 & < & 2x-3 & \leq & 5 & +3 \\ -3 & < & 2x & \leq & 8 & :2 \\ -\dfrac{3}{2} & < & x & \leq & 4. & \end{array}$$

Exercice 8.1. Vrai ou faux ? Justifier !

a) -4 est solution de l'inéquation $-3x > 7$.

b) 8 est solution de l'inéquation $5x - 3 \leq 37$.

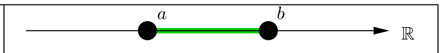
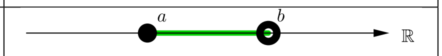
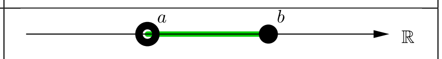
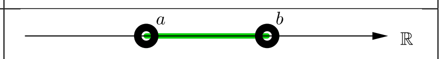
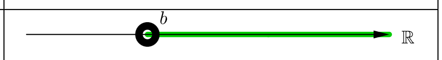
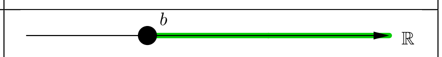
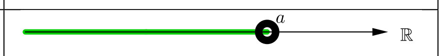
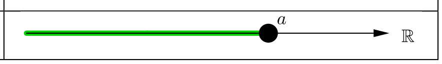
c) 2 est solution de l'inéquation $3x - 2 < -4x + 12$.

d) 5 est solution de l'inéquation $5x - 3 \geq 5x + 2$.

8.3 Intervalles

Les *intervalles* sont des notations simples pour décrire certains sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On les utilise notamment pour donner les ensembles des solutions d'une inéquation.

Dans le tableau ci-dessous, où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, chacune des lignes décrit le même sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de trois manières équivalentes.

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	
$a \leq x < b$	$[a; b[$	
$a < x \leq b$	$]a; b]$	
$a < x < b$	$]a; b[$	
$x > b$	$]b; +\infty[$	
$x \geq b$	$[b; +\infty[$	
$x < a$	$]-\infty; a[$	
$x \leq a$	$]-\infty; a]$	

Remarque. On exprimera désormais l'ensemble des solutions d'une inéquation sous forme d'intervalle.

Exemple. L'ensemble des solutions des inéquations de l'exemple précédent s'écrivent

1. $S = \left]-\infty; -\frac{38}{3}\right]$.
2. $S = \left]-\frac{3}{2}; 4\right]$.

Exercice 8.2. Ecrire les ensembles suivants sous forme d'intervalle.

a) L'ensemble des nombres plus grands ou égaux à -3 et plus petits ou égaux à 5.

b) L'ensemble des nombres plus grands ou égaux à 4 et strictement plus petits que 5.

c) L'ensemble des nombres strictement plus petits que 1.

d) L'ensemble des nombres plus grands ou égaux à 10.

e) L'ensemble des nombres strictement plus grands que -2 et strictement plus petits que 2.

f) L'ensemble des nombres réels strictement positifs.

g) L'ensemble des nombres réels inférieurs ou égaux à 0.

h) L'ensemble des nombres réels.

Exercice 8.3. Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

a) $x - 7 > -3x + 1$

b) $3 - 2x > 3x - 5$

c) $5(1 + 4x) > 7 + 12x$

d) $7(x - 3) > 7x + 5$

e) $4x - 2 < 4(x + 10)$

f) $-2x + \dfrac{x}{2} + 1 \leq -\dfrac{x}{4}$

g) $4(x^2 + 1) + 8(3x - 4) > 4x^2$

h) $(3x + 45)(3x + 3) < (3x + 6)(3x + 18)$

i) $\dfrac{3 - 4x}{2} < \dfrac{x - 3}{4}$

j) $\dfrac{2x - 3}{3} - \dfrac{x + 4}{5} \leq \dfrac{x + 2}{4}$

Exercice 8.4. Résoudre les inéquations doubles ci-dessous et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

a) $-3 < 2x - 5 < 7$ b) $-2 < 3 + \frac{1}{4}x \leq 5$

c) $0 \leq 4 - \frac{1}{3}x \leq 2$ d) $3 \leq \frac{2-3x}{5} \leq 7$

Exercice 8.5. Résoudre les systèmes d'inéquations suivants et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

a) $\left\{ \begin{array}{rcl} 5x - 10 & < & 4x \\ 5 + 2x & \geq & 7 \end{array} \right.$ b) $\left\{ \begin{array}{rcl} 1 - x & \geq & x - 5 \\ x(2-x) & < & 4 - x^2 \end{array} \right.$

Exercice 8.6. La formule suivante lie la température Fahrenheit et Celsius.

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

En Suisse, le 26 janvier 2005, la température s'est située entre $-30,4$°C et -3°C. Exprimer la situation en Fahrenheit.

8.4 Inéquations linéaires à deux inconnues

Il s'agit d'inéquations de la forme $ax + by > c$, $ax + by < c$, $ax + by \geq c$ ou $ax + by \leq c$. Il est plus délicat d'exprimer les solutions à l'aide d'intervalles car les valeurs que peut prendre x dépendent directement de y (et vice-versa). Afin d'illustrer au mieux l'ensemble des solutions d'une telle inéquation, on colore l'ensemble des points du plan satisfaisant l'inéquation linéaire.

Exemple. Soit l'inéquation

$$3x + 2y < 6.$$

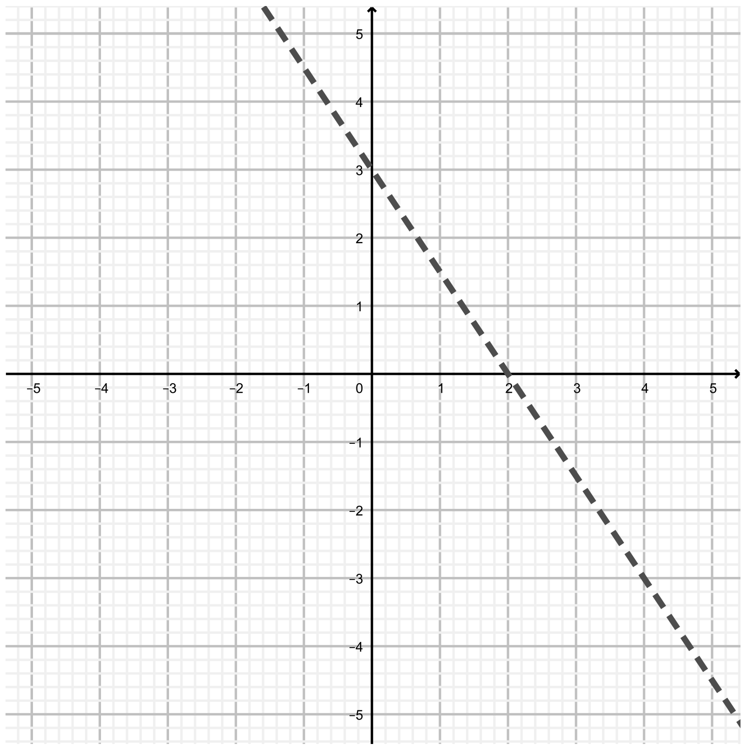
La première chose à faire est d'isoler la variable y afin de pouvoir plus facilement tracer la frontière de la zone colorée.

$$\begin{array}{rcl|l} 3x + 2y & < & 6 & -3x \\ 2y & < & -3x + 6 & :2 \\ y & < & -\frac{3}{2}x + 3. & \end{array}$$

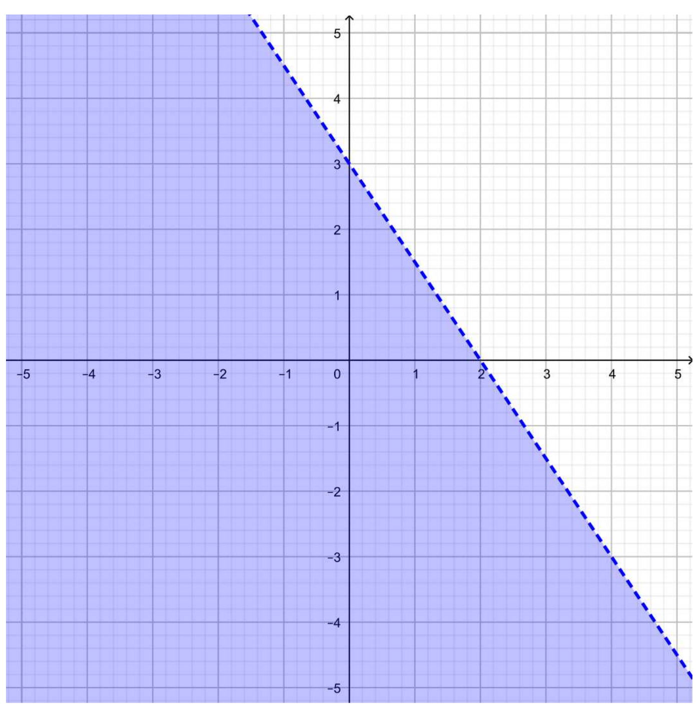
Reprenons cette inégalité et dessinons la droite que l'on obtient s'il y avait un "=" à la place du "<".

Convention.

- Si le signe d'inégalité est "strictement plus grand" ou "strictement plus petit", c'est-à-dire $>$ ou $<$, alors la droite sera en traitillé.
- Si le signe d'inégalité est "plus grand ou égal à" ou "plus petit ou égal à", c'est-à-dire $\geq$ ou $\leq$, alors on trace la droite en trait plein.



Cette droite est appelée *frontière*. En effet, elle définit la limite entre la zone contenant les solutions et le reste. Comment savoir quelle est la bonne zone ? Il suffit de reprendre l'inéquation $y < -\dfrac{3}{2}x + 3$. On observe que y doit être plus petit que $-\dfrac{3}{2}x + 3$. Comme la valeur de y doit être inférieure au reste, alors on colore la zone en dessous de la droite (on aurait coloré en dessus si le signe était $>$ ou $\geq$).



Tous les points que l'on peut trouver dans la zone colorée satisfont donc l'inéquation

$$3x + 2y < 6.$$

La droite en traitillé permet d'illustrer le fait que les points se trouvant sur la droite ne sont pas inclus dans les solutions. Or, si le trait était plein, les points de la droite seraient inclus.

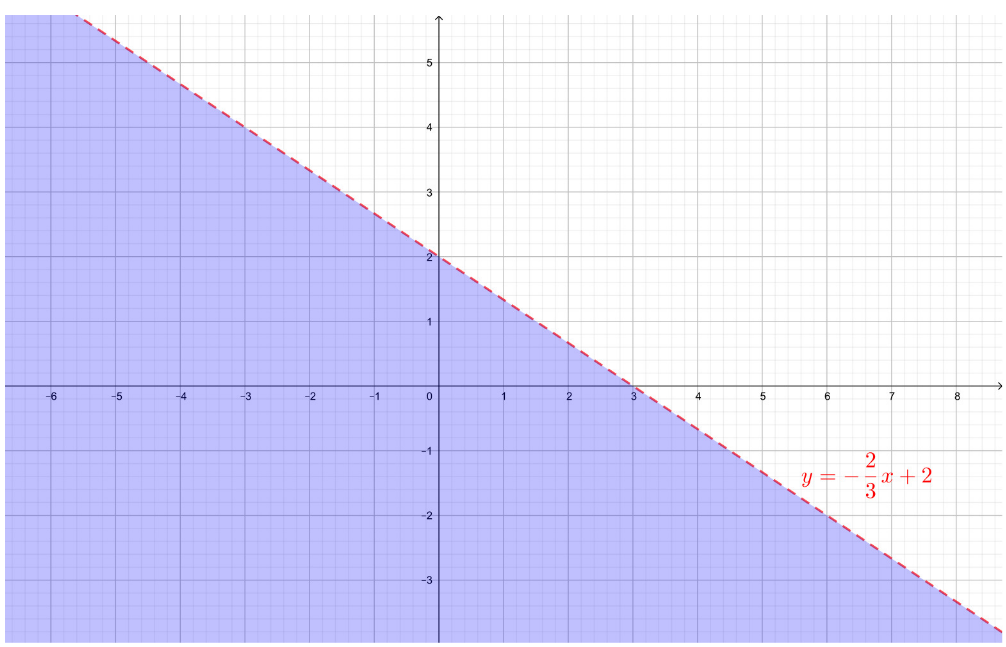
Exemple. Soit le système d'inéquations

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y & < & 6 \\ 4x + 2y & \geq & -12 \\ x & \geq & -4 \\ y & \geq & -2 \end{array}\right. .$$

Pour représenter l'ensemble des solutions de ce système, il convient dans un premier temps d'isoler la variable y de l'inéquation $2x + 3y < 6$:

$$\begin{array}{rcl|l} 2x + 3y & < & 6 & -2x \\ 3y & < & -2x + 6 & :3 \\ y & < & -\dfrac{2}{3}x + 2. & \end{array}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x + 3y < 6$ est l'ensemble des points situés au dessous de la droite $y = -\dfrac{2}{3}x + 2$.



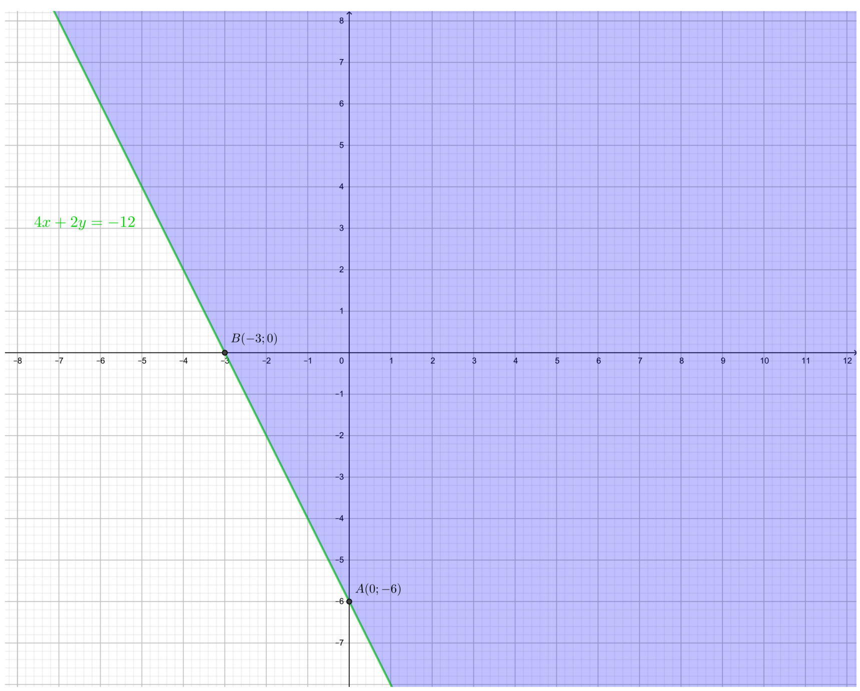
Pour représenter l'ensemble des solutions de la deuxième inéquation, il est possible de procéder de la même manière. Cependant, nous utiliserons une démarche différente, en calculant les coordonnées de deux points appartenant à la droite $4x + 2y = -12$.

— Pour le premier point, on pose $x = 0$:
On a
$$\begin{aligned} 4 \cdot 0 + 2y &= -12 \\ 2y &= -12 \\ y &= -6. \end{aligned}$$
D'où le point $A(0; -6)$.

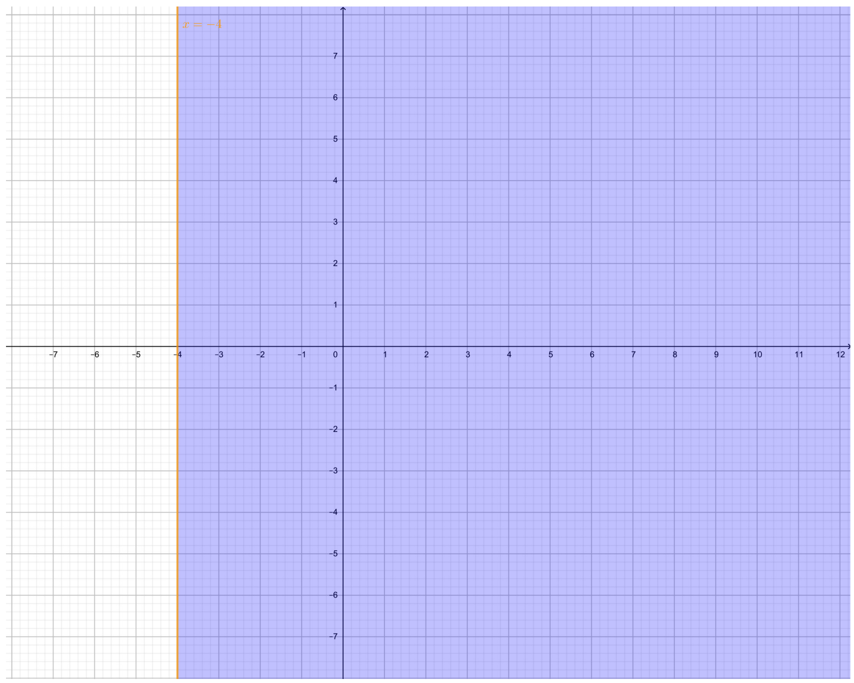
— Pour le deuxième point, on pose $y = 0$:
On a
$$\begin{aligned} 4x + 2 \cdot 0 &= -12 \\ 4x &= -12 \\ x &= -3 \end{aligned}$$
D'où le point $B(-3; 0)$.

Ainsi, la droite $4x + 2y = -12$ passe par les points $A(0; -6)$ et $B(-3; 0)$.

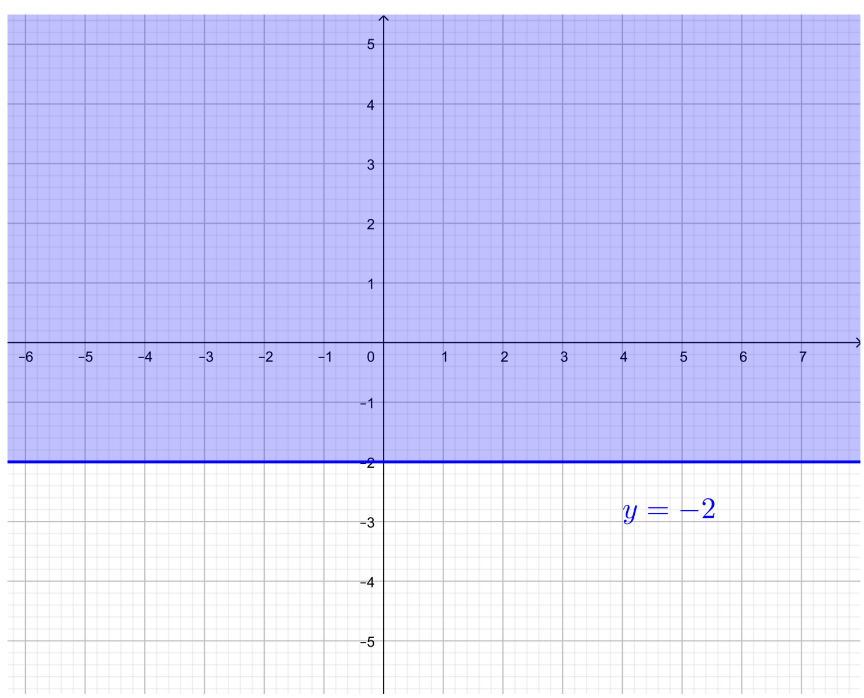
L'ensemble des solutions de l'inéquation $4x + 2y \geq -12$ est le domaine contenant les points situés au dessus de la droite $4x + 2y = -12$.



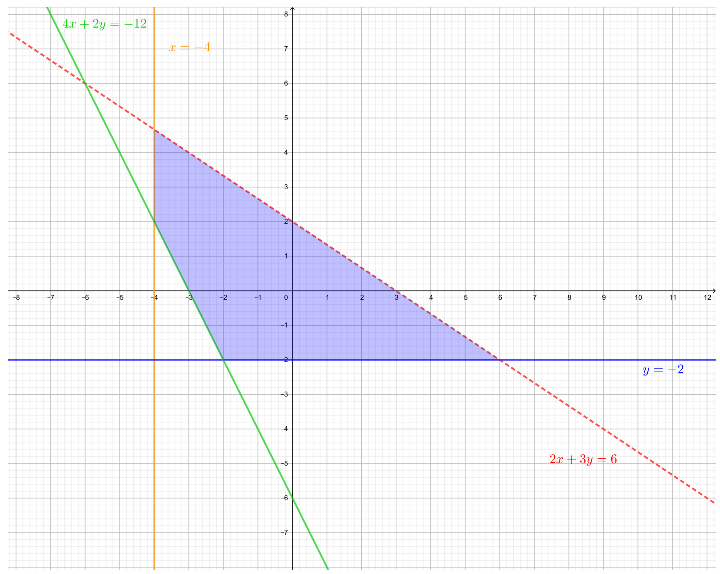
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x \geq -4$ est la zone située à droite de la droite d'équation $x = -4$.



Enfin, l'ensemble des solutions de l'inéquation $y \geq -2$ est la zone située au dessus de la droite d'équation $y = -2$.



Au total, l'ensemble des solutions du système est la zone qui est solution des quatre inéquations :



Exercice 8.7. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

a) $x + 3y \geq 15$ b) $2x + 5y < 20$

c) $3x + 7y > 63$ d) $6x + 5y \leq 120$

Exercice 8.8. Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivantes.

a) $\left\{\begin{array}{rcl} y & \leq & x+3 \\ y & \geq & -\dfrac{1}{4}x+2 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} x+3y & \geq & 0 \\ 2x+y-5 & < & 0 \end{array}\right.$

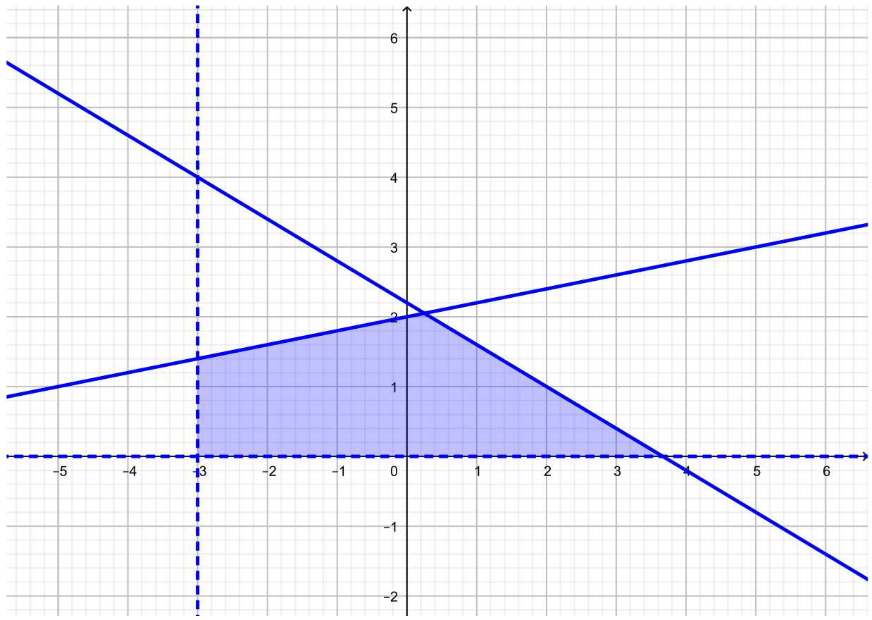
c) $\left\{\begin{array}{rcl} x & \geq & 8-2y \\ x & > & 2-2y \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{rcl} y & \leq & 2x+10 \\ y & \geq & x+1 \\ y & > & -2x-2 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcl} y & \geq & 2x-4 \\ y & \geq & \dfrac{2}{3}x+4 \\ y & \geq & -4x+4 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rcl} y & > & \dfrac{x}{4}+2 \\ y & \geq & x-1 \\ y & > & -\dfrac{3}{4}x+6 \end{array}\right.$

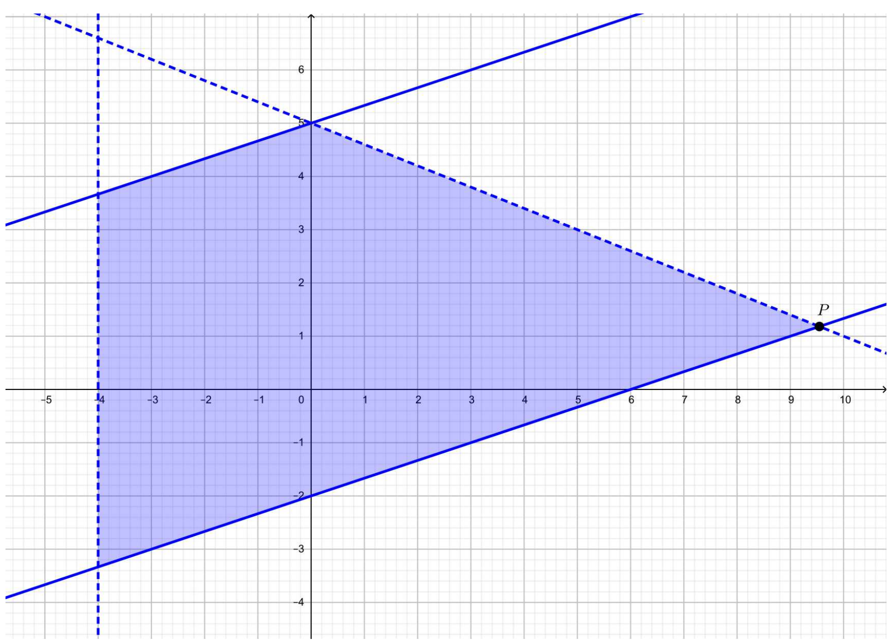
g) $\left\{\begin{array}{rcl} 5x+9y & < & 90 \\ 4x+y & < & 48 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$ h) $\left\{\begin{array}{rcl} 5x+7y & > & 35 \\ 2x+y & > & 10 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$

i) $\left\{\begin{array}{rcl} 12x+5y & \leq & 60 \\ 4x+3y & \leq & 24 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$ j) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+5y & \geq & 30 \\ x+y & \geq & 10 \\ 3x+2y & \geq & 24 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$

Exercice 8.9. Déterminer un système d'inéquations ayant pour solution la zone colorée ci-dessous.



Exercice 8.10. Déterminer un système d'inéquations ayant pour solution la zone colorée ci-dessous.



Calculer les coordonnées exactes du point P et déterminer si le point P appartient à l'ensemble des solutions (justifier la réponse).

8.5 Solutions

Exercice 8.1.

a) Vrai
b) Vrai
c) Faux
d) Faux

Exercice 8.2.

a) $[-3;5]$
b) $[4;5[$
c) $]-\infty;1[$
d) $[10;+\infty[$
e) $]-2;2[$
f) $]0;+\infty[$
g) $]-\infty;0]$
h) $]-\infty;+\infty[$

Exercice 8.3.

a) $x \in]2;+\infty[$
b) $x \in \left]-\infty;\frac{8}{5}\right[$
c) $x \in \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$
d) Pas de solution
e) $x \in \mathbb{R}$
f) $x \in \left[\frac{4}{5};+\infty\right[$
g) $x \in \left]\frac{7}{6};+\infty\right[$
h) $x \in \left]-\infty;-\frac{3}{8}\right[$
i) $x \in]1;\infty[$
j) $x \in \left]-\infty;\frac{138}{13}\right]$

Exercice 8.4.

a) $x \in]1;6[$
b) $x \in]-20;8]$
c) $x \in [6;12]$
d) $x \in \left[-11;-\frac{13}{3}\right]$

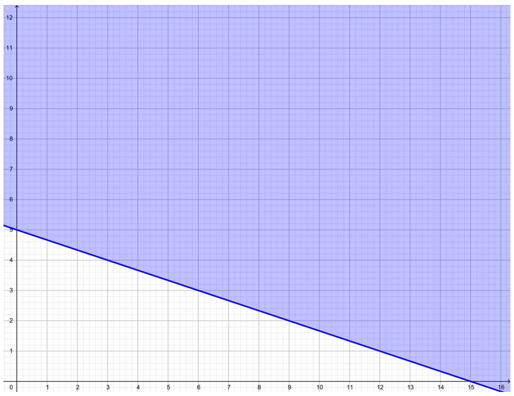
Exercice 8.5.

a) $x \in [1;10[$
b) $x \in]-\infty;2[$

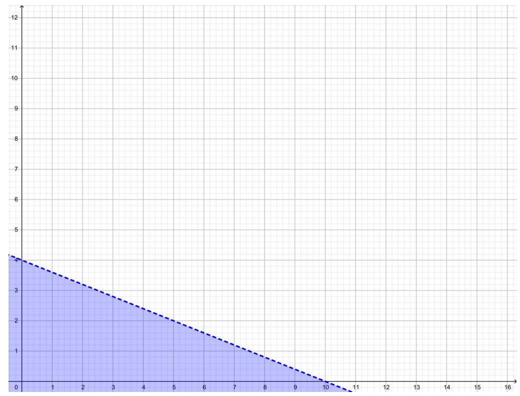
Exercice 8.6. $-22,72 \leq F \leq 26,6$.

Exercice 8.7.

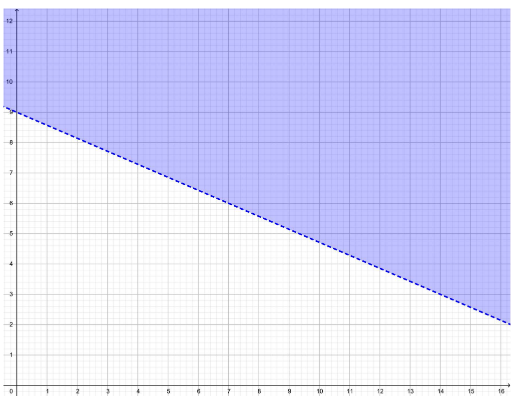
a)



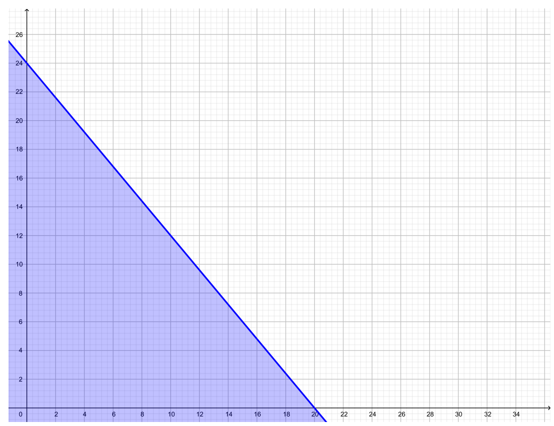
b)



c)

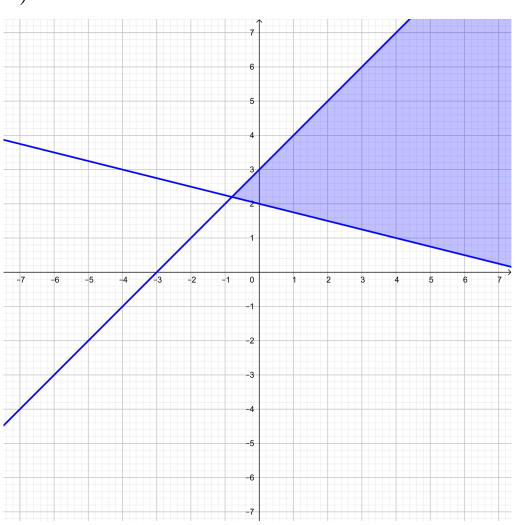


d)

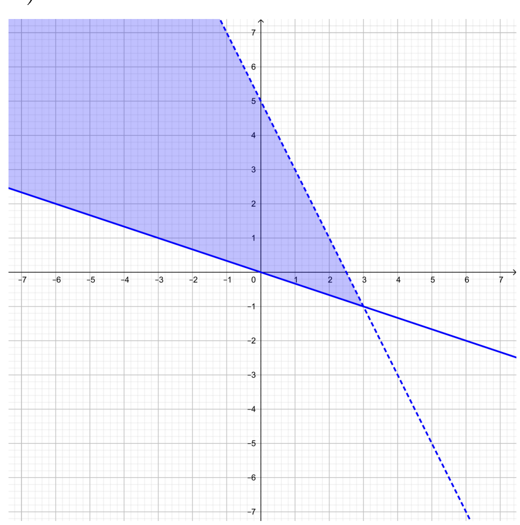


Exercice 8.8.

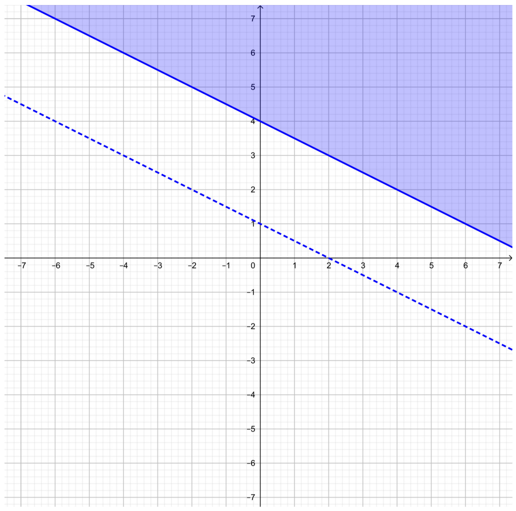
a)



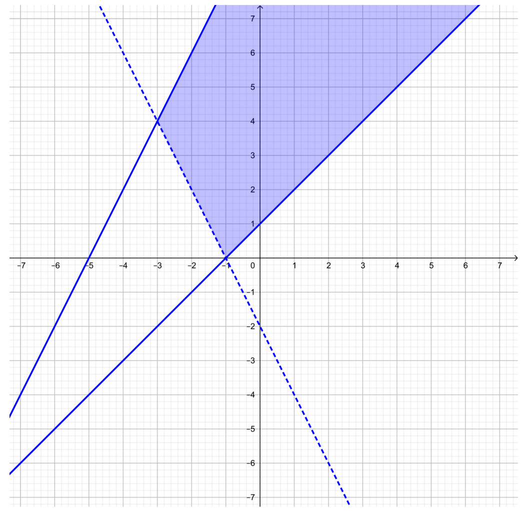
b)



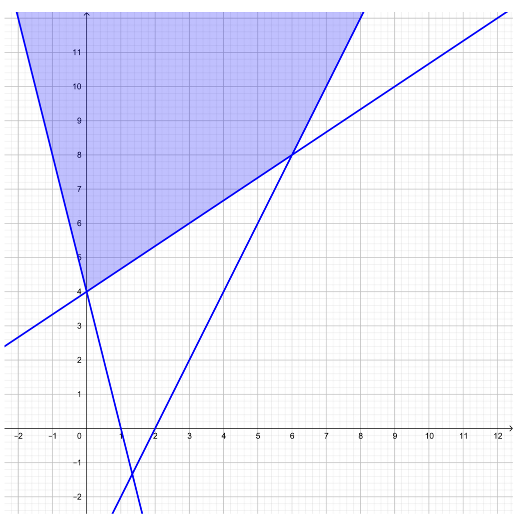
c)



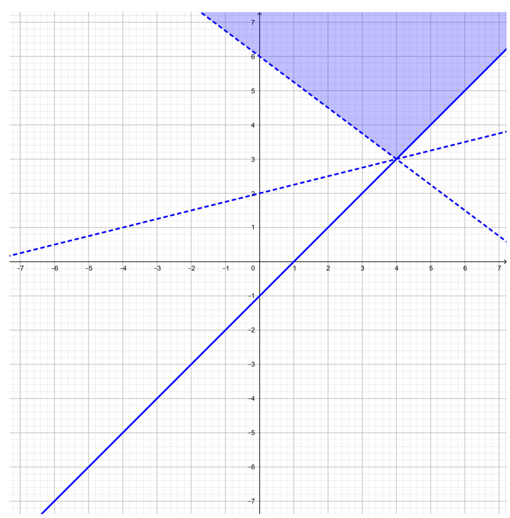
d)



e)



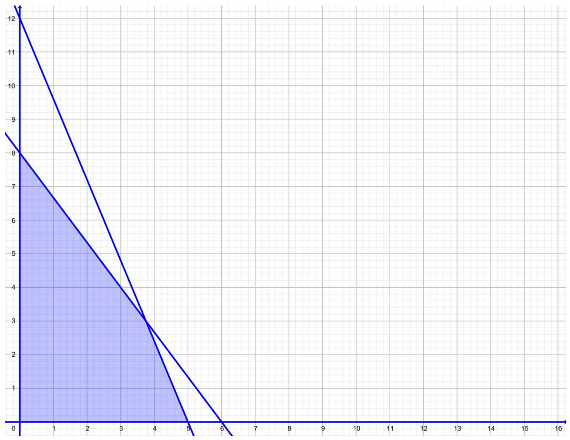
f)



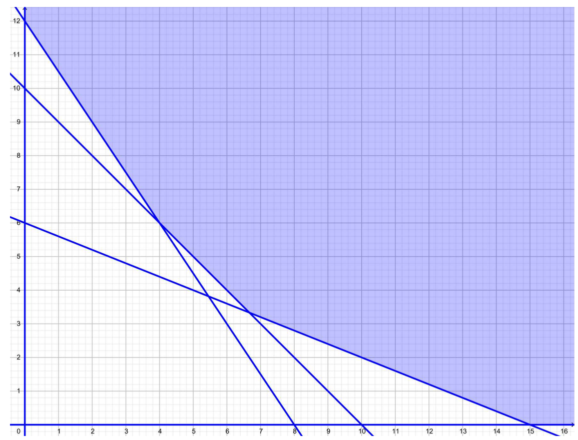
g)

h)

i)



j)



Exercice 8.9.

$$\left\{\begin{array}{lll} y & \leq & -\dfrac{3}{5}x+\dfrac{11}{5} \\ y & \leq & \dfrac{1}{5}x+2 \\ x & > & -3 \\ y & > & 0 \end{array}\right. .$$

Exercice 8.10.

$$\left\{\begin{array}{lll} y & \leq & \dfrac{1}{3}x+5 \\ y & < & -\dfrac{2}{5}x+5 \\ y & \geq & \dfrac{1}{3}x-2 \\ x & > & -4 \end{array}\right. .$$

$P(9,\overline{54};1,\overline{18})$ n'appartient pas à l'ensemble de solutions, car il se trouve sur une droite traitillée.

8.6 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

8.1 ☐ Résoudre une inéquation simple du premier degré en donnant l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

8.2 ☐ Résoudre une inéquation double du premier degré en donnant l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

8.3 ☐ Résoudre un système d'inéquations simples du premier degré à une inconnue en donnant l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

8.4 ☐ Résoudre graphiquement une inéquation à deux inconnues.

8.5 ☐ Résoudre graphiquement un système d'inéquations à deux inconnues.

8.6 ☐ Retrouver le système d'inéquations à partir du polygone des solutions.

Chapitre 9

Programmation linéaire

9.1 Introduction

Au cours de la Seconde Guerre mondiale, l'armée de l'air des États-Unis d'Amérique eut de nombreux problèmes concernant l'allocation de ses ressources, tant humaines que matérielles. Naturellement, plusieurs spécialistes se penchèrent sur la question et parmi eux, George Dantzig. Peu après la guerre, en 1946, ce dernier formula de manière plus générale ce genre de problèmes et proposa une méthode de résolution, la *méthode du simplexe*.

Ce problème général peut se formuler ainsi : trouver la *valeur maximale* (ou *minimale*) d'une fonction à plusieurs variables si ces variables sont soumises à des *contraintes*. Par exemple, supposons qu'une compagnie fabrique divers produits et que pour chacun de ces produits il y a des coûts de fabrication différents en main-d'oeuvre et en matières premières. La compagnie connaît le bénéfice qu'elle réalise en vendant chacun de ces produits. La compagnie doit alors se poser la question suivante : quelle quantité de chacun des produits doit-on fabriquer pour obtenir un bénéfice global maximal ? En général, de tels problèmes peuvent être assez complexes. Cependant, dans le cas où la fonction à optimiser, c'est-à-dire à rendre minimum ou maximum, est linéaire et où les contraintes peuvent s'exprimer par des inéquations, on peut développer une théorie assez simple pour résoudre ce genre de problèmes, la *programmation linéaire*. Nous nous limiterons à des problèmes comportant seulement deux variables. Ceci nous permettra d'illustrer la solution par une représentation graphique simple.

9.2 Optimisation linéaire à deux variables

Exemple. Une entreprise fabrique deux types de boîtes en métal. La fabrication d'une boîte de type A demande 1 heure de travail et 3 kg de métal alors que le type B demande 2 heures de travail et 2 kg de métal. L'entreprise dispose de 80 heures de temps de travail et 120 kg de métal. Sachant que, pour une boîte, le profit est de 20 francs pour le type A et de 30 francs pour le type B, comment organiser la production afin de maximiser le profit ?

Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Travail	Métal	Profit
Type A	1 h	3 kg	20 Frs
Type B	2 h	2 kg	30 Frs
Total	$\leq$ 80 h	$\leq$ 120 kg	P

Si x désigne le nombre de boîtes de type A et y le nombre de boîtes du type B, le problème revient à trouver la valeur maximale de l'expression

$$P = 20x + 30y$$

avec les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & \leq & 80 \\ 3x + 2y & \leq & 120 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Représentons alors les droites $x + 2y = 80$, $3x + 2x = 120$, $x = 0$ et $y = 0$. A cet effet, il convient de calculer deux points par droite.

1. Points de $x + 2y = 80$:

   — Pour le premier point, on pose $x = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl} 0 + 2y & = & 80 \\ 2y & = & 80 \\ y & = & 40. \end{array}$$
   D'où le point $(0; 40)$.

   — Pour le deuxième point, on pose $y = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl} x + 2 \cdot 0 & = & 80 \\ x & = & 80. \end{array}$$
   D'où le point $(80; 0)$.

   Ainsi, la droite $x + 2y = 80$ passe par $(0; 40)$ et $(80; 0)$.

2. Points de $3x + 2y = 120$:

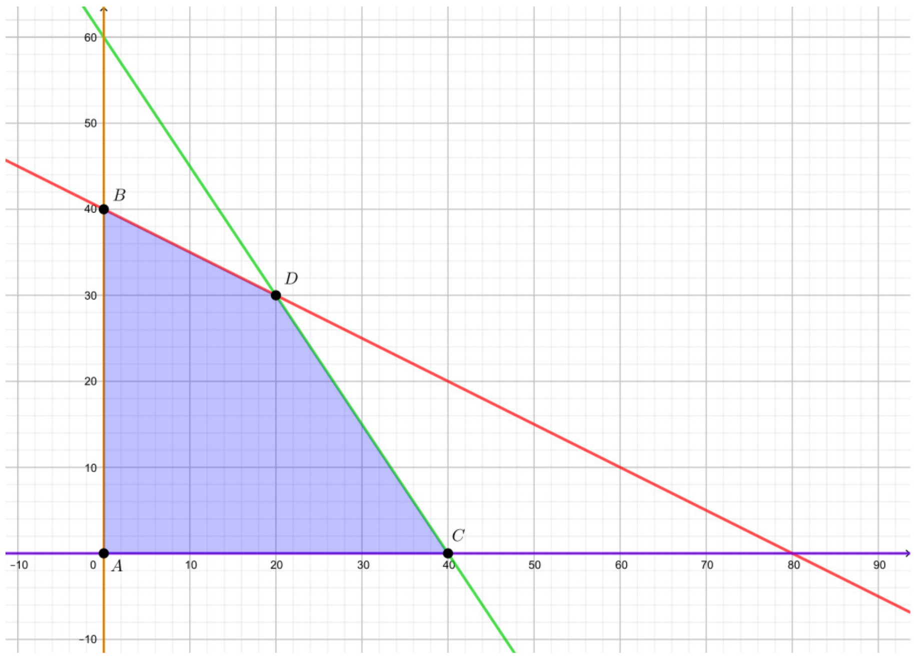
   — Pour le premier point, on pose $x = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl} 3 \cdot 0 + 2y & = & 120 \\ 2y & = & 120 \\ y & = & 60. \end{array}$$
   D'où le point $(0; 60)$.

   — Pour le deuxième point, on pose $y = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl} 3x + 2 \cdot 0 & = & 120 \\ 3x & = & 120 \\ x & = & 40. \end{array}$$
   D'où le point $(40; 0)$.

Ainsi, la droite $3x + 2y = 120$ passe par $(0; 60)$ et $(40; 0)$.

3. Points de $x = 0$ et de $y = 0$:

   La droite $x = 0$, respectivement $y = 0$ est verticale passant par l'origine, respectivement horizontale passant pas l'origine.



Le domaine défini par les contraintes est le quadrilatère coloré ci-dessus.

On observe alors que le maximum cherché est forcément atteint sur un sommet du quadrilatère.

Déterminons alors les coordonnées de ces sommets :

Il est clair que les points $A(0; 0)$, $B(0; 40)$ et $C(40; 0)$ sont des sommets du quadrilatère.

Reste à déterminer les coordonnées du dernier sommet D.

A cet effet, on résout

$$\begin{array}{rlcl} & 3x + 2y & = & 120 \\ - & x + 2y & = & 80 \\ \hline & 2x & = & 40 \\ & x & = & 20. \end{array}$$

Il s'ensuit la valeur de y en résolvant

$$\begin{array}{rcl|l} 20+2y & = & 80 & -20 \\ 2y & = & 60 & :2 \\ y & = & 30. & \end{array}$$

D'où le sommet $D(20;30)$.

Pour trouver le maximum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du quadrilatère. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x;y)$	Valeur de $P=20x+30y$
$A(0;0)$	$20\cdot 0+30\cdot 0=0$
$B(0;40)$	$20\cdot 0+30\cdot 40=1'200$
$C(40;0)$	$20\cdot 40+30\cdot 0=800$
$D(20;30)$	$20\cdot 20+30\cdot 30=1'300$

Ainsi, la valeur maximale $P=1'300$ est atteinte pour $x=20$ et $y=30$. Le profit maximal de 1'300 francs est donc réalisé avec 20 boîtes de type A et 30 de type B.

Exercice 9.1. Après une restructuration dans l'entreprise, les profits sont modifiés en 50 francs pour le type A et 20 francs pour le type B. Faut-il alors modifier le plan de production afin de maximiser le profit ?

Exemple. Une entreprise fabrique et des assiettes et des vases décorés à la main. Le temps de fabrication est de 2 heures par assiette et de 3 heures par vase. Le temps de décoration est d'une demi-heure pour une assiette et de 2 heures pour un vase. La production journalière d'assiettes est limitée à 30 unités. L'atelier de fabrication comporte 12 ouvriers qui travaillent 8 heures par jour. Celui consacré à la décoration est composé de 7 ouvriers travaillant 7 heures par jour.

Sachant que le bénéfice net est de 70 francs par assiette et de 160 francs par vase, déterminer la production assurant le bénéfice maximal.

Il est possible de résumer les informations ci-dessus par le tableau ci-dessous.

	Fabrication	Décoration	Production	Profit
Assiettes	2 h	$0,5$ h	≤ 30	70 Frs
Vases	3 h	2 h		160 Frs
Total	$\leq 12\cdot 8=96$ h	$\leq 7\cdot 7=49$ h		P

Si x désigne le nombre d'assiettes et y le nombre de vases, le problème consiste à trouver la valeur maximale de l'expression

$$P=70x+160y.$$

avec les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & \leq & 96 \\ 0,5x+2y & \leq & 49 \\ x & \leq & 30 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Afin de déterminer le domaine défini par les contraintes, il est nécessaire de tracer les frontières données par les équations $2x+3y=96$, $0.5x+2y=49$, $x=30$, $x=0$ et $y=0$. Pour ce faire, commençons par isoler y afin d'identifier la pente et l'ordonnée à l'origine des droites.

1. $2x+3y=96$:

$$\begin{array}{rcl|l} 2x+3y & = & 96 & -2x \\ 3y & = & -2x+96 & :3 \\ y & = & -\frac{2}{3}x+32 & \end{array}$$

   Ainsi, nous pouvons tracer la droite en utilisant sa pente et son ordonnée à l'origine.

2. $0,5x+2y=49$:

$$\begin{array}{rcl|l} 0,5x+2y & = & 49 & -0,5x \\ 2y & = & -0,5x+49 & :2 \\ y & = & -0,25x+24,5 & \end{array}$$

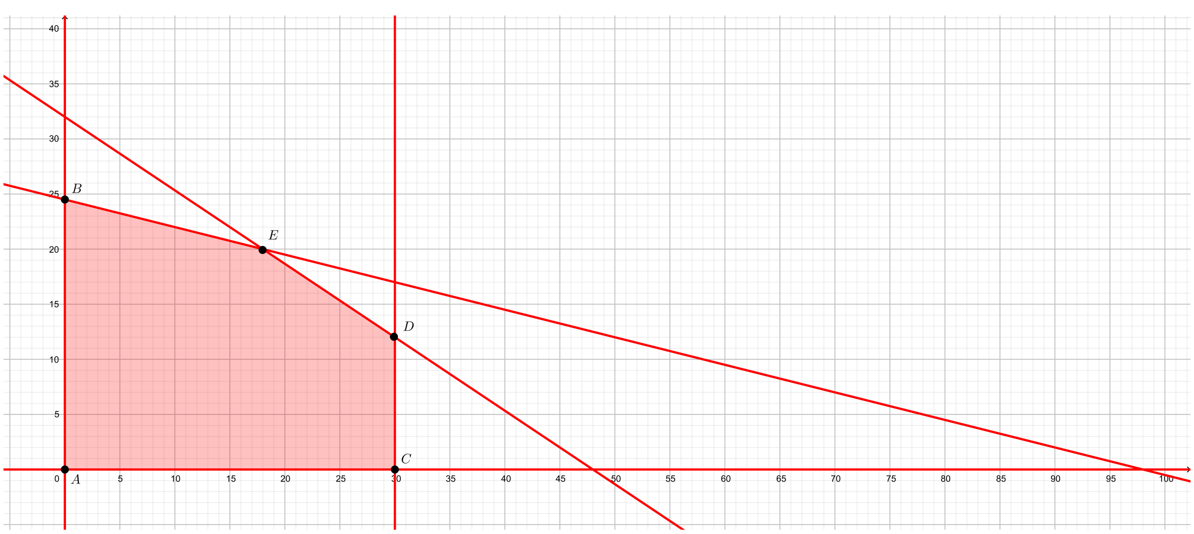
   Comme précédemment, il est désormais possible de dessiner la droite.

3. $x=30$:

   Il s'agit de la droite verticale passant par le point $(30;0)$

4. $x=0$ et de $y=0$:

   La droite $x=0$ est la droite verticale passant par l'origine. La droite $y=0$ horizontale passant par l'origine.



Le domaine défini par les contraintes est représenté ci-dessus.

Comme à l'exemple précédent, le maximum cherché est forcément atteint sur un sommet du polygone.

Déterminons alors les coordonnées de ces sommets :

Il est clair que les points $A(0;0)$, $B(0;24,5)$ et $C(30;0)$ sont des sommets du polygone.

Reste à déterminer les coordonnées des derniers sommets D et E.

Pour déterminer les coordonnées de D, on pose $x = 30$ et on résout

$$\begin{array}{rcl|l} 2\cdot 30+3y & = & 96 & \\ 60+3y & = & 96 & -60 \\ 3y & = & 36 & :3 \\ y & = & 12. & \end{array}$$

D'où le sommet $D(30;12)$.

Déterminons enfin les coordonnées de E.
On résout donc

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} 2x+3y & = & 96 & \\ 0,5x+2y & = & 49 & \cdot 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 96 \\ x+4y & = & 98 \end{array}\right. .$$

En isolant x de la deuxième équation, on a

$$x = 98 - 4y.$$

On substitue alors dans l'autre équation :

$$\begin{array}{rcl|l} 2(98-4y)+3y & = & 96 & \\ 196-8y+3y & = & 96 & -196 \\ -5y & = & -100 & :(-5) \\ y & = & 20. & \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$x = 98 - 4\cdot 20 = 98 - 80 = 18.$$

D'où le sommet $E(18;20)$.
Pour trouver le maximum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x;y)$	Valeur de $P = 70x + 160y$
$A(0;0)$	$70\cdot 0 + 160\cdot 0 = 0$
$B(0;24,5)$	$70\cdot 0 + 160\cdot 24,5 = 3'920$
$C(30;0)$	$70\cdot 30 + 160\cdot 0 = 2'100$
$D(30;12)$	$70\cdot 30 + 160\cdot 12 = 4'020$
$E(18;20)$	$70\cdot 18 + 160\cdot 20 = 4'460$

Ainsi, le profit maximal de 4'460 francs sera réalisé en produisant 18 assiettes et 20 vases.

Exemple. On désire préparer des rations alimentaires contenant au moins 90 g de protéines, 120 g d'hydrates de carbone et 2'400 calories à partir de deux produits A et B. Une dose du produit A coûte 1 franc et contient 15 g de protéines, 20 g d'hydrates de carbone et 300 calories. Une dose du produit B coûte 1 franc et contient 10 g de protéines, 30 g d'hydrates de carbone et 400 calories. Quelle est la composition de la ration alimentaire la plus économique ?

On regroupe les informations ci-dessus dans le tableau suivant.

	Protéines	Hydrates de carbone	Calories	Prix
Produit A	15 g	20 g	300	1 Fr
Produit B	10 g	30 g	400	1 Fr
Total	≥ 90	≥ 120	$\geq 2'400$	P

Si x désigne le nombre de doses du produit A et y le nombre de doses du produit B, le problème ci-dessus consiste à trouver la valeur minimale de l'expression

$$P = x + y$$

avec les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcl} 15x + 10y & \geq & 90 \\ 20x + 30y & \geq & 120 \\ 300x + 400y & \geq & 2'400 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Représentons alors les droites $15x + 10y = 90$, $20x + 30y = 120$, $300x + 400y = 2'400$, $x = 0$ et $y = 0$.

Calculons donc deux points par droite.

1. Points de $15x + 10y = 90$:

   — Pour le premier point, on pose $x = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl|l} 15 \cdot 0 + 10y & = & 90 & \\ 10y & = & 90 & : 10 \\ y & = & 9. & \end{array}$$
   D'où le point $(0; 9)$.

   — Pour le deuxième point, on pose $y = 0$:
   On a
   $$\begin{array}{rcl|l} 15x + 10 \cdot 0 & = & 90 & \\ 15x & = & 90 & : 15 \\ x & = & 6. & \end{array}$$
   D'où le point $(6; 0)$.

   Ainsi, la droite $15x + 10y = 90$ passe par $(0; 9)$ et $(6; 0)$.

2. Points de $20x+30y=120$:

   — Pour le premier point, on pose $x=0$:
   On a
   $$\left.\begin{array}{rcl} 20\cdot 0+30y & = & 120 \\ 30y & = & 120 \\ y & = & 4. \end{array}\right| : 30$$
   D'où le point $(0;4)$.

   — Pour le deuxième point, on pose $y=0$:
   On a
   $$\left.\begin{array}{rcl} 20x+30\cdot 0 & = & 120 \\ 20x & = & 120 \\ x & = & 6. \end{array}\right| : 20$$
   D'où le point $(6;0)$.

   Ainsi, la droite $20x+30y=120$ passe par $(0;4)$ et $(6;0)$.

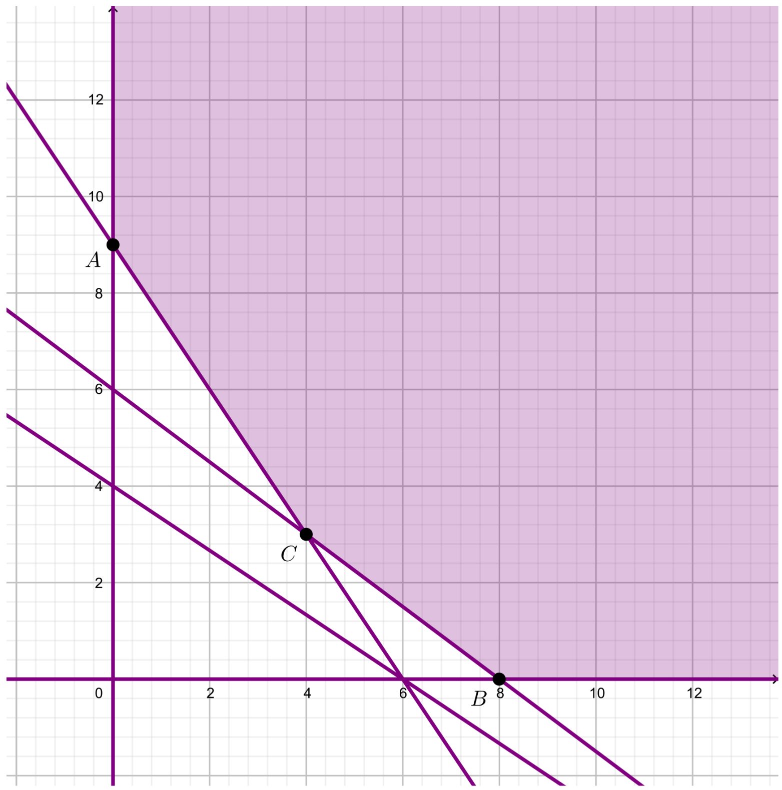
3. Points de $300x+400y=2'400$:

   — Pour le premier point, on pose $x=0$:
   On a
   $$\left.\begin{array}{rcl} 300\cdot 0+400y & = & 2'400 \\ 400y & = & 2'400 \\ y & = & 6. \end{array}\right| : 400$$
   D'où le point $(0;6)$.

   — Pour le deuxième point, on pose $y=0$:
   On a
   $$\left.\begin{array}{rcl} 300x+400\cdot 0 & = & 2'400 \\ 300x & = & 2'400 \\ x & = & 8. \end{array}\right| : 300$$
   D'où le point $(8;0)$.

   Ainsi, la droite $300x+400y=2'400$ passe par $(0;6)$ et $(8;0)$.

4. Points de $x=0$ et de $y=0$:
   La droite $x=0$, respectivement $y=0$ est verticale passant par l'origine, respectivement horizontale passant par l'origine.



Le domaine défini par les contraintes est représenté ci-dessus. On remarque que la contrainte $20x + 30y \geq 120$ est satisfaite si les autres le sont.

Le minimum cherché est forcément atteint sur un sommet du polygone.

Déterminons alors les coordonnées de ces sommets :

Il est clair que les points $A(0;9)$ et $B(8;0)$ sont des sommets du polygone.

Reste à déterminer les coordonnées du dernier sommet C.
A cet effet, on résout

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} 15x + 10y & = & 90 & :5 \\ 300x + 400y & = & 2'400 & :100 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rrcl} & 3x + 2y & = & 18 \\ - & 3x + 4y & = & 24 \\ \hline & -2y & = & -6 \\ & y & = & 3. \end{array}$$

Il s'ensuit la valeur de x en résolvant

$$\begin{array}{rcl|l} 3x + 2 \cdot 3 & = & 18 & \\ 3x + 6 & = & 18 & -6 \\ 3x & = & 12 & :3 \\ x & = & 4. & \end{array}$$

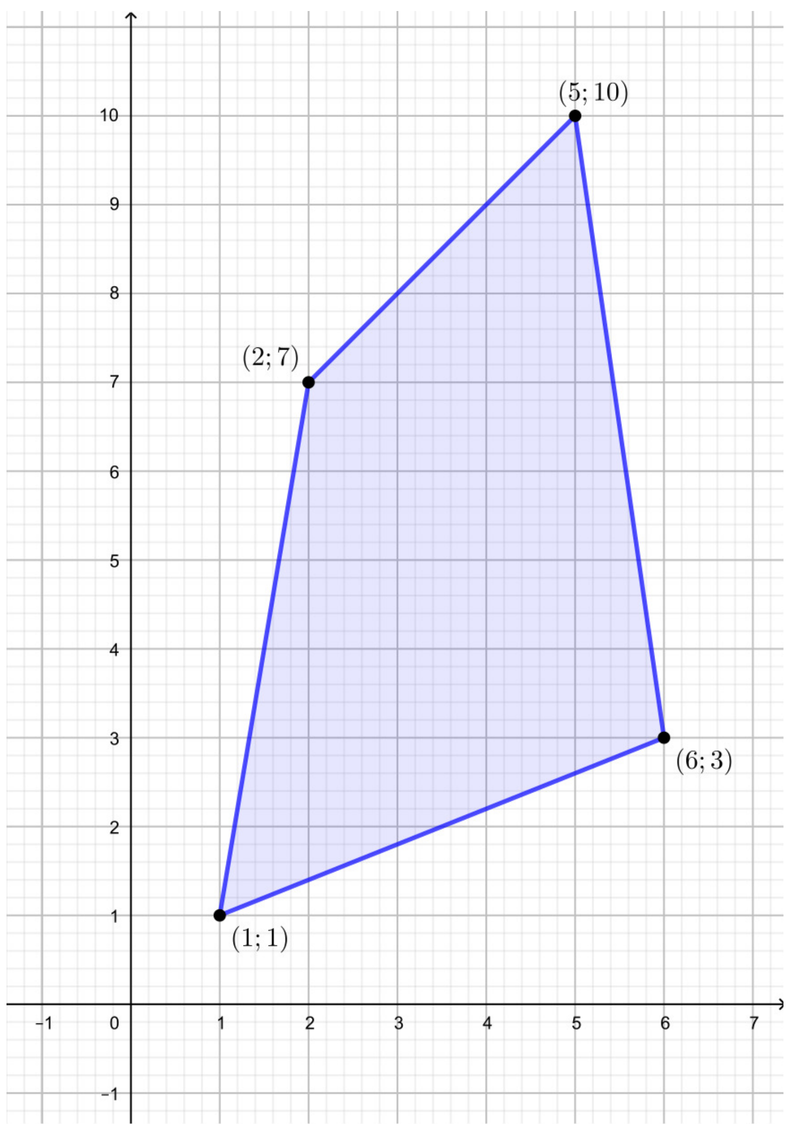
D'où le sommet $C(4;3)$.

Pour trouver le minimum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

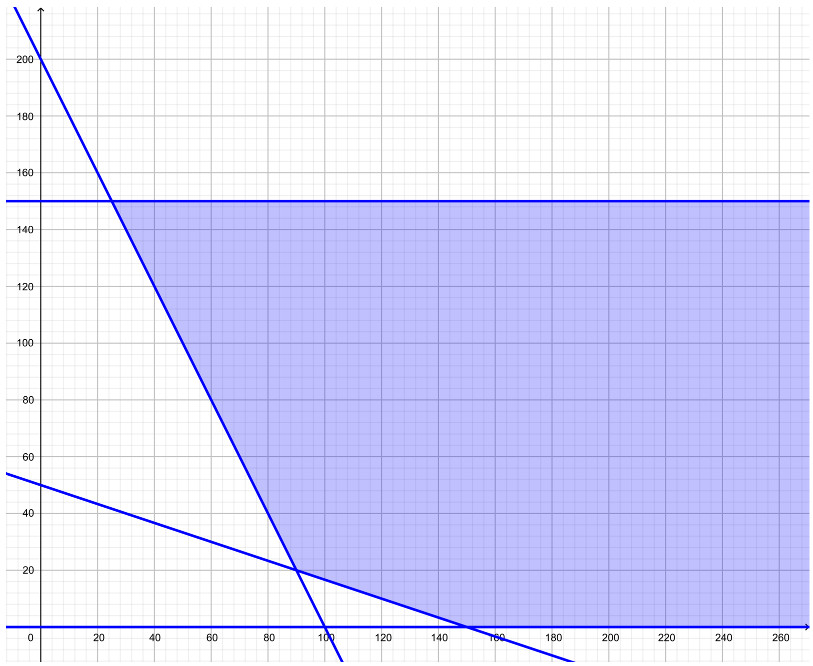
Sommet $(x;y)$	Valeur de $P = x + y$
$A(0;9)$	$0+9=9$
$B(8;0)$	$8+0=8$
$C(4;3)$	$4+3=7$

Ainsi, le coût minimal $P = 7$ francs est atteint pour $x = 4$ et $y = 3$. Cette ration contient $4 \cdot 15 + 3 \cdot 10 = 90$ g de protéines, $4 \cdot 20 + 3 \cdot 30 = 170$ g d'hydrates de carbone et $4 \cdot 300 + 3 \cdot 400 = 2'400$ calories.

Exercice 9.2. Déterminer pour quel(s) point(s) de la zone colorée ci-dessous la fonction $P = 3x + 5y$ est maximale et minimale.



Exercice 9.3. La zone colorée est solution d'un système d'inéquations



Répondre aux questions suivantes et justifier

a) $(50; 100)$ est une solution de ce système ?

b) $(140; 60)$ pourrait être une solution optimale ?

c) $(100; 0)$ pourrait être une solution optimale ?

d) Est-ce que $x = 150$ est l'équation d'une frontière ?

e) Est-ce que $2x + y = 200$ est l'équation d'une frontière ?

Exercice 9.4. Un pisciculteur va acheter au maximum 5'000 jeunes truites et perches chez un éleveur et leur donner une nourriture spéciale pour l'année prochaine. La nourriture pour poisson coûte 0,50 franc par truite et 0,75 franc par perche, et le coût total ne doit pas dépasser 3'000 francs. A la fin de l'année, une truite ordinaire pèsera 1,360 kg et une perche 1,800 kg. Combien de poissons de chaque type devraient être élevés dans le vivier pour que le nombre total de kilos de poissons à la fin de l'année soit maximal ?

Exercice 9.5. Un petit magasin vend des ordinateurs et des imprimantes. La place disponible dans le magasin est de 30 machines au maximum. En moyenne, chaque ordinateur coûte 2'000 francs et chaque imprimante 800 francs. Pour des raisons d'assurance, le magasin ne souhaite pas dépasser 40'800 francs pour la valeur du stock. Si son profit est de 200 francs net par ordinateur et de 100 francs par imprimante, combien d'ordinateurs, respectivement d'imprimantes ce magasin doit-il avoir en stock pour maximiser son profit net ?

Exercice 9.6. Une firme automobile construit des voitures et des camions dans une fabrique divisée en deux ateliers. L'atelier A travaille sur la partie intérieure et l'atelier B se penche sur la partie extérieure du véhicule. L'atelier A a besoin de 5 jours de travail pour un camion et 2 jours pour une voiture. L'atelier B, quant à lui, nécessite 3 jours de travail que cela soit pour un camion ou une voiture. A cause des contraintes dues au staff et aux machines, l'atelier A dispose au maximum de 180 jours de travail par année et l'atelier B d'un maximum de 135 jours par année

a) Si la firme automobile réalise un bénéfice de 3'000 francs par camion et 2'000 francs par voiture, combien de véhicule de chaque sorte devrait-elle produire pour maximiser son profit ?

b) Même question si le profit est de 4'000 francs par camion et 1'000 francs par voiture.

Exercice 9.7. Un club de tennis souhaite commander auprès de deux fournisseurs des balles ainsi que des raquettes de tennis pour les juniors. Il souhaite utiliser des balles de marque Wilson Junior pour les enfants et des balles de marque Tretorn pour les adultes. Les balles Wilson sont conditionnées dans des tubes contenant 3 balles et les Tretorn dans des tubes contenant 4 balles. Le fournisseur A propose un lot contenant 3 tubes Wilson, 10 tubes Tretorn et une raquette junior au prix de 200 francs. Le fournisseur B propose un lot contenant 4 tubes Wilson, 6 tubes Tretorn et une raquette junior au prix de 150 francs. Le club souhaite donc passer commande d'un certain nombre de lots auprès des deux fournisseurs. Pour ses besoins, le club souhaite disposer au moins du stock utilisé l'an passé, à savoir 117 balles Wilson, 344 balles Tretorn ainsi que 10 raquettes junior. Déterminer le nombre de lots à commander auprès des deux fournisseurs afin de minimiser les coûts.

Exercice 9.8. Un étudiant décide d'utiliser ses toutes nouvelles compétences en informatique pour gagner un peu d'argent. Il propose alors deux sortes de cours individuels : initiation à 240 francs et perfectionnement à 300 francs. Chaque cours est subdivisé en trois parties :

— La théorie, 2 h par cours d'initiation et 3 h par cours de perfectionnement.

— La pratique, 6 h par cours d'initiation et 4 h par cours de perfectionnement.

— Le travail personnel (PC à disposition), 10 h par cours d'initiation et 10 h par cours de perfectionnement.

Il s'est fixé pour toute l'année scolaire les limites suivantes :

— Maximum 30 heures de théorie.

— Maximum 60 heures de pratique.

— Mettre son PC à disposition pendant au maximum 110 h.

Combien de chacun des deux cours l'étudiant aurait-il intérêt à organiser pour gagner le plus d'argent possible tout en respectant toutes les contraintes qu'il s'est fixées ? Combien peut-il ainsi gagner ?

Exercice 9.9. Pour fleurir un parc, il faut au minimum 1'200 jacinthes, 3'200 tulipes et 3'000 narcisses. Deux pépiniéristes proposent leurs lots :

— Lot A : 30 jacinthes, 40 tulipes et 30 narcisses pour 75 francs.

— Lot B : 10 jacinthes, 40 tulipes et 50 narcisses pour 60 francs.

Déterminer le nombre de lots de chaque sorte que l'on doit acheter pour fleurir le parc avec une dépense minimale. Reste-t-il des fleurs pour le jardinier ?

Exercice 9.10. Une menuiserie s'est spécialisée dans la fabrication de boîtes en bois. En prévision d'une grosse commande, elle décide de remplir ses stocks. Un ouvrier produit de grandes boîtes rouges et un autre de petites boîtes jaunes. Chaque boîte rouge a un volume de 20 dm^3, chaque boîte jaune a un volume de 10 dm^3. L'armoire prévue pour stocker les boîtes a un volume de 4'000 dm^3. Pour des raisons techniques, le premier ouvrier ne peut produire au maximum que 150 boîtes rouges et le deuxième que 200 boîtes jaunes. Sachant que les boîtes rouges rapportent 80 francs et les boîtes jaunes 30 francs, combien la menuiserie doit-elle fabriquer de boîtes de chaque couleur pour rendre son profit maximal ?

Exercice 9.11. Un homme décide d'installer un stand à une fête foraine pour vendre des paquets de cacahuètes et de bonbons. Il possède 800 francs pour acquérir la marchandise. Un paquet de cacahuètes coûte 80 centimes et un paquet de bonbons coûte le double. Il obtiendra 2 francs de bénéfice par paquet de cacahuètes et 3,20 francs par paquet de bonbons. Pour cause de place, il ne peut pas avoir plus de 500 paquets de cacahuètes et 400 paquets de bonbons sur son stand. D'expérience, il sait qu'il ne va pas vendre plus de 700 paquets au total. Déterminer le nombre de paquets de chaque marchandise qu'il doit prévoir pour maximiser son bénéfice.

Exercice 9.12. Un tour opérateur doit louer des bus pour transporter 400 personnes. Il a choisi une compagnie possédant 10 grands bus pouvant contenir 50 personnes et six petits bus ayant une capacité de 25 personnes. Le premier type de bus coûte 2'500 francs à la location et le second 1'500. Déterminer le nombre de bus de chaque sorte que le tour opérateur devrait louer afin de minimiser ses coûts.

Exercice 9.13. La société Badler commercialise des calculatrices et des blocs-notes. Les calculatrices sont vendues à 5 francs et sont fabriquées pour 3 francs. Les blocs-notes sont également vendus à 5 francs mais sont produits 40% moins chers que les calculatrices. Cette société peut produire de 2'000 à 4'000 calculatrices et de 1'000 à 5'000 blocs-notes. Par ailleurs, elle ne peut écouler qu'un maximum de 8'000 articles en tout. Combien de calculatrices et de blocs-notes doit-elle produire pour maximiser son bénéfice ?

Exercice 9.14. Une fabrique d'automobiles construit deux modèles A et B. Chaque jour, elle peut produire au maximum 600 voitures A et 200 voitures B, mais en raison d'un manque de personnel, elle ne peut produire plus de 750 voitures en tout. De plus, la production du modèle B ne peut dépasser la moitié de celle du modèle A. Le bénéfice est de 1'200 francs pour une voiture du modèle A et de 1'800 francs pour une voiture du modèle B. Déterminer la production qui assurera un bénéfice maximal à la société. Quel est ce bénéfice ?

9.3 Solutions

Exercice 9.1. Oui, il s'agira alors de fabriquer 40 boîtes de type A et 0 boîte de type B pour un profit maximum de 2'000 francs.

Exercice 9.2.

Maximum : $P = 65$ avec $(x; y) = (5; 10)$.

Minimum : $P = 8$ avec $(x; y) = (1; 1)$.

Exercice 9.3.

a) Oui.

b) Non.

c) Non.

d) Non.

e) Oui.

Exercice 9.4. Il s'agira d'élever 3'000 truites et 2'000 perches pour que le nombre total de kilos soit maximal au terme de l'année.

Exercice 9.5. Le bénéfice maximal sera réalisé avec 14 ordinateurs et 16 imprimantes.

Exercice 9.6. Le bénéfice maximal sera réalisé avec

a) 30 camions et 15 voitures.

b) 36 camions.

Exercice 9.7. Le prix minimal sera réalisé avec 5 lots A et 6 lots B.

Exercice 9.8. Le bénéfice maximal sera réalisé avec 3 cours d'initiation et 8 cours de perfectionnement, ce qui lui rapporterait 3'120 francs.

Exercice 9.9. Le prix minimal sera réalisé avec 20 lots A et 60 lots B. Il reste alors 600 narcisses.

Exercice 9.10. Le bénéfice maximal sera réalisé avec 150 grandes boîtes rouges et 100 petites boîtes jaunes. Le profit sera alors de 15'000 francs.

Exercice 9.11. Le bénéfice maximal sera réalisé avec 400 paquets de cacahuètes et 300 paquets de bonbons.

Exercice 9.12. Le prix minimal sera réalisé en louant 8 grands bus.

Exercice 9.13. Le bénéfice maximal sera réalisé avec 3'000 calculatrices et 5'000 blocs-notes.

Exercice 9.14. Le bénéfice maximal sera réalisé avec 550 voitures du modèle A et 200 voitures du modèle B pour un bénéfice maximal de 1'020'000 francs.

9.4 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

9.1 ☐ Résoudre un problème de programmation linéaire.

Chapitre 10

Introduction à la statistique descriptive

10.1 Introduction

Statistique vient du mot latin *status* qui signifie état, situation. Les premières ébauches de la statistique remontent aux recensements qui furent mis sur pied dès les premiers siècles de notre ère. Ce n'est pourtant qu'au $18^{\text{ème}}$ siècle qu'elle se constitue comme une discipline scientifique autonome. Aujourd'hui, la statistique est une branche des mathématiques appliquées intervenant dans divers domaines de la pensée humaine tels que la démographie, l'économie, la médecine, l'agronomie ou encore l'industrie.

La démarche statistique peut se décomposer en cinq étapes. Premièrement, il s'agit d'identifier précisément la population et le (les) caractère(s) à étudier. Suite à cela, des données seront récoltées par recensement ou échantillonnage. Ensuite, il faudra regrouper, classifier et présenter les données (*statistique descriptive*). Il conviendra alors de comparer les résultats avec des modèles théoriques (*calcul des probabilités*). Enfin, il s'agira d'interpréter les résultats et d'établir des hypothèses plausibles en vue de prévisions (*statistique inférentielle*) concernant des circonstances analogues.

Ce chapitre se borne à une introduction à la statistique descriptive en présentant, sur la base de deux exemples illustratifs, les quelques mesures qui caractérisent un ensemble fini de données.

10.2 Définitions

Définition.

1. On appelle *population* l'ensemble de référence sur lequel vont porter les observations. Il est d'usage de désigner par la lettre N la taille d'une population.
2. On appelle *échantillon* une partie de la population que l'on détermine par sondage lorsque la population est trop nombreuse à étudier ou impossible à observer dans sa totalité.
3. On appelle *individu* tout élément de la population.
4. Lorsque l'on peut ainsi étudier une caractéristique que possède chacun des individus, on appelle cela une *variable statistique* ou *caractère*.
5. Les différentes valeurs que peut prendre une variable statistique sont les *modalités* de cette variable.
6. Le nombre d'individus vérifiant une modalité donnée est appelé *l'effectif*.
7. La *fréquence* d'une modalité est le rapport entre l'effectif et le nombre d'observations. On l'exprime souvent en pour cent.

Notation. On note une variable statistique par une lettre majuscule X, Y, ... et ses modalités par la même lettre minuscule affectée d'indices : x_1, x_2, ... pour la variable X ou y_1, y_2, ... pour la variable Y.

Exemple. On fait une étude auprès des étudiants du CPNE. On aimerait connaître le sexe, l'âge au 1er janvier, la taille et le taux de satisfaction par rapport aux études (satisfait (S), insatisfait (I) et sans réponse (SR)) de chaque étudiant.

La population considérée est "les étudiants du CPNE". Un *échantillon* est par exemple l'ensemble des étudiants en dernière année de formation. Tout étudiant en dernière année de formation est un *individu*.

Variable statistique	Modalités
X : sexe	$x_1 =$ homme, $x_2 =$ femme
Y : âge	$y_1 = 18$, $y_2 = 19$, ...
Z : taille	$z_i \in [150; 200]$
U : taux de satisfaction	$u_1 = S$, $u_2 = I$, $u_3 = SR$

Définition.

1. Une variable statistique est dite *qualitative*, respectivement *quantitative* si ses valeurs peuvent être comptées, respectivement qu'elles ne peuvent pas l'être.
2. On dit d'une variable statistique qualitative X qu'elle est *nominale*, respectivement *ordinale*, si ses valeurs ne possèdent pas d'ordre, respectivement si ses valeurs possèdent une certain ordre.
3. On dit d'une variable statiatique quantitative X qu'elle est *discrète*, respectivement *continue*, si l'ensemble des valeurs de celle-ci est fini ou infini dénombrable, respectivement infini non dénombrable.

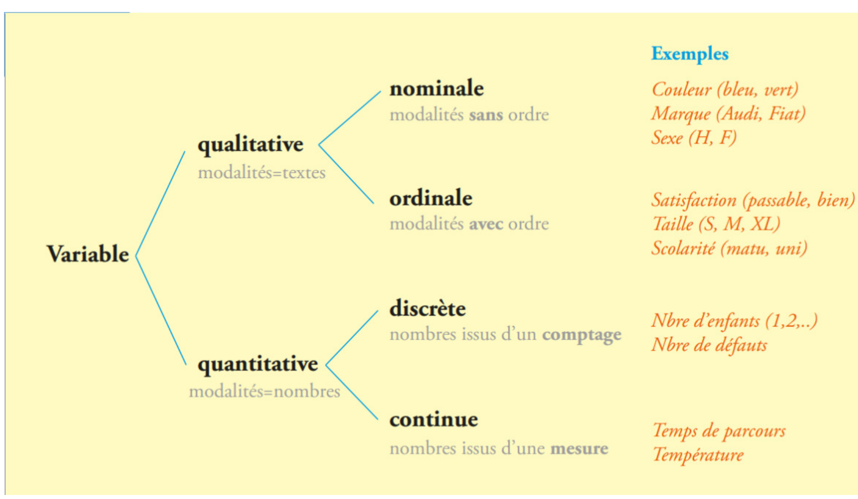


FIGURE 10.1 – Caractérisation des différentes variables statistiques.

Exemple. Dans notre exemple précédent, X est une variable statistique qualitative nominale, Y est une une variable statistique quantitative discrète, Z est une une variable statistique quantitative continue et U est une une variable statistique qualitative ordinale.

Exercice 10.1. Les voitures particulières neuves immatriculées en 2015 sont réparties dans le tableau ci-dessous selon le type d'énergie consommée.

Type d'énergie	Milliers de voitures
Essence	1'450
Diesel	630
Hybrides	32
Autres	9

a) Quelle est la population étudiée ?

b) Quel est le caractère étudié ?

Exercice 10.2. Dans chacune des situations suivantes, déterminer s'il s'agit d'une variable aléatoire qualitative (nominale ou ordinale) ou quantitative (discrète ou continue).

a) La taille des étudiants de l'Université de Neuchâtel.

b) Le nombre de pages d'un support de cours.

c) La nationalité des élèves d'une classe.

d) Le poids d'un nouveau né.

e) Le degré de qualification du personnel d'une entreprise.

f) Le nombre de jours de pluie pendant le mois d'août.

g) Le degré de satisfaction des étudiants du CPNE au cours de mathématiques.

h) Le lieu de résidence des enfants d'une classe primaire.

i) La vitesse du vent.

j) Le nombre d'erreurs typographiques sur chaque page d'un journal.

k) Le nombre de personnes vivant dans les ménages du canton de Neuchâtel.

l) La gravité des blessures des personnes admises aux urgences d'un hôpital.

m) L'état civil des habitants de la Suisse.

n) Le nombre de télévisions par famille.

o) Le temps passé par chaque patient dans un cabinet médical.

p) Le degré de difficulté des pistes de ski d'une station.

Exercice 10.3. On a demandé aux employés d'une entreprise pour quel parti politique ils avaient voté lors des dernières élections. Voici les données brutes obtenues :

PS	PLR	PS	PDC	PS	UDC
PS	UDC	PLR	PS	verts	PDC
UDC	PLR	verts	UDC	UDC	UDC
PLR	PS	PLR	PDC	PLR	PDC
UDC	PDC	PS	UDC	UDC	UDC

a) Identifier la population ainsi que la variable statistique.

b) Donner l'ensemble des modalités.

c) De quel type est cette variable statistique ?

Exercice 10.4. Un professeur de l'Uni a noté le nombre de points obtenus par 80 étudiants lors d'un test de statistiques.

2	3	5	5	4	6	6	5	4	3
7	7	7	6	2	7	7	9	8	10
5	6	6	8	6	6	3	7	3	5
9	7	6	4	7	5	9	9	6	9
6	3	9	8	8	7	5	6	10	6
9	7	7	7	4	7	10	8	7	10
3	5	8	5	8	7	4	8	10	7
4	6	6	8	7	7	7	8	8	9

a) Identifier la population ainsi que la variable statistique.

b) Donner l'ensemble des modalités.

c) De quel type est cette variable statistique ?

10.3 Traitement des données

10.3.1 Regroupement des données par modalités

Exemple. On étudie l'état civil des 40 employés d'une compagnie.

Dans un premier temps, il s'agit de collecter l'information, dans ce cas l'état civil de chacun des individus de la population (les 40 employés de la compagnie) : les *données brutes*. La variable statistique est l'état civil. Elle est qualitative nominale et les modalités sont : marié(e), célibataire, divorcé(e) et veuf(ve).

On donne l'état civil des employés identifiés par un numéro :

1	Marié	11	Veuf	21	Célibataire	31	Célibataire
2	Mariée	12	Marié	22	Mariée	32	Divorcée
3	Célibataire	13	Célibataire	23	Marié	33	Divorcé
4	Divorcé	14	Célibataire	24	Marié	34	Marié
5	Marié	15	Mariée	25	Divorcée	35	Mariée
6	Célibataire	16	Célibataire	26	Mariée	36	Marié
7	Célibataire	17	Marié	27	Célibataire	37	Marié
8	Mariée	18	Veuve	28	Célibataire	38	Mariée
9	Marié	19	Marié	29	Marié	39	Célibataire
10	Divorcée	20	Divorcé	30	Veuf	40	Mariée

On obtient avec ces données brutes une information personnalisée. On va sacrifier le caractère individuel de l'information pour obtenir un portrait d'ensemble. On calcule pour chaque modalité le nombre d'individus ayant cette modalité. Il s'agit de *l'effectif de la modalité* :

20 individus mariés
11 individus célibataires
6 individus divorcés
3 individus veufs

Il est d'usage de présenter la distribution des effectifs sous la forme d'un tableau :

Modalités	Effectifs	Fréquences
Mariés	20	50%
Célibataires	11	27,5%
Divorcés	6	15%
Veufs	3	7,5%
Total	40	100%

Pour trouver qu'il y a 27,5% de célibataires, il suffit de calculer

$$\frac{11}{40} = 0,275 = 27,5\%.$$

Exemple. Dans un quartier composé de 50 ménages, on étudie le nombre de personnes par ménage.

Dans un premier temps, il s'agit de collecter les données brutes de chacun des individus de la population (les 50 ménages). La variable statistique est le nombre de personnes par ménage. Elle est quantitative discrète et les modalités sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 8.

Les données brutes sont :

1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	6	6	6	8	8

On obtient avec ces données brutes une information personnalisée. Cette liste n'étant pas commode à lire, il convient à nouveau de sacrifier le caractère individuel de l'information pour obtenir un portrait d'ensemble. On va donc déterminer pour chaque modalité le nombre d'individus ayant cette modalité : *l'effectif de la modalité.*

Modalités x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i
1	5	10%
2	9	18%
3	15	30%
4	10	20%
5	6	12%
6	3	6%
8	2	4%

Dans le tableau ci-dessus, on a $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, etc. Les x_i représentent le nombre de personnes par ménage. On a de plus $n_1 = 5$, $n_2 = 9$, etc. Les n_i indiquent le nombre de ménages comportant x_i personnes. Ainsi, on a par exemple 10 ménages comportant 4 personnes.

10.3.2 Représentation des données à l'intérieur des classes

Souvent, lors d'une étude statistique portant sur une variable statistique quantitative discrète ou continue, les données recueillies diffèrent à peu près toutes les unes des autres et sont étalées sur un large intervalle de valeurs. L'objectif de la statistique descriptive étant de résumer de la façon la plus adéquate possible cet ensemble de données, nous procédons alors à un regroupement de ces dernières à l'intérieur de *classes*, c'est-à-dire de sous-intervalles de valeurs. Les règles suivantes permettent de choisir judicieusement ces classes :

— On fixe un nombre de classes entre 5 et 15. Le nombre de classes dépend de la taille de la population et il faut éviter, si possible, des fréquences de classes trop petites.

— Les intervalles sont du type $[b_{i-1}; b_i[$ ou $]b_{i-1}; b_i]$.

  b_{i-1} est la *borne inférieure* de la classe i ;

  b_i est la *borne supérieure* de la classe i ;

  $c_i = \dfrac{b_{i-1} + b_i}{2}$ est le *centre* de la classe i ;

  $L_i = b_i - b_{i-1}$ est la *largeur* (ou *étendue* ou *amplitude*) de la classe i.

— En principe, on fixe les bornes des intervalles de telle sorte que ces derniers soient d'égales largeurs. Les bornes doivent permettre des calculs simples.

— Si on doit vraiment utiliser des classes de largeurs inégales, on place les classes de largeur égale au centre de la distribution.

Exemple. Dans une région française, on étudie la superficie de chacune des 500 exploitations agricoles exprimées en hectares.

Dans cet exemple, la population est l'ensemble des exploitations agricoles d'une région française, tandis qu'un individu est ici une exploitation agricole donnée. La population étant définie, elle est observée selon certains critères. Le critère retenu, c'est-à-dire la variable statistique, est ici la superficie. Elle est de nature quantitative continue et les modalités sont des nombres représentant des superficies compris entre 0 ha et 40 ha.

Les données brutes que l'on recueille sur cette population sont inutilisables telles quelles. En vue de synthétiser l'information, on procède à des regroupements, à des classements et à l'établissement de tableaux statistiques. Le tableau ci-dessous constitue déjà une première simplification de l'information complète contenue dans un registre officiel comportant une ligne pour chacune des 500 exploitations.

Superficie en ha	Nombre d'exploitations	Fréquences en %
$]0; 10]$	48	9,6
$]10; 15]$	62	12,4
$]15; 20]$	107	21,4
$]20; 25]$	133	26,6
$]25; 30]$	84	16,8
$]30; 40]$	66	13,2

Les individus étant rassemblés par *classes*, on dit qu'on a affaire à un ensemble de données *groupées*. Ce qu'on gagne en simplicité par ce regroupement, on le perd en information. On sait par exemple que la classe $]20;25]$ comporte 133 exploitations dont les superficies sont comprises entre 20 et 25. Mais on ne connaît rien de la répartition de ces 133 individus à l'intérieur de leur classe. Il est alors commode de formuler l'hypothèse d'une répartition uniforme au sein de chaque classe. On assigne ainsi à l'individu occupant la place x sur 133 dans la classe $]20;25]$ (d'*étendue* 5), la valeur $20 + \dfrac{x}{133} \cdot 5$. Avec cette convention, le dernier individu (le $133^{\text{ème}}$) est affecté de la valeur 25, borne supérieure de l'intervalle.

Exercice 10.5. Des chimistes viennent de composer une nouvelle fibre synthétique qui devrait se caractériser par sa résistance. Afin de vérifier sa capacité de tension, on prélève de la production, au hasard, un échantillon de 60 fibres qu'on soumet à des essais de résistance. Les résultats (en kg) sont les suivants :

35	65	71	75	77	80	81	82	84	86	87	89	91	97	100
48	69	72	75	78	80	81	83	85	86	88	89	94	97	103
53	69	73	76	79	80	81	83	85	87	88	89	95	99	104
63	71	74	77	79	81	82	84	86	87	89	91	97	99	114

Regrouper les données en 6 classes d'amplitude 15 avec 30 comme valeur minimale. Pour chaque classe, donner le centre, l'effectif correspondant et les fréquences.

10.4 Représentations graphiques

10.4.1 Diagramme circulaire

La répartition d'une population et sa distribution de fréquences sont parfois plus expressives sur le plan visuel lorsqu'on les représente à l'aide d'un *diagramme circulaire* (appelé également *diagramme en secteurs*) . Un diagramme circulaire consiste à représenter la population totale par un disque et à le diviser en tranches, de façon proportionnelle aux effectifs de la variable statistique considérée. On obtient ainsi une représentation graphique de la répartition relative de la population, autrement dit de la distribution de fréquences.

Exemple. Reprenons notre exemple des exploitations agricoles. Ce qui caractérise "la taille d'une tranche" est l'angle au centre. Pour le trouver, il suffit de faire une règle de trois avec la relation 360° correspond à une fréquence de 100% ou, de manière équivalente, à un effectif de 500.

Superficie en ha	Effectifs	Fréquences en %	Angles en °
$]0;10]$	48	9,6	34,56
$]10;15]$	62	12,4	44,64
$]15;20]$	107	21,4	77,04
$]20;25]$	133	26,6	95,76
$]25;30]$	84	16,8	60,48
$]30;40]$	66	13,2	47,52

FIGURE 10.2 – Données avec angles.

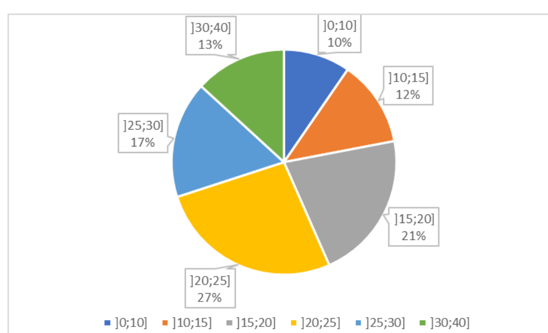


FIGURE 10.3 – Diagramme en secteurs.

Exemple. Reprenons notre exemple relatif à l'état civil des employés d'une compagnie. Pour représenter le diagramme en secteurs, il convient de déterminer l'angle de chaque tranche.

Etats civils	Effectifs	Fréquences en %	Angles en °
Mariés	20	50	180
Célibataires	11	$27,5$	99
Divorcés	6	15	54
Veufs	3	$7,5$	27

FIGURE 10.4 – Données avec angles.

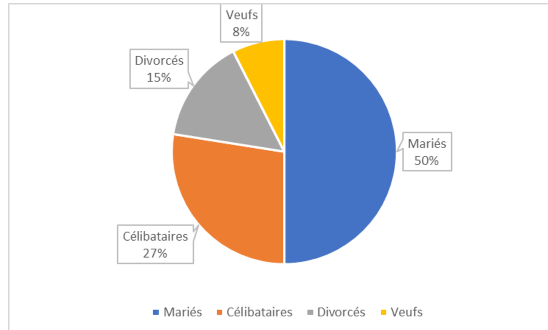
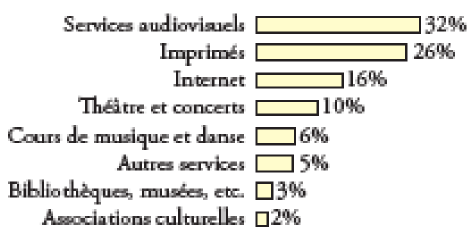


FIGURE 10.5 – Diagramme en secteurs.

Exercice 10.6. De 2009 à 2011, les dépenses culturelles ont représenté 5% de la dépense totale de consommation des ménages suisses. Leur répartition est donnée par le graphique ci-dessous.



Déterminer si les affirmations sont vraies ou fausses et justifier.

a) La population étudiée est "les ménages suisses".

b) Le caractère étudié est "les catégories de dépenses culturelles".

c) La nature du caractère est qualitatif discret.

d) Ce diagramme est faux, car la somme des pourcentages devrait être de 5%.

Exercice 10.7. Un sondage effectué sur 1400 adolescentes ayant assisté à un concert du groupe *One Direction* a été réalisé. La question posée était "Quel est votre chanteur favori du groupe ?" Les réponses ont été rassemblées au sein du tableau ci-dessous.

Chanteur	Effectifs	Fréquences (en %)	Angle (en degrés)
Liam Payne	350		
Niall Horan	210		
Zayn Malik	140		
Harry Styles	560		
Louis Tomlinson	140		

a) Compléter le tableau ci-dessus.

b) Construire le diagramme en secteurs à la main.

Exercice 10.8. Lors d'un sondage, avant une votation populaire, on a obtenu les indications suivantes :

Avis	Nombre
Oui	1'240
Plutôt oui	350
Indécis	780
Plutôt non	410
Non	1'120

a) Déterminer en % les fréquences.

b) Dessiner un diagramme circulaire.

10.4.2 Diagramme en bâtons

Lorsque la variable statistique est quantitative discrète, la distribution des effectifs peut être représentée visuellement par un *diagramme en bâtons*. Il s'agit d'un diagramme dans lequel les modalités se trouvent sur l'axe horizontal et chaque bâton monte jusqu'à hauteur de l'effectif (ou de la fréquence) correspondant(e).

Exemple. Reprenons notre exemple relatif à l'état civil des employés d'une compagnie. Le diagramme en bâtons de cette distribution est représenté ci-dessous.

Modalités	Effectifs
Mariés	20
Célibataires	11
Divorcés	6
Veufs	3
Total	40

FIGURE 10.6 – Données.

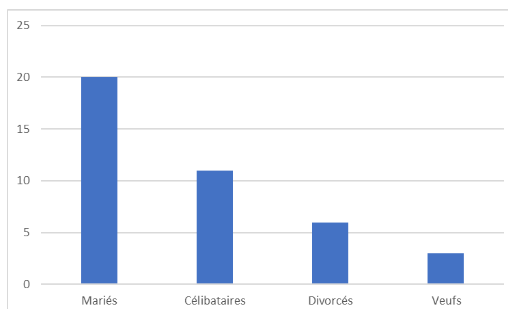


FIGURE 10.7 – Diagramme en bâtons.

Exemple. Reprenons notre exemple relatif au nombre de personnes par ménage.

Modalités	Effectifs
1	5
2	9
3	15
4	10
5	6
6	3
7	0
8	2

FIGURE 10.8 – Données.

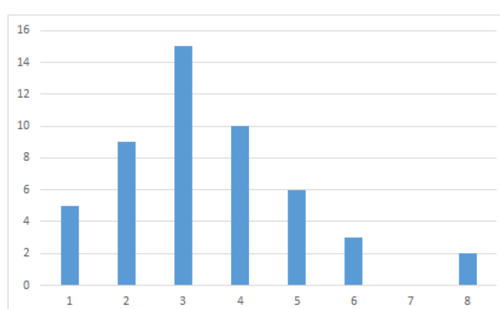


FIGURE 10.9 – Diagramme en bâtons.

Exercice 10.9. Un magasin de vêtements s'intéresse à la couleur des robes de sa collection. En notant la couleur de toutes ses robes, on a recueilli les données brutes ci-dessous.

jaune	verte	jaune	noire	rose	noire
bleue	bleue	blanche	orange	verte	beige
rouge	rouge	blanche	rouge	orange	bleue
bleue	rose	beige	verte	blanche	jaune
verte	verte	beige	blanche	rouge	rose
noire	jaune	rose	rose	bleue	beige
blanche	orange	verte	grise	beige	verte
noire	beige	grise	grise	noire	bleue
bleue	noire	rouge	noire	rouge	rouge
verte	grise	noire	orange	verte	noire

a) Identifier la population et la variable statistique.

b) Donner l'ensemble des modalités.

c) Donner le tableau de distribution des effectifs et des fréquences.

d) Représenter les données par un diagramme en bâtons.

Exercice 10.10. On étudie l'état civil des 30 employés (numérotés de 1 à 30) d'une petite entreprise.

1	Marié	11	Marié	21	Célibataire
2	Mariée	12	Célibataire	22	Marié
3	Célibataire	13	Marié	23	Veuf
4	Divorcé	14	Veuve	24	Célibataire
5	Marié	15	Marié	25	Divorcée
6	Célibataire	16	Divorcé	26	Divorcé
7	Célibataire	17	Célibataire	27	Marié
8	Mariée	18	Mariée	28	Marié
9	Mariée	19	Marié	29	Marié
10	Divorcée	20	Marié	30	Marié

a) Identifier la population.

b) Caractériser la variable statistique.

c) Donner l'ensemble des modalités.

d) Construire le tableau des distributions des effectifs et des fréquences.

e) Proposer le diagramme en bâtons des effectifs de cette variable statistique.

f) Proposer le diagramme en bâtons des fréquences de cette variable statistique.

g) Comparer ces deux représentations graphiques.

10.4.3 Histogramme

Lorsque la variable statistique est quantitative continue ou discrète, mais que les données sont regroupées en classes, la distribution peut être représentée visuellement par un *histogramme*, qui est un diagramme en colonnes où les rectangles sont juxtaposés. En effet, les modalités sont ici remplacées par des classes et celles-ci sont formées d'intervalles successifs de sorte qu'il n'y a plus lieu de séparer ces rectangles.

Exemple. Dans notre exemple des exploitations agricoles, les classes de superficie n'ont pas toutes la même *amplitude*. Certaines classes ont une amplitude de 10 ha, d'autres 5 ha. Pour être fidèle, une représentation graphique doit tenir compte de ces différences. Si, dans un *histogramme*, on représente les classes par des rectangles, alors, la surface totale représentant l'ensemble de la population, il faut que chaque rectangle ait une aire proportionnelle à l'effectif de la classe que ce dernier représente.

Superficie en ha	Nombre d'exploitations
$]0;10]$	48
$]10;15]$	62
$]15;20]$	107
$]20;25]$	133
$]25;30]$	84
$]30;40]$	66

Figure 10.10 – Effectifs originaux.

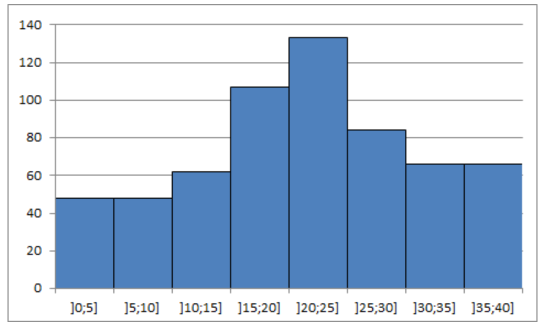


Figure 10.11 – Histogramme trompeur.

L'histogramme représenté ci-dessus est trompeur dans la mesure où il donne l'impression erronée que la classe initiale $[0;10[$ contient 96 exploitations : 48 d'une surface de 0 à 5 ha et le même nombre d'une surface de 5 à 10 ha. Pour éviter cette déformation, il y a lieu de choisir une amplitude de référence (par exemple 5 ha) et de procéder à une correction des effectifs.

Avec cette correction, on obtient alors le tableau et l'histogramme correspondant suivants.

Superficie en ha	Nombre d'exploitations
$]0;5]$	$\boxed{24}$
$]5;10]$	$\boxed{24}$
$]10;15]$	62
$]15;20]$	107
$]20;25]$	133
$]25;30]$	84
$]30;35]$	$\boxed{33}$
$]35;40]$	$\boxed{33}$

Figure 10.12 – Effectifs corrigés.

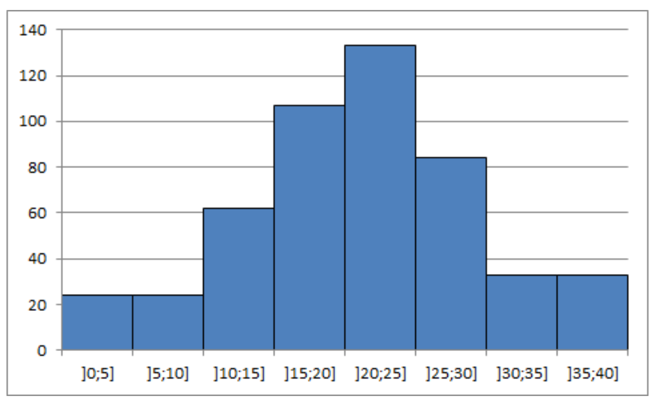


Figure 10.13 – Histogramme correct.

Algorithme de correction des effectifs

1. On choisit une classe de référence de largeur l (en général la plus fréquente).
2. Pour une classe quelconque de largeur L et d'effectif E, on calcule le rapport $x = \dfrac{E}{L}$.
3. On attribue alors à cette classe l'effectif corrigé $c = x \cdot l = \dfrac{E}{L} \cdot l$. Notons que cet effectif n'est pas forcément un nombre entier.

Exemple. Dans notre exemple, la classe de référence ayant pour largeur $l = 5$, la classe $]0; 10]$ a pour largeur $L = 10$, on calcule $x = \dfrac{E}{L} = \dfrac{48}{10} = 4,8$, ce qui conduit à l'effectif corrigé $c = x \cdot l = 4,8 \cdot 5 = 24$.

Exercice 10.11. Un recensement agricole en 2015 a permis de classer les exploitations agricoles selon la surface agricole utilisée. Les résultats sont présentés ci-dessous

Taille de l'exploitation en ha	Effectifs
$[0; 20[$	125'000
$[20; 50[$	44'000
$[50; 100[$	62'000
$[100; 200[$	35'000
$[200; 1000[$	12'000

a) Déterminer la population ainsi que le caractère étudié.

b) Comment appelle-t-on les intervalles de la première colonne ?

c) Pourquoi a-t-on fait un regroupement ?

d) Quel est le type de cette variable statistique ?

e) Par quel type de diagramme peut-on représenter ce tableau ?

Exercice 10.12. Construire correctement l'histogramme correspondant à partir des classes et effectifs suivants.

Classes	Effectifs
$[50; 100[$	3
$[100; 125[$	5
$[125; 150[$	4
$[150; 175[$	6
$[175; 200[$	5
$[200; 300[$	2

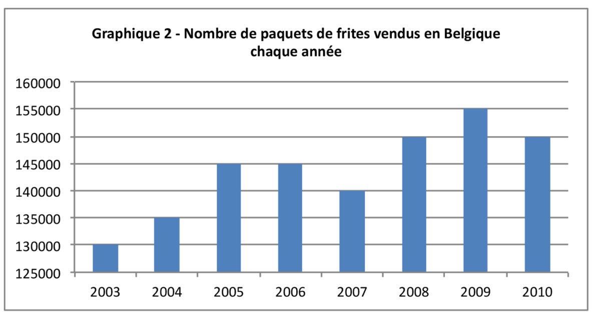
10.4.4 Diagrammes trompeurs ou faux

Dans la presse, à la télévision ou dans des tracts à caractère politique, il n'est pas rare d'y découvrir des diagrammes ou des graphes déformant la réalité, voire complètement faux. Le but de cette section consiste à mettre en avant les techniques utilisées pour déformer la réalité au travers de quelques exemples.

Exemple.

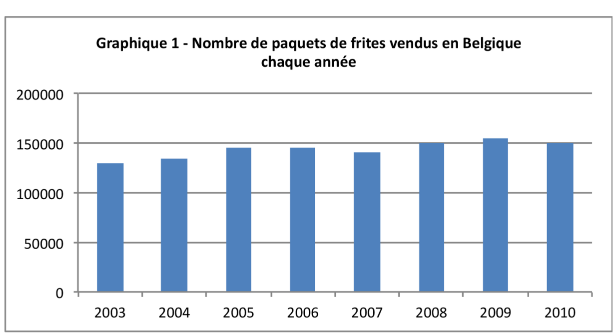
1. Dans cet exemple relatif à l'évolution du nombre de paquets de frites vendus en Belgique, nous allons voir comment présenter les données pour donner trois messages radicalement différents.

   a) En dépit des chiffres de 2007, le diagramme en bâtons ci-dessous semble indiquer une augmentation des ventes du nombre de paquets de frites.



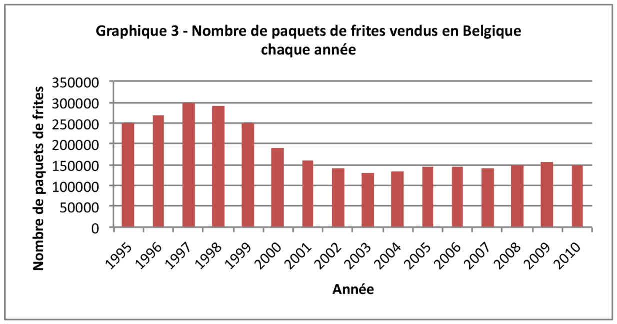
   Cependant, on y regardant de plus près, on observe que l'axe des y ne part pas à 0, mais à 125'000 ! Sur ce diagramme, on peut y lire que 130'000 paquets de frites ont été vendus en 2003, contre 135'000 en 2004, ce qui correspond à une augmentation de 5'000 paquets en une année, soit d'environ $3,85\%$. Or, l'effet visuel du diagramme laisse supposer au premier abord que les ventes ont doublé durant cette période, c'est-à-dire qu'elles ont augmenté de 100% ! Remarquons enfin que le diagramme donne l'impression que les ventes ont été multipliées par 6 entre 2003 et 2009, alors qu'elles sont passées de 130'000 à 155'000, ce qui fait 25'000 de plus, soit une augmentation de presque 20% seulement !

   b) En présentant les mêmes données, mais en faisant partir l'axe des y de l'origine, le diagramme en bâtons ci-dessous semble indiquer une tendance de la vente des paquets de frites plutôt stable.



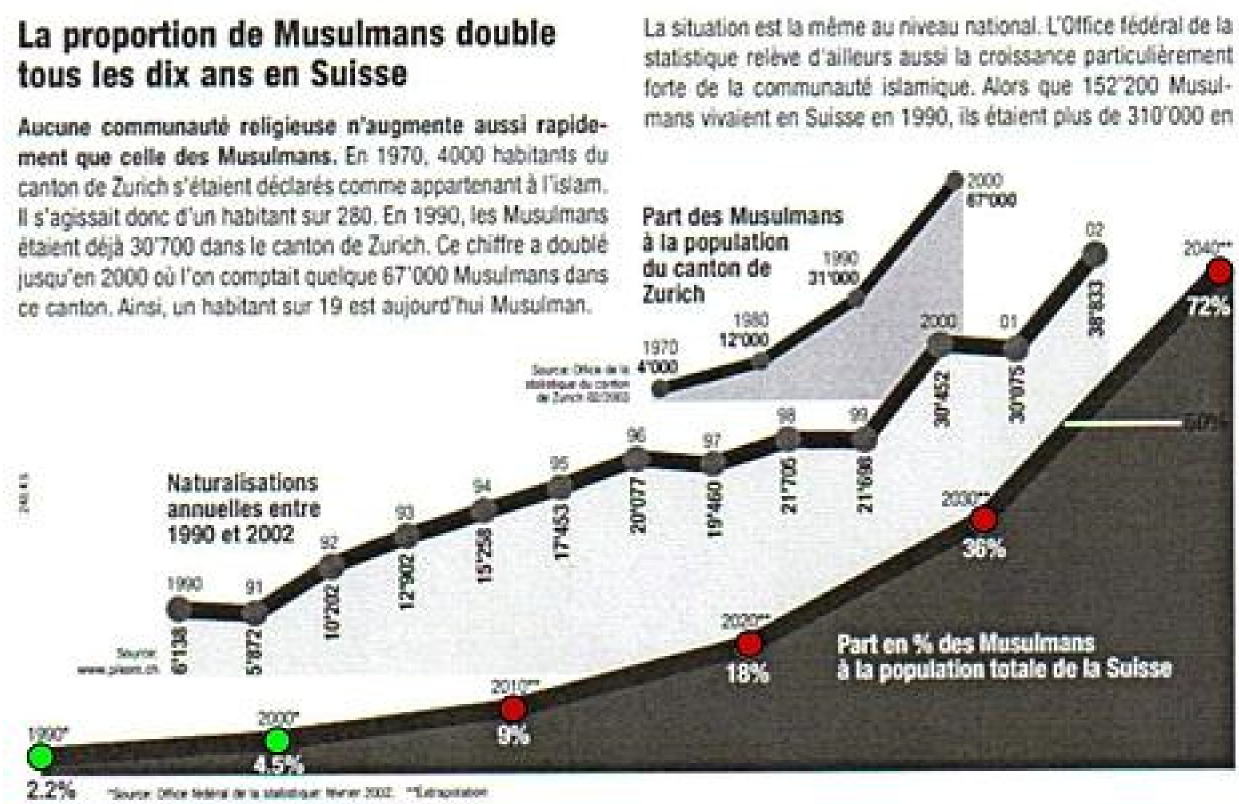
c) Les deux diagrammes ci-dessus contiennent uniquement les chiffres des ventes entre 2003 et 2010. Qu'en est-il si on considère les chiffres des années précédent 2003 ?

Le diagramme ci-dessous présente l'évolution du nombre de paquets de frites entre 1995 et 2010. En tenant compte de ces chiffres, il semble que les ventes de paquets de frites ont tendance à diminuer !



Avec une même étude, il est donc possible de faire passer trois messages complétement différents selon la manière dont on présente l'information.

2. En vue des votations du 26 septembre 2004, un comité proche d'un parti politique publie le document suivant.



Le texte explique qu'aucune communauté religieuse n'augmente autant rapidement que les musulmans. La courbe ci-dessus semble en effet indiquer que la croissance du nombre de musulmans en Suisse est exponentielle. Or, en y regardant de plus près, on observe que les chiffres de 1990 et de 2000 ($2,2\%$ et $4,5\%$) sont munis d'une étoile indiquant qu'ils proviennent de l'Office fédéral de la statistique. Les chiffres suivants (à partir de 2010) sont quant à eux munis de deux étoiles, pour préciser qu'il s'agit d'une extrapolation.

Mais comment arriver à un tel pronostic ? On observe que $4,5\%$ représente à peu près le double de $2,2\%$. Avec ces deux seules valeurs, on en conclut que le pourcentage de la communauté musulmane de Suisse double tous les 10 ans pour atteindre ainsi 72% en 2040, soit le dernier point représenté sur le graphe. On comprend mieux pourquoi le graphe s'arrête à ce point. En effet, le suivant indiquerait que le taux de musulmans s'élèverait à 144% en 2050 ! Cette projection est donc basée sur un doublement arbitraire, mais renforcée par les chiffres zurichois, qui indiquent une forte progression entre 1970 et 2000. Cette extrapolation basée sur un seul canton ne donne aucune raison de penser que ces chiffres sont transposables à toute la Suisse. Notons enfin, que selon l'OFS, il y avait $4,9\%$ de musulmans en Suisse en 2011 et $5,3\%$ en 2018. Soit des valeurs bien différentes des 9% et 18% prédites par les auteurs du document ci-dessus !

3. Quant à l'affiche ci-dessous, elle contient un certain nombre d'éléments forts discutables. Jörg Mäder, conseiller national zurichois depuis 2019, décortique les nombreux éléments controversés de cette affiche sur cette vidéo.

4. Le graphique publié par un quotidien en août 2008 (ci-dessous, à gauche) semble montrer que la consommation de viande s'est stabilisée ces dernières années. Cependant, on y regardant de plus près, on observe que que l'axe horizontal du graphique n'est pas linéaire : la moitié du graphique représente 50 ans, alors que l'autre moitié (la partie stable) ne concerne que 7 ans, donnant ainsi une impression erronée de la situation. Le graphique de droite montre les même données de façon correcte, et donne une impression différente.

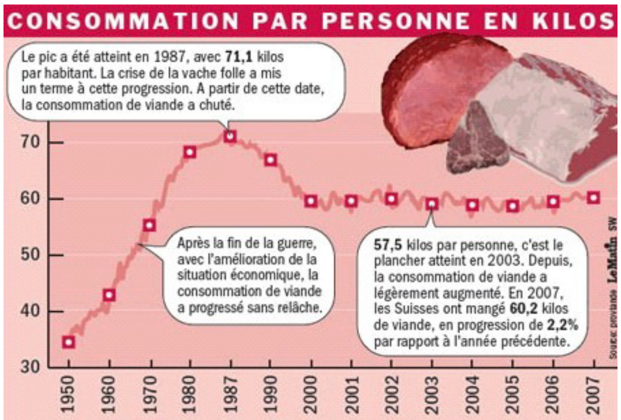


Figure 10.14 – Graphe faux.

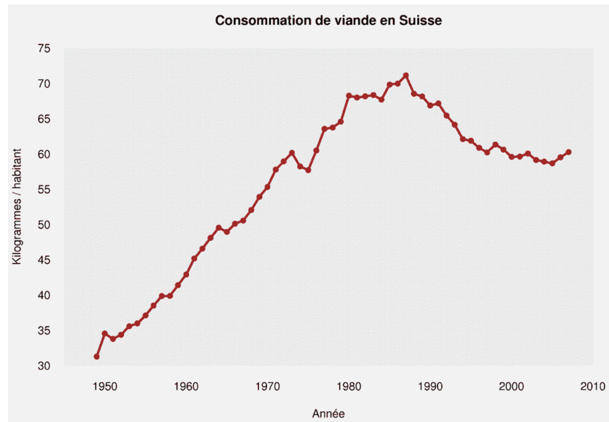
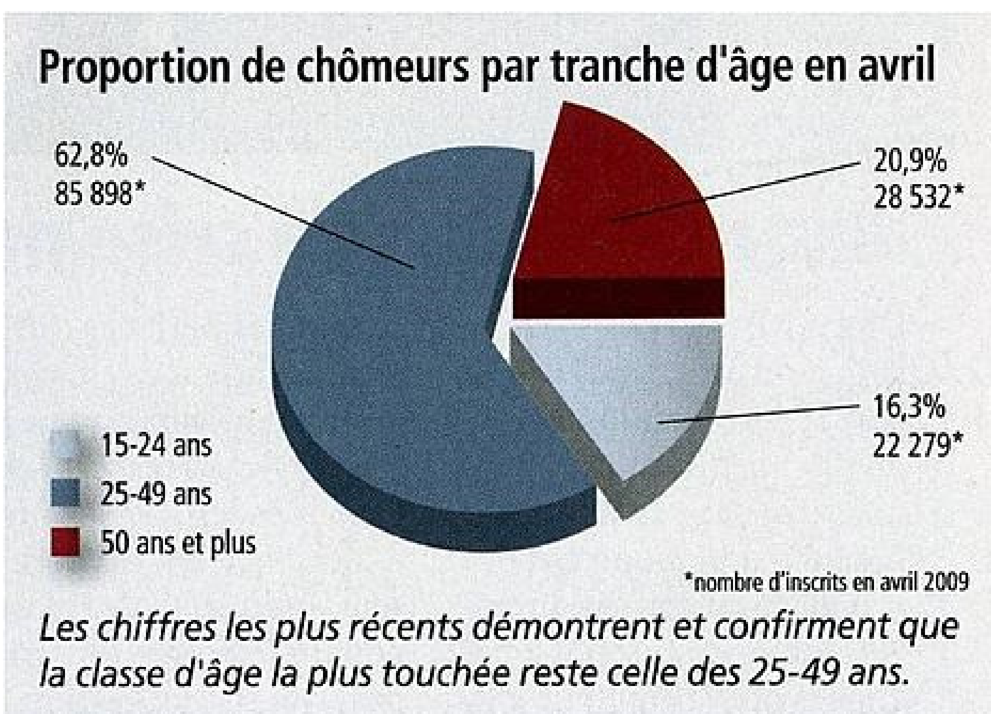


Figure 10.15 – Graphe correct.

On peut voir une autre différence entre les deux graphiques : celui de gauche indique des variations à l'intérieur des années. En fait, il apparaît que ces variations ont été ajoutées pour éviter que le graphique ne soit trop lisse. On peut s'étonner que de telles considérations purement esthétiques prennent le pas sur le traitement correct de l'information.

5. Le diagramme circulaire ci-dessous représente la proportion de chômeurs par tranche d'âge.



La légende conclut que la classe la plus touchée est celle des 25 à 49 ans. Les trois classes étant d'amplitudes différentes, il est difficile d'établir des comparaisons. Il n'est en effet pas surprenant que le plus grand nombre de chômeurs se trouve dans la classe la plus peuplée !
En fait, la valeur intéressante n'est pas la valeur absolue, mais le pourcentage de chômeurs à l'intérieur de chaque classe. Selon le rapport du SECO utilisé pour créer le graphique, ces taux sont de 4% pour les 15-24 ans, de 3.6% pour les 25-49 ans, et en-dessous de 3% pour les 50-65 ans. La classe la plus touchée est donc celle des jeunes, contrairement à ce qu'en dit l'auteur du diagramme.

6. Une chaîne de télévision a présenté le diagramme ci-dessous en 2011. Celui-ci rend compte du taux de dépenses publiques en 2011 en % du PIB de trois pays et de l'Union européenne.

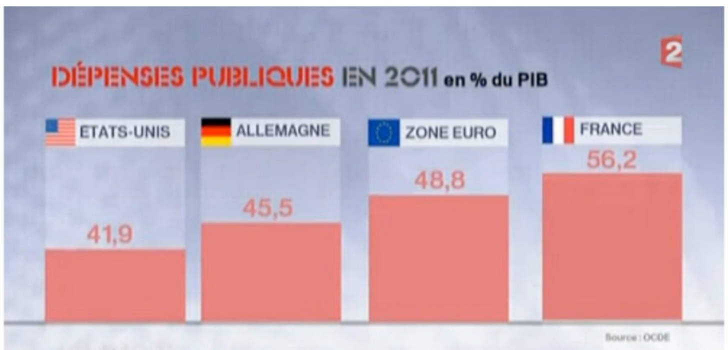


FIGURE 10.16 – Diagramme erroné.

Si le 100% correspond à la zone comprise entre l'horizontale et à la parallèle passant juste en dessous du nom des pays, les $41,9\%$ de dépenses publiques de Etats-Unis semblent être correctement représentées. Cela n'est pas le cas pour les autres pays ! En effet, les $56,2\%$ de la France sont beaucoup trop hauts. Le diagramme donne l'impression que les dépenses publiques de la France sont de l'ordre de 80% ! Cette technique a pour objectif de susciter une émotion auprès de la population, en amplifiant la différence du taux de dépenses publiques par rapport à d'autres pays.
Ci-dessous, figure le diagramme correct, tel qu'il aurait dû être présenté aux téléspectateurs.

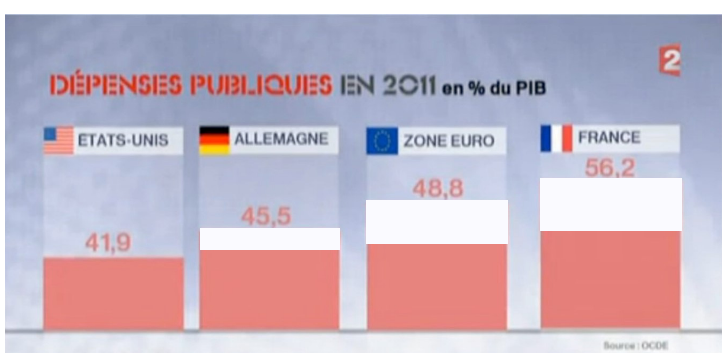
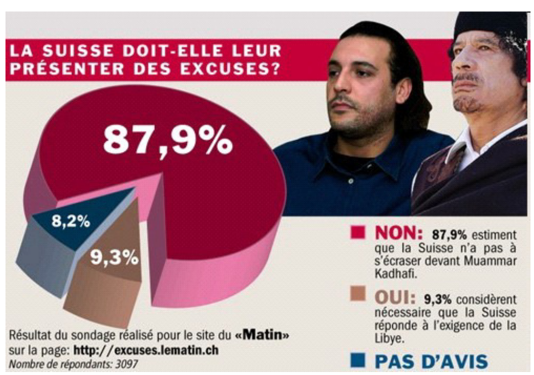


FIGURE 10.17 – Diagramme correct.

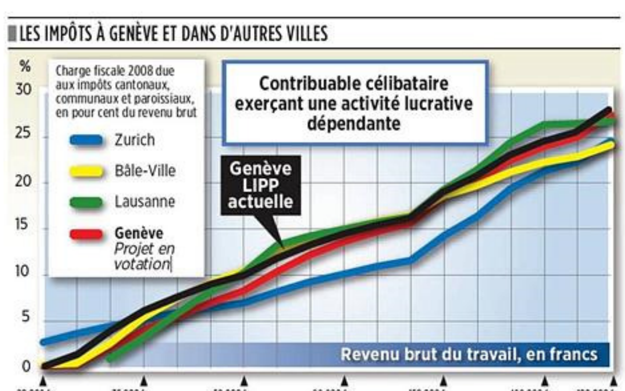
7. La figure ci-dessous illustre le fait que le prix des montres a augmenté de 40% sur 7 ans.

Le graphiste a voulu associer cette augmentation au diamètre des montres. On peut vérifier qu'ils augmentent bien de 40%. Le lecteur voit l'augmentation de la surface des horloges qui, elle, n'est pas de 40%, mais proche de 100% ! Enfin, les aiguilles ont été ajoutées dans un but purement esthétique, mais peuvent induire en erreur en donnant l'impression qu'elles contiennent de l'information.

8. Dans le diagramme circulaire ci-dessous, la somme des parties fait $105,4\%$! Le $8,2\%$ était probablement un $2,8\%$ à l'origine, ce qui donnerait la somme attendue de 100%.

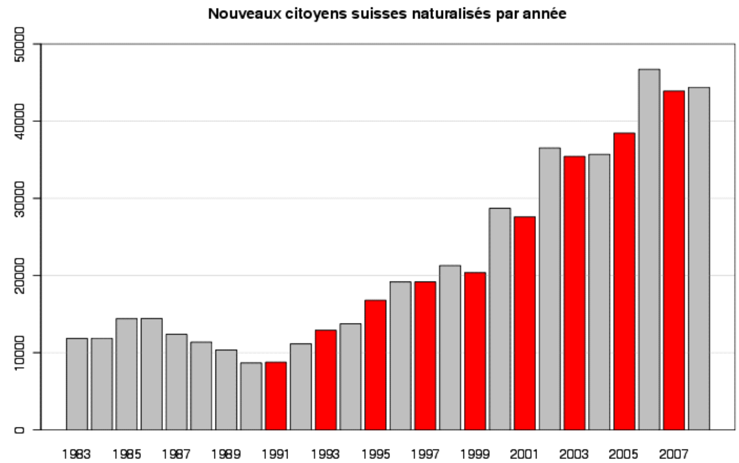


Exercice 10.13. La figure ci-dessous est parue dans un quotidien genevois.

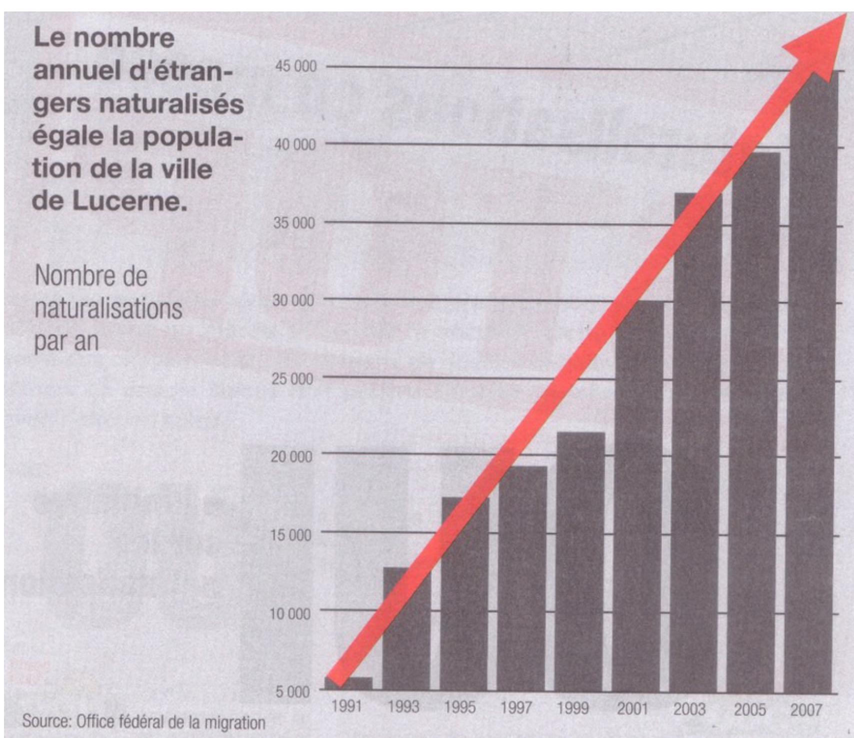


Expliquer en quoi ce graphe est trompeur.

Exercice 10.14. Le diagramme ci-dessous rend compte du nombre de citoyens suisses naturalisés par année de 1983 à 2008.



Donner deux techniques utilisées pour construire le diagramme suivant.



Exercice 10.15. La figure ci-dessous datant de 2010 explique comment compter correctement la proportion d'étrangers en Suisse.

Voilà comment on compte correctement:

Si on ajoute les clandestins, les frontaliers et les requérants d'asile aux étrangers recensés officiellement, la proportion d'étrangers vivant en Suisse augmente sensiblement.

Exemple 2008:

• étrangers officiellement recensés	1 638 949
• sans-papiers (estimation moyenne)	200 000
• frontaliers	212 566
• requérants d'asile	40 797
Total des étrangers en Suisse:	**2 092 309**
	=27,2%

Proportion d'étrangers sans tenir compte des naturalisations de ces 25 dernières années: **=34,3%**

Les chiffres ci-dessus reposent sur une estimation de la population à 7,7 millions et à 550'000 naturalisés entre 1985 et 2010.

a) Déterminer, en %, le taux d'étrangers en Suisse en 2010, en tenant également compte des sans-papiers, des frontaliers et des requérants d'asile.

b) Comment a été obtenu le chiffre de $27,2\%$?

c) Expliquer comment a été obtenu le chiffre de $34,3\%$ et porter un jugement sur sa pertinence.

10.4.5 Polygone des effectifs

A l'histogramme, on associe souvent le *polygone des effectifs*. Il s'agit d'une courbe polygonale telle que la surface comprise entre cette courbe et l'axe des abscisses soit égale à la surface de l'histogramme. Elle est obtenue en joignant les milieux des sommets des rectangles de l'histogramme. Pour la première et la dernière classe, on crée à cet effet deux classes fictives d'effectifs nuls.

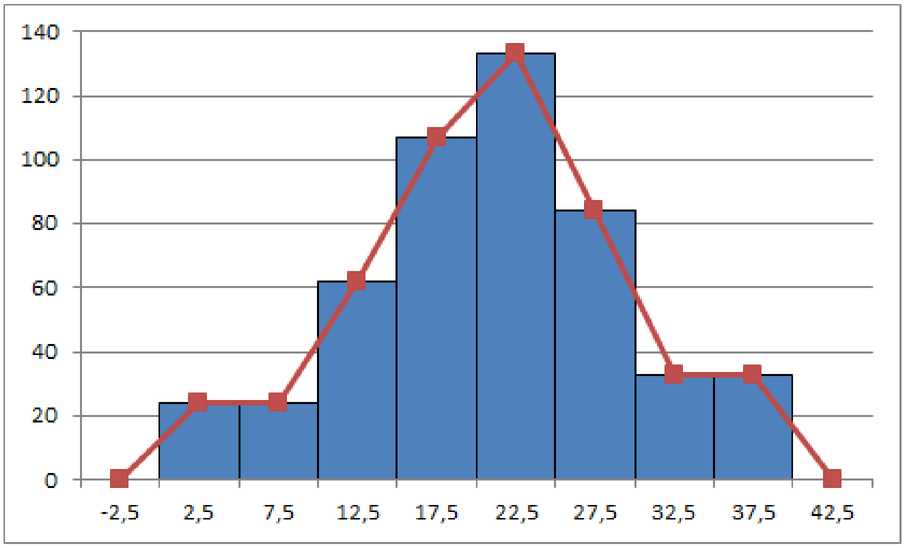


FIGURE 10.18 – Polygone des effectifs.

Exercice 10.16. Une entreprise a enregistré le salaire de tous ses vendeurs pour l'année dernière. Voici les données rangées :

Classes (salaires)	Centres	Effectifs	Fréquences
$[10000; 15000[$	12500	2	
$[15000; 20000[$		8	10%
$[20000; 25000[$	22500	14	
$[25000; 30000[$	27500	21	$26,25\%$
$[30000; 35000[$			20%
$[35000; 40000[$	37500	12	15%
$[40000; 45000[$	42500	5	$6,25\%$
$[45000; 50000[$	47500		$2,5\%$
Total		80	100%

a) Compléter le tableau des distributions des effectifs et des fréquences.

b) Construire l'histogramme correspondant.

c) Construire le polygone des effectifs.

10.4.6 Polygone des effectifs cumulés

Aux données de départ, on associe le tableau des effectifs cumulés croissants et cumulés décroissants. On interprète les données de ce tableau comme suit. On peut affirmer, par exemple, que 350 exploitations agricoles ont une superficie d'au plus 25 ha. Par ailleurs, 283 exploitations ont une superficie d'au moins à 20 ha.

Classes	Effectifs	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
$]0;10]$	48	48	500
$]10;15]$	62	110	452
$]15;20]$	107	217	390
$]20;25]$	133	350	283
$]25;30]$	84	434	150
$]30;40]$	66	500	66

Les données contenues dans ce tableau peuvent être représentées par deux courbes : *le polygone des effectifs cumulés croissants* et le *polygone des effectifs cumulés décroissants*. Dans la représentation de ces courbes, on ne se préoccupe pas des différences d'amplitude des classes. Notons qu'il est également possible de réaliser un polygone des fréquences.

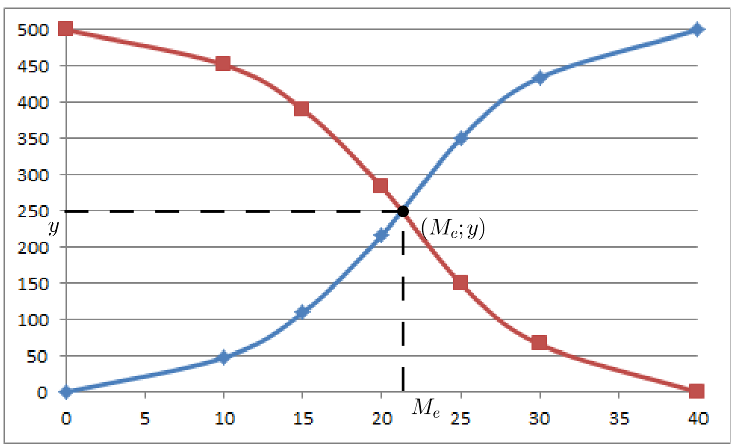


FIGURE 10.19 – Polygones des effectifs cumulés.

Remarque. L'intersection de ces deux polygones est un point $(M_e;y)$, dont la première coordonnée est appelée *médiane* M_e de la population. On observe, dans notre exemple, que $M_e \cong 21$. Cette valeur divise la population en deux parties d'effectifs égaux. En effet, soit y la seconde coordonnée du point d'intersection. Comme ce point est sur le polygone des effectifs cumulés croissants, on peut affirmer que y exploitations ont une superficie inferieure à M_e ; le reste, c'est-a-dire $500 - y$, ont une superficie superieure à M_e. Ce point étant également sur le polygone des effectifs cumulés décroissants, y decrit le nombre d'exploitations ayant une superficie superieure à M_e. On en deduit que $y = 500 - y$ et donc, que $y = \frac{500}{2} = 250$. Ainsi la moitié des exploitations ont une superficie supérieure (respectivement inférieure) à $M_e \cong 21$ ha.

Remarque. Dans une étude statistique, si on souhaite connaître la proportion de chaque valeur que peut prendre la variable statistique étudiée, on regarde sa fréquence f_i.

Si par contre on souhaite connaître la proportion des individus qui présentent des valeurs inférieures à une valeur fixée, on regarde la fréquence cumulée croissante F_i.

Pour visualiser la proportion des individus qui présentent des valeurs supérieures ou égales à une valeur fixée, on étudiera alors la fréquence cumulée décroissante F_i'.

Exercice 10.17. La gendarmerie de Fribourg a relevé sur l'autoroute les vitesses suivantes un samedi soir.

Vitesses (en km/h)	Effectifs
$]80;100]$	4
$]100;120]$	34
$]120;140]$	84
$]140;160]$	58
$]160;180]$	20
Total	200

a) Quel est le type de cette variable statistique ?

b) Construire l'histogramme des fréquences, ainsi que le polygone des fréquences.

c) Construire le polygone des fréquences cumulées.

d) Combien d'automobilistes roulaient trop vite ?

e) Combien d'automobilistes seront amendés, sachant qu'une marge de 4% est déduite de la vitesse réelle observée ?

10.5 Valeurs centrales

Une *valeur centrale* est une valeur caractéristique ou représentative d'un ensemble de données. Si cette valeur caractéristique a tendance à se situer au milieu d'un ensemble de données rangées par ordre de grandeur croissant, alors on dit qu'elle est une *mesure de tendance centrale* ou une *valeur centrale*.

10.5.1 Moyenne arithmétique

Cas discret

Définition. La *moyenne arithmétique* $\overline{x}$ est la valeur centrale la plus connue. Elle est égale au quotient de la somme de toutes les valeurs observées du caractère par l'effectif total. Ainsi

$$\boxed{\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{N}, \qquad \text{où } N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

Exemple. Reprenons notre exemple du nombre de personnes par ménage :

Modalités x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i
1	5	10%
2	9	18%
3	15	30%
4	10	20%
5	6	12%
6	3	6%
7	0	0%
8	2	4%

la moyenne arithmétique $\overline{x}$ est donnée par

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 8}{50} = 3,44.$$

Exercice 10.18. Calculer la moyenne arithmétique de l'ensemble des nombres

$$E = \{2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 11, 13\}.$$

Cas continu

Pour des séries de données groupées, se fondant sur une répartition uniforme au sein des classes, on convient d'affecter à tous les individus d'une classe $]b_{i-1}, b_i]$ le centre

$$c = \frac{b_{i-1} + b_i}{2}.$$

Exemple. Pour notre exemple des exploitations agricoles, à l'aide du tableau suivant

Classes x_i	Centres c_i	Effectifs n_i
$]0; 10]$	5	48
$]10; 15]$	$12,5$	62
$]15; 20]$	$17,5$	107
$]20; 25]$	$22,5$	133
$]25; 30]$	$27,5$	84
$]30; 40]$	35	66
Total		500

on tire la moyenne arithmétique des superficies de ces 500 exploitations agricoles, en calculant

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 48 + 12,5 \cdot 62 + 17,5 \cdot 107 + 22,5 \cdot 133 + 27,5 \cdot 84 + 35 \cdot 66}{500} = \frac{10500}{500} = 21 \text{ ha}.$$

Exercice 10.19. Calculer la moyenne arithmétique de chacune des populations suivantes.

Ages	Effectifs
$]0; 20]$	72
$]20; 65]$	180
$]65; 100]$	43

Salaire (en francs)	Nombre de collaborateurs
]0 ;80]	32
]80 ;100]	48
]100 ;260]	20

10.5.2 Mode

Exemple. On constate que, dans un village de 500 habitants, il y a 490 personnes avec des cheveux noirs et 10 avec des cheveux blonds. Comment résumer la couleur des cheveux "moyenne" des habitants de ce village ? On répondra sûrement "noir", en pensant que l'écrasante majorité des habitants a les cheveux noirs. En réfléchissant ainsi, on donne comme réponse la valeur qui apparaît le plus fréquemment. Il s'agit du *mode*.

Cas discret

Définition. Le *mode*, noté M_o, est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif le plus grand ou à la fréquence la plus importante. Cette valeur centrale est simple à percevoir, mais elle ne tient pas compte de l'ensemble des valeurs du caractère étudié.

Exemple. Les nombres 3, 5, 7, 7, 7, 9, 9 ont pour mode $M_o = 7$. Remarquons que le mode peut ne pas être unique. Ainsi, l'ensemble 3, 5, 7, 7, 7, 9, 9, 9, qui a deux modes : 7 et 9, est dit *bimodal*.

Exemple. Reprenons notre exemple du nombre de personnes par ménage.

Modalités x_i	Effectifs n_i
1	5
2	9
3	15
4	10
5	6
6	3
7	0
8	2

le mode est donné par $M_o = 3$, car 3 est la modalité au plus grand effectif.

Exercice 10.20. Indiquer le mode pour les deux séries d'observations suivantes :

a) 7 , 8 , 9 , 3 , 3 , 7 , 6 , 7 , 8 , 7 , 3 , 9 , 6 , 7

b) 4 , 4 , 7 , 6 , 8 , 12 , 6 , 4 , 8 , 7 , 8 , 13 , 4 , 8 , 6 , 5

Cas continu

Pour des séries de données groupées par classes, nous nous contenterons de déterminer la *classe modale*, qui s'effectue comme suit :

1. On détermine les effectifs rectifiés.
2. On identifie la classe ayant le plus grand des effectifs rectifiés. Elle porte le nom de *classe modale* et peut ne pas être unique.

Exemple. Dans notre exemple des exploitatations agricoles, après rectification des effectifs, on obtient le tableau suivant :

Superficie en ha	Nombre d'exploitations
$]0;5]$	24
$]5;10]$	24
$]10;15]$	62
$]15;20]$	107
$]20;25]$	133
$]25;30]$	84
$]30;35]$	33
$]35;40]$	33

La classe modale est donc la cinquième classe. Ainsi $M_o \in]20;25]$.

Exercice 10.21. Déterminer la classe modale de la variable statistique continue suivante.

Classes	Effectifs
$[0;2[$	3
$[2;4[$	8
$[4;6[$	15
$[6;8[$	14
$[8;10[$	6
$[10;12[$	2

Exercice 10.22. Le tableau ci-dessous rend compte du diamètre de pièces en mm.

Classes	Effectifs
$]20;25]$	9
$]25;30]$	27
$]30;35]$	36
$]35;45]$	45
$]45;55]$	18
$]55;60]$	9
$]60;65]$	3
$]65;70]$	3

Indiquer la classe modale.

Exercice 10.23. Déterminer la classe modale de chacune des populations suivantes.

Ages	Effectifs
$]0;20]$	72
$]20;65]$	180
$]65;100]$	43

Salaire (en francs)	Nombre de collaborateurs
]0 ;80]	32
]80 ;100]	48
]100 ;260]	20

Exercice 10.24. Calculer les différentes classes modales de cette distribution.

Classes	Effectifs
$[18;20[$	107
$[20;22[$	110
$[22;24[$	91
$[24;28[$	220

10.5.3 Médiane

Exemple. En 2020, un Suisse apprend par la presse que l'OFS estime le salaire brut moyen à 7'825 francs. Il le compare avec son salaire qui se monte à 6'942 francs et peste contre la pingrerie de son employeur chez qui il court réclamer une augmentation. Mais le salaire moyen est-il un indicateur pertinent dans ce cas ? Sûrement pas. Il est basé sur un grand nombre de personnes gagnant peu et un nombre restreint de managers gagnant des salaires indécents se montant à plusieurs millions, entraînant ainsi une distorsion vers le haut du salaire moyen. Il faudrait plutôt que notre individu se pose la question de savoir s'il gagne plus ou moins que la plupart de ses compatriotes. Pour répondre à cette interrogation, on va considérer la *médiane*. Cette indice coupe la population en deux parties égales. La médiane des salaires bruts en Suisse étant de 6'665 francs en 2020 selon l'OFS, il est plutôt favorisé puisqu'il fait partie de la moitié de la population qui gagne le plus !

Cas discret

Définition. La *médiane*, notée M_e, est la valeur du caractère qui partage en deux l'effectif total. C'est la valeur du caractère qui correspond à une fréquence cumulée égale à 50%. Dans une population, il y a ainsi autant d'individus possédant une valeur du caractère inférieure au caractère médian que d'individus possédant une valeur du caractère supérieure à la médiane.

La *classe médiane* d'une variable continue est la première classe où la fréquence cumulée atteint ou dépasse 50%.

Exemple.

1. L'ensemble des nombres 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10 a pour médiane $M_e = 6$.
2. L'effectif de l'ensemble 5, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 18 étant pair, ce dernier a pour médiane $M_e = \dfrac{9+11}{2} = 10$.

Remarque. On constate que la médiane correspond à la valeur du caractère de l'individu occupant le rang

$$m = \frac{N+1}{2}.$$

— Si N est impair, il s'agit d'un individu réel occupant le rang entier m.

— Si N est pair, il s'agit d'un individu virtuel placé entre les rangs $N/2$ et $N/2+1$.

Exemple. Reprenons notre exemple du nombre de personnes par ménage. Pour déterminer la valeur de la médiane, il convient de calculer les effectifs cumulés croissants.

Modalités	Effectifs	Effectifs cumulés
1	5	5
2	9	14
3	15	29
4	10	39
5	6	45
6	3	48
8	2	50

La médiane est comprise entre les rangs 25 et 26. Donc, $M_e = 3$.

Exercice 10.25. Les valeurs ci-dessous indiquent le nombre de langues parlées par chaque individu sur la base d'un échantillon de 30 salariés d'une compagnie d'assurance.

3	5	2	4	3	4	5	4	3	4
2	1	2	1	3	4	1	2	5	4
1	1	1	1	1	2	4	4	2	2

Calculer la médiane de cette distribution.

Exercice 10.26. On a enregistré au guichet d'une poste (arrondi au kg) de 20 colis envoyés en une heure

3	3	2	3	1	2	1	2	4	4
4	1	1	1	3	1	4	2	4	1

a) Regrouper ces données au sein d'un tableau.

b) Déterminer le poids moyen.

c) Déterminer le mode.

d) Déterminer le poids médian.

Exercice 10.27. Calculer la moyenne, la médiane et le mode de la variable statistique suivante.

Modalités	Effectifs
10	2
11	3
12	7
13	9
14	14
15	8
16	3
17	1

Exercice 10.28. Une PME comprend sept employés ainsi que son patron. Le tableau ci–contre indique les salaires mensuels en francs de ces huit personnes.

Jean B.	12'750
Nicole C.	4'950
Alphonse G.	4'200
Jennifer Z.	8'720
Christian A.	4'800
Adrien A.	5'080
Kim D.	4'500
Natacha T.	4'750

a) Calculer la moyenne des salaires.

b) Calculer la médiane des salaires.

c) Un employé supplémentaire est engagé.

   (a) Quel est son salaire si la moyenne des 9 salaires est de 6'100 francs ? Quelle est alors la médiane ?

   (b) Quel est son salaire si la médiane est de 4'800 francs ?

Exercice 10.29. Donner une série statistique dont l'effectif total est 3, la médiane 8, la moyenne arithmétique 7 et dont l'une des valeurs est 4.

Exercice 10.30. Lors d'un loto, on a demandé à 9 grand-mamans le nombre de petits enfants qu'elles avaient. Voici les réponses obtenues : 10, 5, 6, 8, 9, 10, 6 et 12. Malheureusement, la réponse de la dernière s'est perdue.

a) Qu'a-t-elle répondu si la moyenne du nombre de petits-enfants est de 8 ?

b) Qu'a-t-elle pu répondre si la médiane du nombre de petits-enfants est de 8 ?

Cas continu

Dans le cadre de ce cours, nous nous contenterons de déterminer la classe dans laquelle se trouve la médiane.

Exemple. Reprenons notre exemple des exploitations agricoles.

Classes	Effectifs	Effectifs cumulés croissants
$]0;10]$	48	48
$]10;15]$	62	110
$]15;20]$	107	217
$]20;25]$	133	350
$]25;30]$	84	434
$]30;40]$	66	500

La superficie médiane est comprise entre celles des $250^{\text{ème}}$ et $251^{\text{ème}}$ individus. Ces deux exploitations appartiennent à la classe $]20;25]$.

Ainsi, $M_e \in]20;25]$.

Exercice 10.31. Dans quelle classe se trouve la médiane de la variable statistique continue suivante ?

Classes	Effectifs
$[0;2[$	3
$[2;4[$	8
$[4;6[$	15
$[6;8[$	14
$[8;10[$	6
$[10;12[$	2

Exercice 10.32. Une entreprise organise un grand tournoi de quilles. Voici le tableau de distribution des scores :

Classes	Effectifs
$[120;140[$	1
$[140;160[$	9
$[160;180[$	22
$[180;200[$	51
$[200;220[$	12
$[220;240[$	5
Total	100

Calculer la moyenne, puis déterminer la classe à laquelle appartient la médiane.

10.5.4 Comparaison entre les valeurs centrales

Nous pouvons maintenant faire quelques comparaisons sommaires entre les trois mesures de tendance centrale.

La moyenne arithmétique

1. Elle est sans doute la mesure de tendance centrale la plus familière.
2. Elle demande plus de calculs, mais s'exprime algébriquement d'une manière simple.
3. Elle tient compte de toutes les données et est donc influencée par les données extrêmes de la distribution. Dans le cas où une distribution est fortement dissymétrique, ceci devient un inconvénient qui justifie l'usage de la médiane au lieu de la moyenne.
4. Elle est peu influencée par le choix des classes, mais ne peut cependant pas être calculée s'il y a une classe ouverte (par exemple une classe du type "80 ans et plus").
5. Elle se prête facilement aux manipulations algébriques à cause de son expression mathématique simple.
6. Sa valeur est stable, c'est-à-dire qu'elle varie peu d'un échantillon à l'autre, du fait qu'elle tient compte de toutes les données. C'est sa plus grande qualité pour faire de l'inférence statistique.
7. Il s'agit de la mesure de tendance centrale la plus utilisée.

Le mode

1. Il peut y en avoir plusieurs dans une distribution. Le cas échéant, la présence de plusieurs modes peut être une indication que la population étudiée se compose de sous-groupes distincts. Selon l'étude désirée, cela pourrait inviter à scinder la population.
2. Il est facile à déterminer.
3. Il ne tient pas compte de toutes les données. Par contre, il n'est pas influencé par les données extrêmes de la distribution.
4. Il peut être grandement influencé par le choix des classes.
5. Il n'est vraiment significatif que si l'effectif correspondant est nettement supérieur aux autres.
6. Sa valeur n'est pas stable, c'est-à-dire qu'elle varie beaucoup d'un échantillon à l'autre choisi dans la même population.
7. Il s'agit de la mesure de tendance centrale la moins utilisée.

La médiane

1. Elle provient d'une conception simple de la notion de centre.
2. Elle n'est pas très difficile à calculer, mais elle est plus difficile à exprimer algébriquement que la moyenne arithmétique.
3. Elle ne tient pas compte de toutes les données, mais uniquement de la position des données. Elle n'est donc pas influencée par les données extrêmes de la distribution.
4. Elle peut être influencée par le choix des classes.
5. Elle est surtout utilisée lorsque la distribution des effectifs est fortement dissymétrique ou lorsqu'elle contient des classes ouvertes.
6. Sa valeur est moins stable que celle de la moyenne. Ceci s'explique par le fait que cette valeur ne dépend que de quelques données parmi celles choisies dans un échantillon.
7. Elle est plus utilisée que le mode, mais moins que la moyenne arithmétique.

Exercice 10.33. Un contrôle radar a permis de mesurer la vitesse de 10 automobilistes sur une route limitée à 60 km/h.

70 60 80 60 60 60 90 200 70 60

Quelle mesure de tendance centrale décrit le mieux cette situation ?

Exercice 10.34. Soient les échantillons ci-dessous.

Echantillon A	2	9	3	8	3	9	3	2	10	3
Echantillon B	9	2	2	8	3	10	3	9	3	8

a) Quelle est la moyenne arithmétique et la médiane des deux échantillons ?

b) Laquelle de ces deux mesures est la mieux adaptée pour décrire la situation ?

Exercice 10.35. Dans notre classe, nous sommes 10 étudiants. Au cours de 3 examens différents je n'ai obtenu que 8 points sur 20, ce qui est assez lamentable. À l'aide des indicateurs de tendance centrale, comment vais-je arriver à présenter ces résultats à mon employeur pour que mes résultats ne paraissent pas si mauvais que ça ?

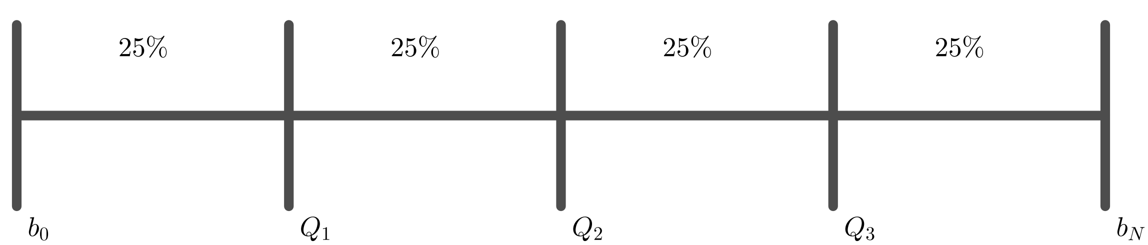
Examen	Moi	Marc	Lili	Jojo	Bob	Fred	Karl	Léa	Luc	Jo
1$^{\text{er}}$	8	2	2	2	9	9	9	9	10	19
2$^{\text{ème}}$	8	2	3	4	5	7	9	9	18	19
3$^{\text{ème}}$	8	2	7	7	7	10	11	12	18	19

10.6 Quartiles et boîte à moustaches

10.6.1 Quartiles

Cas discret

Définition. On appelle *quartiles* les valeurs du caractère qui partagent l'effectif total de la série en 4 groupes d'effectifs égaux. On les note Q_1, Q_2 et Q_3. Un quart de l'effectif total possède donc un caractère inférieur à Q_1. Le deuxième quartile $Q_2 = M_e$ n'est autre que la médiane. Enfin, les trois quarts de la population se trouvent en dessous de la valeur définie par le troisième quartile Q_3.



Remarque. Il faut être attentif au fait qu'il existe de nombreuses méthodes différentes pour déterminer les quartiles, qui ne conduisent pas aux mêmes résultats. Dans ce cours, nous calculerons les quartiles selon la méthode établie par John Tukey en 1983.

On classe les N données dans l'ordre croissant et on les coupe en deux ensembles sur lesquels on calcule la médiane.

— Si N est impair, il y a une valeur centrale (la médiane), et on coupe les données en deux sous-ensembles en mettant la médiane dans chacun des deux ensembles. Le quartile Q_1 est alors la médiane du premier sous-ensemble ; le quartile Q_3 est la médiane du deuxième sous-ensemble.

— Si N est pair, il y a deux valeurs centrales (la médiane est la moyenne arithmétique de ces deux valeurs), et on coupe en deux sous-ensembles en mettant dans chaque sous-ensemble la valeur centrale correspondante. Le quartile Q_1 est alors la médiane du premier sous-ensemble ; le quartile Q_3 est la médiane du deuxième sous-ensemble.

Exemple.

N	Mesures	Sous-ensembles	Q_1	Q_3	Rang Q_1	Rang Q_3
4	1 3 4 5	$\{1;3\}$ et $\{4;5\}$	2	4,5	1,5	3,5
5	1 3 5 5 7	$\{1;3;5\}$ et $\{5;5;7\}$	3	5	2	4
6	1 3 4 6 7 9	$\{1;3;4\}$ et $\{6;7;9\}$	3	7	2	5
7	1 3 5 6 7 9 15	$\{1;3;5;6\}$ et $\{6;7;9;15\}$	4	8	2,5	5,5

Théorème.

— *Si N est pair, le rang du quartile Q_1 est donné par $\dfrac{N+2}{4}$ et celui de Q_3 par $\dfrac{3N+2}{4}$.*

— *Si N est impair, le rang du quartile Q_1 est donné par $\dfrac{N+3}{4}$ et celui de Q_3 par $\dfrac{3N+1}{4}$.*

Exemple. Reprenons notre exemple du nombre de personnes par ménage.

Modalités	Effectifs	Effectifs cumulés	Fréquences (en %)	Fréquences cumulées
1	5	5	10	10
2	9	14	18	28
3	15	29	30	58
4	10	39	20	78
5	6	45	12	90
6	3	48	6	96
8	2	50	4	100

On connaît déjà $Q_2 = M_e = 3$. Le quartile Q_1 est la valeur de l'observation de rang $\dfrac{50+2}{4} = 13$. Donc $Q_1 = 2$. Quant au quartile Q_3, il est égal à la valeur de l'observation de rang $\dfrac{3 \cdot 50+2}{4} = 38$. Donc $Q_3 = 4$.

Remarque. La plupart du temps, lorsqu'il s'agit par exemple de définir les quartiles, il n'est pas possible de trouver des rangs qui divisent la population en quatre classes d'effectifs égaux. Dans ce cas, on convertit les effectifs en fréquences et on définit les quartiles Q_1, M_e et Q_3 par les valeurs du caractère associées aux fréquences cumulées 25%, 50% et 75%.

Remarque. Il est possible de généraliser la notion de quartile à celle de *quantile d'ordre n*. Les autres quantiles les plus souvent utilisés sont :

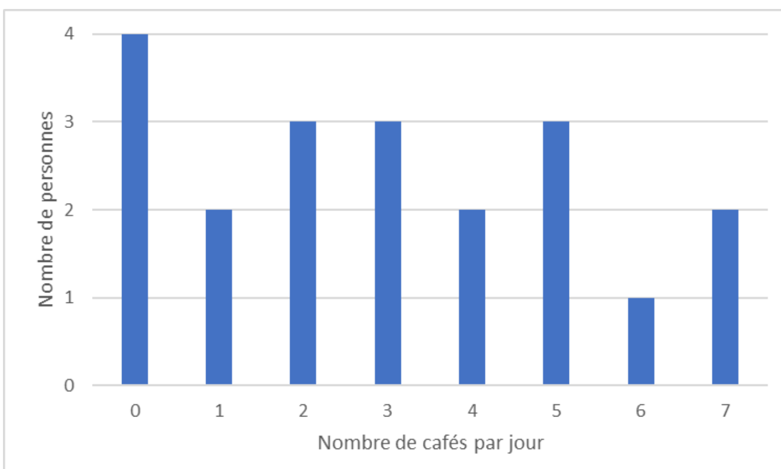
— *Les déciles* D_1, D_2, ..., D_9 partagent l'effectif total en dix groupes égaux. Un dixième de la population a un caractère inférieur à D_1, et neuf dixièmes ont un caractère supérieur à D_1, . . ., et ainsi de suite. Le décile D_5 est égal à la médiane ;

— *Les centiles* C_1, C_2,. . . , C_{99} partagent la population en 100 groupes d'effectifs égaux.

Exercice 10.36. Calculer les trois quartiles de la distribution ci-dessous.

1	1	4	8	8	10	10	10	15	20
1	1	4	8	8	10	10	10	15	20
1	4	8	8	8	10	10	10	15	20
1	4	8	8	8	10	10	10	15	20
1	4	8	8	8	10	10	10	20	20

Exercice 10.37. Ci–dessous figure un histogramme représentant la consommation quotidienne de cafés de toutes les personnes travaillant dans une PME.



a) Combien d'employés y a–t–il dans cette PME ?

b) Combien de cafés chaque employé boit–il en moyenne ?

c) Donner la médiane, le premier et le troisième quartiles.

d) Déterminer le mode.

Exercice 10.38. Ajouter un nombre à la liste de nombres

$$-12; -10; -6; -3; 0; 3; 5; 8; 9; 11; 13$$

de manière à avoir la médiane à 4 et le troisième quartile à 9.

Exercice 10.39. A un concours de saut en longueur, on a mesuré les performances ci-dessous exprimées en mètres :

3,45	3,60	3,70	2,95	3,00	4,10	3,10	3,90
3,10	3,20	4,50	3,15	3,20	3,05	3,60	3,55
4,00	3,35	3,55	2,70	2,95	3,05	3,85	3,40

a) Donner la médiane, le maximum, le minimum et les quartiles.

b) Les énoncés suivants sont-ils corrects ? Justifier.

(a) Environ 75% ont fait un saut de plus de $3,60$ m.

(b) Environ 50% ont sauté au plus $3,375$ m.

(c) Environ 50% ont sauté au moins $3,375$ m.

Cas continu

Dans le cadre de ce cours, nous nous contenterons de déterminer les classes dans lesquelles se trouvent les quartiles Q_1, Q_2 et Q_3.

Exemple. Calculons les quartiles pour notre exemple des exploitations agricoles.

Classes	Effectifs	Effectifs cumulés croissants
$]0;10]$	48	48
$]10;15]$	62	110
$]15;20]$	107	217
$]20;25]$	133	350
$]25;30]$	84	434
$]30;40]$	66	500

On connait déjà la mediane $Q_2 = M_e \in]20;25]$.

Le premier quartile Q_1 est la superficie de l'exploitation de rang $\dfrac{500+2}{4} = 125,5$. Comme elle se trouve dans la troisieme classe, on a $Q_1 \in]15;20]$.

Le troisième quartile Q_3 est défini par la la superficie de l'exploitation de rang $\dfrac{3 \cdot 500 + 2}{4} = 375,5$. Celle-ci se trouvant dans la cinquième classe, on a donc $Q_3 \in]25;30]$.

Exercice 10.40. Le tableau ci-dessous recense la taille en centimètres des élèves d'une école.

Taille des élèves	Nombre d'élèves
$[120;130[$	6
$[130;140[$	21
$[140;150[$	45
$[150;160[$	55
$[160;170[$	26
$[170;180[$	7

Déterminer à quelle classe appartiennent les quartiles Q_1 et Q_3.

Exercice 10.41. Un échantillon de 200 sportifs est à la base du tableau ci-dessous.

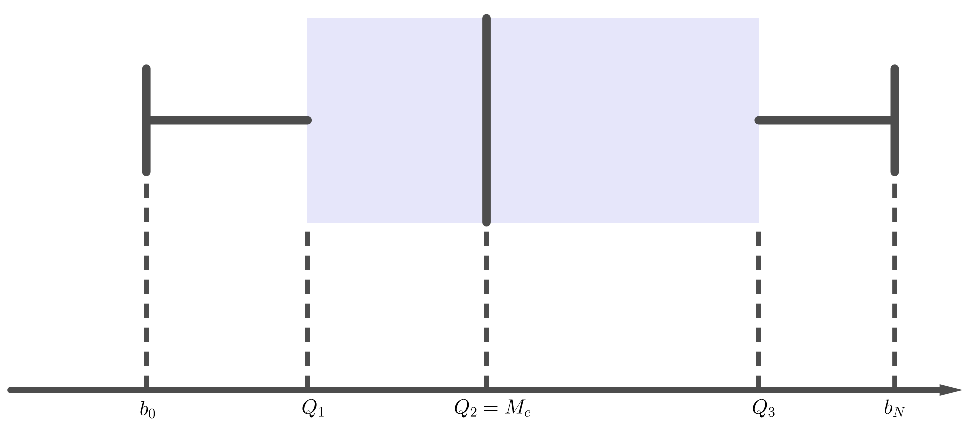
Taille (en cm)	Effectifs	Fréquences cumulées
$[150;160[$		$0,2$
$[160;170[$	60	
$[170;180[$		$0,6$
$[180;190[$	30	
$[190;200[$		

a) Compléter le tableau ci-dessus.

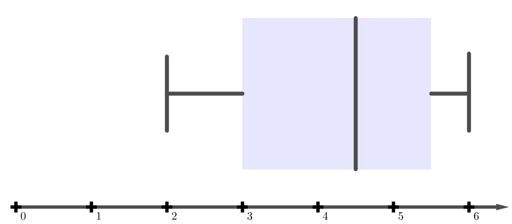
b) Déterminer la classe dans laquelle se trouve le mode, la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3.

10.6.2 Boîte à moustaches

Définition. Le *diagramme de Tukey*, plus communément appelé *boîte à moustaches* ou *box plot*, est une représentation codifiée des quantiles Q_1, M_e, Q_3 et des valeurs extrêmes b_0 et b_N de la distribution qui donne une information graphique concernant la symétrie de la distribution.



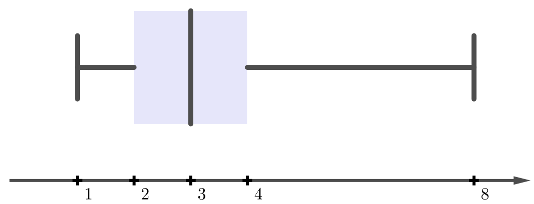
Exemple. Les notes d'une classe ont été représentées à l'aide de la boîte à moustache ci-dessous



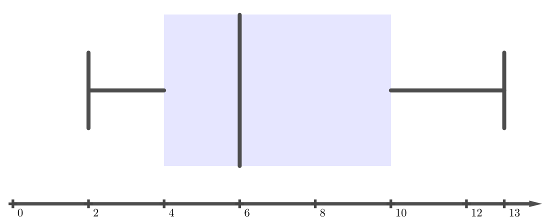
Cette boîte à moustaches fournit les informations suivantes :

- La moins bonne note est 2 et la meilleure 6.
- 25% des élèves ont fait une note égale ou inférieure à 3.
- La moitié des élèves ont fait $4,5$ au moins (et au plus !).
- 75% des élèves ont fait une note inférieure ou égale à $5,5$.
- 50% se tiennent dans un écart de $2,5$.

Exemple. Dans notre exemple du nombre de personnes par ménage, la boîte à moustaches est donnée par

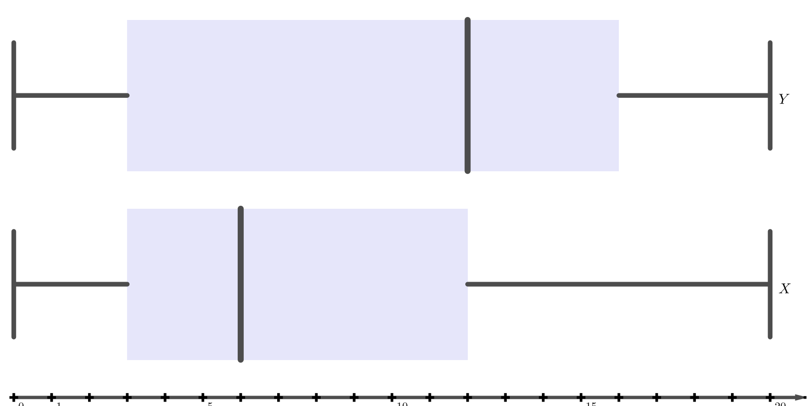


Exercice 10.42. Dans une entreprise, on interroge un certain nombre d'employés pour savoir combien de mails ils ont envoyé durant une journée. Les résultats sont synthétisés par la boîte à moustaches ci-dessous.



a) Déterminer la valeur des trois quartiles.
b) Entre combien et combien de mails les employés ont-ils envoyé ?
c) La moitié des employés interrogés ont envoyé plus de combien de mails ?
d) Quel pourcentage d'employés interrogés a envoyé entre 4 et 10 mails ?

Exercice 10.43. Dans deux villes X et Y, on a sélectionné un échantillon de 1000 personnes à qui on a demandé combien de cigarettes ils fumaient quotidiennement. Les résultats sont présentés au sein des boîtes à moustache ci-dessous.



a) Quelle est la valeur des quartiles Q_1, Q_2 et Q_3 pour les deux villes ?

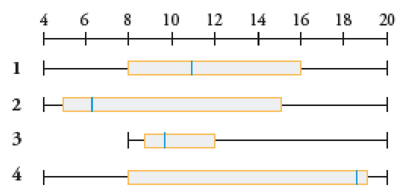
b) Quelle est la ville la plus consommatrice de cigarettes ?

c) Peut-on affirmer que seul un quart de la population de la ville X fume plus de 3 cigarettes par jour ?

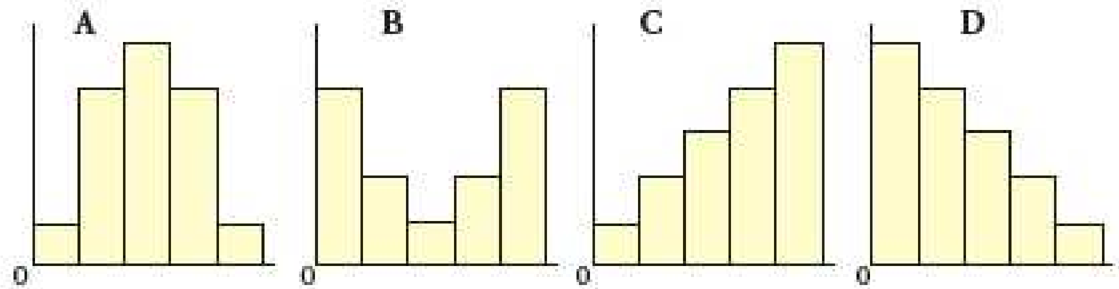
d) Peut-on affirmer que la moitié des habitants de la ville Y fume moins de 11 cigarettes par jour ?

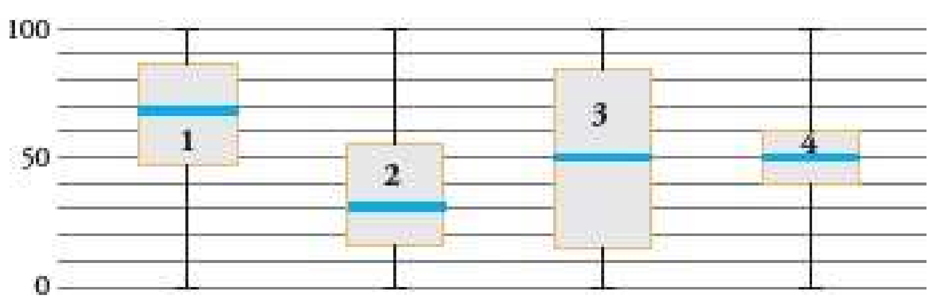
Exercice 10.44. Associer les quatre distributions suivantes au boîtes à moustaches ci-dessous.

X	4	5	8	9	18	19	19	19	19	20
Y	8	9	9	9	9	10	11	12	18	20
Z	4	4	5	5	6	7	10	15	18	20
U	4	6	8	8	10	12	16	16	16	20



Exercice 10.45. Associer chacun des quatre histogrammes ci-dessous aux boîtes à moustaches correspondantes.





Exercice 10.46. A une station météo, la température extérieure a été mesurée et enregistrée, chaque jour à midi, durant tout le mois de février. Il en résulte le tableau des températures exprimées en °C.

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Température	7	-2	0	1	-5	-9	-6	-5	-2	4	7	11	12	10

Jour	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Température	10	10	7	4	3	-2	-3	-6	-1	4	7	11	12	10

Représenter la boîte à moustaches correspondant à ces mesures.

Exercice 10.47. 3 classes de 34 élèves ont obtenu les points suivants au dernier test évalué sur 20 points.

Classe 1 :

5	10	15	12	13	14	12
5	8	9	6	12	14	18
16	15	19	14	12	10	11
12	16	12	15	4	12	8
9	14	5	3	18	17	

Classe 2 :

8	8	9	10	8	9	10
11	8	9	12	8	12	11
10	12	11	10	12	10	11
12	9	8	7	13	10	11
12	11	10	8	10	11	

Classe 3 :

2	18	5	15	3	17	6
14	0	20	1	19	8	12
9	11	10	10	12	8	11
9	16	4	15	5	12	8
9	11	9	11	19	1	

a) Proposer le tableau d'effectif pour les 3 classes.

b) Réaliser le diagramme en boîte à moustaches.

c) Quelles sont les moyennes pour chaque classe ?

d) À partir des informations obtenues, indiquer la ou les classes répondant le mieux aux critères suivants :

Critère A : "Les élèves ont des résultats proches. La classe est homogène".
Critère B : "Les élèves ont des résultats très différents. La classe est hétérogène".
Critère C : "Cette classe possède les meilleurs résultats".
Critère D : "50% des élèves au moins ont une note comprise entre 8 et 12".
Critère E : "25% des élèves au plus ont une note comprise entre 8 et 12".

10.7 Mesures de dispersion

Si les valeurs centrales sont généralement nécessaires pour caractériser une série, elles ne sont toutefois pas suffisantes. Deux populations différentes peuvent avoir les mêmes valeurs centrales et différer notablement quant à la dispersion des individus autour de ces valeurs centrales.

Les deux ensembles $A = \{6; 8; 10; 12; 14\}$ et $B = \{2; 6; 10; 14; 18\}$ ont, par exemple, la même moyenne arithmétique et la même médiane, à savoir 10. Pourtant, les individus qui les composent ne sont pas répartis de la même manière autour de cette valeur centrale. L'ensemble B est moins régulier ou plus dispersé que l'ensemble A. On dit que A et B n'ont pas la même dispersion.

Pour comparer deux populations, on considère, outre leurs valeurs centrales, des mesures de leur dispersion. Les mesures classiques de dispersion sont les suivantes : *l'étendue, la variance et l'écart-type.*

10.7.1 Etendue de la série

C'est la valeur de dispersion la plus simple.

Définition. Aussi appelée *intervalle de variation*, *amplitude de la série* ou *intervalle maximal*, *l'étendue* E est la différence des valeurs extrêmes de la série.

Exemple. Dans notre exemple des exploitations agricoles, l'étendue vaut $E = 40 - 0 = 40$ ha.

Remarque. Simple à calculer, cette mesure de dispersion n'est pas très fiable puisqu'elle ne tient compte que de deux observations marginales et néglige toutes les autres.

Exercice 10.48. La série d'observations suivantes porte sur le relevé des températures durant le mois de février dans une ville.

-10	-9	-5	-12	-8	-5	-2
5	2	3	5	6	2	0
1	-1	-2	0	-6	-10	-11
-9	-6	-4	-3	0	0	1

Calculer l'étendue de la série.

10.7.2 Ecart interquartile

Définition. *L'écart interquartile* I_Q est défini par la différence des quartiles extrêmes. Autrement dit, on a

$$\boxed{I_Q = Q_3 - Q_1.}$$

Remarque. Cette mesure est plus fiable que l'étendue puisqu'elle exclut les 50% des valeurs marginales inférieures et supérieures.

Définition. *L'écart semi-interquartile* Q est défini par la moyenne arithmétique des écarts entre les quartiles et la médiane. Autrement dit, on a

$$\boxed{Q = \frac{(Q_3 - M_e) + (M_e - Q_1)}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{I_Q}{2}.}$$

Exemple. Dans notre exemple du nombre de personnes par ménage, on a

$$I_Q = 4 - 2 = 2$$

et

$$Q = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Remarque. Il est également possible de définir *l'écart interdécile* I_D par

$$\boxed{I_D = D_9 - D_1.}$$

Cela définit un intervalle comprenant les 80% de la population.

Exercice 10.49. Le tableau ci-dessous donne la capacité des stades des équipes de la saison 2019-2020 de Premier League de football.

Club	Stade	Club	Stade
AFC Bournemouth	11'464	Everton FC	39'571
Watford FC	20'877	Chelsea FC	41'798
Burnley FC	21'401	Aston Villa	42'788
Crystal Palace	26'255	Newcastle United	52'405
Norwich City	27'244	Liverpool FC	54'074
Brighton & Hove Albion	30'750	Manchester City	55'097
Wolverhampton Wanderers	31'700	West Ham United	60'000
Southampton FC	32'505	Arsenal FC	60'704
Sheffield United	32'702	Tottenham Hotspur	62'062
Leicester City	36'262	Manchester United	75'635

Donner la valeur des quartiles Q_1, Q_2 et Q_3, puis en déduire l'écart interquartile et l'écart semi-interquartile.

Exercice 10.50. Une compagnie a révélé les chiffres des absences de ses employés pour le mois dernier.

Nombre de jours d'absence	Nombre d'employés
0	36
1	42
2	20
3	11
4	3
5	2
12	1

a) Calculer l'étendue et l'écart semi-interquartile.

b) Calculer la proportion des employés ayant manqué plus de deux jours de travail.

10.7.3 Variance écart-type

Cas discret

Exemple. Deux classes de 20 élèves ont effectué un travail écrit de mathématiques, dont les résultats de ces travaux écrits sont présentés dans les tableaux ci-dessous.

Note x_i	Nombre d'élèves n_i
1	0
$1,5$	0
2	0
$2,5$	0
3	0
$3,5$	3
4	7
$4,5$	8
5	1
$5,5$	1
6	0

Table 10.1 – Notes de la première classe.

Note y_i	Nombre d'élèves n_i
1	0
$1,5$	1
2	0
$2,5$	2
3	4
$3,5$	0
4	0
$4,5$	3
5	6
$5,5$	2
6	2

Table 10.2 – Notes de la deuxième classe.

Au vu des résultats ci-dessus, il est naturel de se poser la question suivante.

Question : Laquelle de ces deux classes a été la plus performante lors de ce travail écrit ?

Un moyen de répondre à cette question consiste à calculer la moyenne arithmétique de chacune des deux classes :

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{3,5\cdot 3+4\cdot 7+4,5\cdot 8+5\cdot 1+5,5\cdot 1}{20} = 4,25 \\
\overline{y} &= \frac{1,5\cdot 1+2,5\cdot 2+3\cdot 4+4,5\cdot 3+5\cdot 6+5,5\cdot 2+6\cdot 2}{20} = 4,25.
\end{aligned}$$

Ces deux moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont égales alors que les résultats sont très différents !

La moyenne arithmétique ne donne pas d'informations sur la *dispersion des résultats* autour de la moyenne. Pour l'estimer, on essaie de quantifier la manière dont les notes sont réparties autour de la moyenne.

On obtient :

$x_i - \overline{x}$	n_i
$-3,25$	0
$-2,75$	0
$-2,25$	0
$-1,75$	0
$-1,25$	0
$-0,75$	3
$-0,25$	7
$0,25$	8
$0,75$	1
$1,25$	1
$1,75$	0

$y_i - \overline{y}$	n_i
$-3,25$	0
$-2,75$	1
$-2,25$	0
$-1,75$	2
$-1,25$	4
$-0,75$	0
$-0,25$	0
$0,25$	3
$0,75$	6
$1,25$	2
$1,75$	2

Le calcul de la moyenne de ces écarts est nul, car les écarts négatifs sont exactement compensés par les écarts positifs, ce qui n'amène aucun renseignement sur la dispersion. On choisit alors de calculer le carré des écarts à la moyenne.

On obtient alors les distributions suivantes :

$(x_i - \overline{x})^2$	n_i
10,5625	0
7,5625	0
5,0625	0
3,0625	0
1,5625	0
0,5625	3
0,0625	7
0,0625	8
0,5625	1
1,5625	1
3,0625	0

$(y_i - \overline{y})^2$	n_i
10,5625	0
7,5625	1
5,0625	0
3,0625	2
1,5625	4
0,5625	0
0,0625	0
0,0625	3
0,5625	6
1,5625	2
3,0625	2

Calculons alors la moyenne arithmétique de $(\overline{x} - x_i)^2$ et $(\overline{y} - y_i)^2$:

$$\begin{aligned}
\overline{(x_i - \overline{x})^2} &= \frac{0,5625 \cdot 3 + 0,0625 \cdot 7 + 0,0625 \cdot 8 + 0,5625 \cdot 1 + 1,5625 \cdot 1}{20} \\
&= 0{,}2375 \\
\overline{(y_i - \overline{y})^2} &= \frac{7,5625 \cdot 1 + 3,0625 \cdot 2 + 1,5625 \cdot 4 + 0,0625 \cdot 3 + 0,5625 \cdot 6 + 1,5625 \cdot 2 + 3,0625 \cdot 2}{20} \\
&= 1{,}6375.
\end{aligned}$$

Ces nombres ainsi trouvés sont une *mesure de la dispersion* des notes autour de la moyenne arithmétique. On voit ainsi que les notes de la première classe sont plus proches de la moyenne que celles de la deuxième classe.

Définition. On appelle *variance* V d'une série statistique la moyenne des carrés des écarts entre toutes les données et leur moyenne arithmétique. On a ainsi

$$\boxed{V = \overline{(x_i - \overline{x})^2} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{N}.}$$

Définition. On appelle *écart-type* σ, la racine carrée de la variance. Autrement dit, on a

$$\boxed{\sigma = \sqrt{V}.}$$

Remarque. L'écart-type est une mesure de la dispersion plus significative que la variance. En effet, si les données x_i représentent une distance exprimée en mètres, V est en m^2 tandis que l'écart-type est exprimé en mètres.

Exemple. Soient les nombres -4, 3, 9, 11 et 17.

La moyenne arithmétique de ces nombres vaut

$$\overline{x} = \frac{-4 + 3 + 9 + 11 + 17}{5} = 7,2.$$

Du tableau suivant

	x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
	-4	$-11,2$	$125,44$
	3	$-4,2$	$17,64$
	9	$1,8$	$3,24$
	11	$3,8$	$14,44$
	17	$9,8$	$96,04$
Total	36	0	$256,8$

on en tire la variance

$$V = \frac{256,8}{5} = 51,36$$

et l'écart-type

$$\sigma = \sqrt{51,36} \cong 7,167.$$

Exemple. Calculons la variance et l'écart-type de notre exemple du nombre de personnes par ménage. A cet effet, il convient de dresser le tableau ci-dessous. On rappelle que la moyenne arithmétique valait 3,44.

Modalités x_i	Effectifs n_i	Ecarts $x_i - \overline{x}$	Carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$	Produits $n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$
1	5	$-2,44$	$5,9536$	$29,768$
2	9	$-1,44$	$2,0736$	$18,6624$
3	15	$-0,44$	$0,1936$	$2,904$
4	10	$0,56$	$0,3136$	$3,136$
5	6	$1,56$	$2,4336$	$14,6016$
6	3	$2,56$	$6,5536$	$19,6608$
8	2	$4,56$	$20,7936$	$41,5872$
Total	50			130,32

On en tire la variance
$$V = \frac{130,32}{50} = 2,6064$$
et l'écart-type
$$\sigma = \sqrt{V} \cong 1,614.$$

Exercice 10.51. Calculer la variance et l'écart-type des nombres suivants : -9, -4, 1, 7, 10, 21.

Exercice 10.52. Un casino a demandé à son croupier de noter durant 60 jours consécutifs le nombre de fois par jour où le 0 sort au jeu de la roulette. Il a obtenu les données suivantes.

Nombre de 0 par jour	Nombre de jours
7	1
8	3
9	6
10	9
11	14
12	11
13	7
14	6
15	2
16	1

a) Calculer les mesures de tendance centrale.

b) Calculer la variance et l'écart-type.

Cas continu

Comme pour le calcul de la moyenne arithmétique, on affecte à tous les individus d'une classe $]b_{i-1}; b_i]$ la valeur centrale $c = \dfrac{b_{i-1} + b_i}{2}$.

Exemple. Dans notre exemple des exploitations agricoles, cet écart se calcule à l'aide du tableau suivant. La moyenne arithmétique valait 21.

Classes x_i	Centres c_i	Effectifs n_i	Carrés des écarts $(c_i - \overline{x})^2$	Produits $n_i \cdot (c_i - \overline{x})^2$
$]0; 10]$	5	48	256	12288
$]10; 15]$	12,5	62	72,25	4479,5
$]15; 20]$	17,5	107	12,25	1310,75
$]20; 25]$	22,5	133	2,25	299,25
$]25; 30]$	27,5	84	42,25	3549
$]30; 40]$	35	66	196	12936
Total		500	196	34862,5

La variance est donc égale à $V = \dfrac{34862,5}{500} = 69,725 \text{ ha}^2$ et l'écart-type est donné par $\sigma = \sqrt{69,725 \text{ ha}^2} \cong 8,35 \text{ ha}$.

Exercice 10.53. Déterminer la variance et l'écart-type de chacune des populations suivantes.

Ages	Effectifs
$]0;20]$	72
$]20;65]$	180
$]65;100]$	43

Salaire (en francs)	Nombre de collaborateurs
]0 ;80]	32
]80 ;100]	48
]100 ;260]	20

Autre méthode de calcul

Le calcul de la variance (et donc de l'écart-type) n'est pas toujours commode. En particulier lorsque la moyenne est un nombre dont on ne donne qu'une approximation avec un développement décimal limité. Les calculs peuvent toutefois être simplifiés de la manière suivante.

Théorème. *La variance V peut être obtenue en calculant la différence entre la moyenne $\overline{x^2}$ des carrés des données x_i et le carré de leur moyenne $\overline{x}^2$. Ainsi, on a*

$$\boxed{V = \overline{x^2} - \overline{x}^2.}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
V &= \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_N-\overline{x})^2}{N}\\
&= \frac{(x_1^2-2x_1\overline{x}+\overline{x}^2)+(x_2^2-2x_2\overline{x}+\overline{x}^2)+\ldots+(x_N^2-2x_N\overline{x}+\overline{x}^2)}{N}\\
&= \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2}{N}-\frac{2\overline{x}(x_1+x_2+\ldots+x_N)}{N}+\frac{\overline{x}^2+\overline{x}^2+\ldots+\overline{x}^2}{N}\\
&= \overline{x^2}-2\overline{x}\cdot\overline{x}+\overline{x}^2\\
&= \overline{x^2}-2\overline{x}^2+\overline{x}^2\\
&= \overline{x^2}-\overline{x}^2.
\end{aligned}$$

□

Remarque. Cette seconde formulation sera préférée à la première chaque fois que les termes $x_i - \overline{x}$ sont plus compliqués que les termes x_i. Ce cas se présente fréquemment lorsque la moyenne n'est pas un nombre entier.

Exemple. Reprenons l'exemple des nombres -4, 3, 9, 11 et 17 de moyenne arithmétique $7,2$.

Du tableau suivant

	x_i	x_i^2
	-4	16
	3	9
	9	81
	11	121
	17	289
Total	36	516

on en tire la variance $V = \dfrac{516}{5} - 7,2^2 = 51,36$ et l'écart-type $\sigma = \sqrt{51,36} \cong 7,167$. On retrouve bien les résultats obtenus plus haut.

Exemple. Reprenons l'exemple des exploitations agricoles.

Classes x_i	Centres c_i	Effectifs n_i	Carrés des centres c_i^2	Produits $n_i \cdot c_i^2$
$]0;10]$	5	48	25	1200
$]10;15]$	$12,5$	62	$156,25$	$9687,5$
$]15;20]$	$17,5$	107	$306,25$	$32768,75$
$]20;25]$	$22,5$	133	$506,25$	$67331,25$
$]25;30]$	$27,5$	84	$756,25$	63525
$]30;40]$	35	66	1225	80850
Total		500		$255362,5$

On en déduit que $\overline{x^2} = \dfrac{255362,5}{500} = 510,725$. Comme $\overline{x} = 21$, $\overline{x}^2 = 441$, il suit que

$$V = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 510,725 - 441 = 69,725 \text{ ha}^2$$

et l'écart-type est donc donné par $\sigma = \sqrt{69,725 \text{ ha}^2} \cong 8,35$ ha.

Exercice 10.54. Appliquer cette méthode simplificatrice aux exercices 10.51 et 10.53.

Exercice 10.55. On donne la série suivante :

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 5 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 2 \quad 2 \quad 4$$

Calculer x_{min}, x_{max}, Q_1, M_e, Q_3, $\overline{x}$, $\overline{x^2}$, V et σ.

Exercice 10.56. Des mesures de vitesse d'automobiles ont donné les resultats suivants.

Vitesse	Nombre
$]30;35]$	15
$]35;40]$	39
$]40;45]$	65
$]45;50]$	87
$]50;55]$	70
$]55;60]$	22
$]60;65]$	12

Calculer la moyenne arithmétique et l'écart-type.

Exercice 10.57. Une étude des salaires annuels des employés d'une grande compagnie a donné les résultats suivants.

Classes	Effectifs
$[20'000;22'000[$	80
$[22'000;24'000[$	130
$[24'000;26'000[$	340
$[26'000;28'000[$	210
$[28'000;30'000[$	120
$[30'000;32'000[$	40

a) Calculer la moyenne arithmétique.

b) Calculer la variance et l'écart-type.

10.7.4 Coefficient de variation

Pour caractériser une distribution, on utilise généralement une mesure de tendance centrale et une mesure de dispersion. Par exemple, on peut donner sa médiane et son intervalle semi-interquartille. Cependant, dans la grande majorité des cas, on décrit une distribution par sa moyenne et son écart-type. La moyenne indique autour de quelle valeur sont situées les données, alors que l'écart-type donne une idée de la dispersion. Cette idée de dispersion doit cependant être située dans son contexte. Si l'écart-type d'une distribution est égal à 10, peut-on dire que cette distribution est très dispersée ? Bien sûr, cela dépend de l'ordre de grandeur des données. En effet, si les données traitées sont de l'ordre de 2000 par exemple, cet écart-type est vraiment petit et les données sont sûrement très concentrées. Par contre, si les données sont de l'ordre de 12, par exemple, l'écart-type est grand et les données sont relativement dispersées. Il est donc utile de mesurer la *dispersion relative*.

Définition. Le *coefficient de variation* C d'une variable statistique est le rapport entre l'écart-type et la moyenne exprimé sous la forme d'un pourcentage :

$$\boxed{C = \frac{\sigma}{\overline{x}}}$$

Remarque. Si l'on souhaite porter un jugement sur la dispersion d'une série, la qualification suivante est généralement admise :

Coefficient de variation	Dispersion
0 à 10%	Faible
10 à 20%	Moyenne
Plus de 20%	Elevée

Exemple. Dans notre exemple des exploitations agricoles, ce coefficient vaut

$$C = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cong \frac{8,35}{21} \cong 0,398 = 39,8\%.$$

Ainsi, la dispersion des données est élevée.

Exercice 10.58. Au cours du mois de février, sur le marché boursier américain de l'industrie électronique, la moyenne des prix quotidiens à la fermeture a été de 1'500 \$ avec un écart-type de 50 \$ pour la catégorie A d'actions, tandis que pour la catégorie B, durant la même période, la moyenne a été de 500 \$ et l'écart-type de 30 \$.

a) Déterminer le coefficient de variation pour le titre A.

b) Idem pour le titre B.

c) Comparer les résultats et les interpréter.

Exercice 10.59. Les nombres suivants indiquent la masse en grammes de 20 poussins :

$$67; 73; 76; 82; 60; 62; 60; 62; 55; 64; 64; 55; 75; 66; 61; 69; 72; 73; 54; 59.$$

Calculer la moyenne arithmétique, la médiane, l'écart-type et le coefficient de variation.

Exercice 10.60. Soit la population ci-dessous.

Somme dépensée en francs	Nombre de clients
$[0; 20[$	141
$[20; 40[$	239
$[40; 60[$	451
$[60; 80[$	578
$[80; 100[$	321
$[100; 200[$	294

Calculer l'écart-type et le coefficient de variation.

10.7.5 Comparaison des mesures de dispersion

L'étendue

1. Elle est très simple à calculer et à interpréter.
2. Elle ne tient pas compte de toutes les données et n'implique que les valeurs extrêmes.
3. Elle est utilisée pour donner une idée sommaire et rapide de la dispersion et pour déterminer les largeurs de classes lorsqu'on fait un regroupement en classes.
4. Sa valeur n'est pas stable, c'est-à-dire qu'elle varie beaucoup d'un échantillon à l'autre choisi dans une même population.
5. Elle est très peu utilisée.

L'écart semi-interquartile

1. Il est simple à calculer et à interpréter.
2. Il ne tient pas compte de toutes les données et n'est donc pas influencé par les données extrêmes.
3. Il est utilisé lorsque la distribution des effectifs est fortement dissymétrique. Dans ce cas, on utilise la médiane comme mesure de tendance centrale.
4. Sa valeur est moins stable que celle de la variance ou de l'écart-type.
5. Il est peu utilisé en général.

L'écart interquartile

1. Il présente les mêmes caractéristiques que l'écart semi-interquartile.

L'écart-type

1. Son calcul est plus long et son interprétation est moins immédiate.
2. Il tient compte de toutes les données.
3. Il se prête assez bien aux manipulations algébriques. On le retrouve ainsi dans plusieurs calculs en statistiques inférentielles.
4. Sa valeur est stable d'un échantillon à l'autre.
5. Il est, avec la variance, la mesure de dispersion la plus utilisée.

La variance

1. La variance a les mêmes caractéristiques que l'écart-type.
2. La présence de carrés accorde plus de poids aux grands écarts. Elle est ainsi fortement influencée par les données extrêmes.

Remarque. Le choix de la mesure de tendance centrale implique le choix de la mesure de dispersion :

mode	$\leftrightarrow$	étendue
médiane	$\leftrightarrow$	écart semi-interquartile
moyenne	$\leftrightarrow$	écart-type

10.8 Solutions

Exercice 10.1.

a) La population étudiée est "les voitures particulières neuves immatriculées en 2015".

b) Le caractère étudié est "type d'énergie consommée par ces voitures".

Exercice 10.2.

a) Quantitative continue.

b) Quantitative discrète.

c) Qualitative nominale.

d) Quantitative continue.

e) Qualitative ordinale.

f) Quantitative discrète.

g) Qualitative ordinale.

h) Qualitative nominale.

i) Quantitative continue.

j) Quantitative discrète.

k) Quantitative discrète.

l) Qualitative ordinale.

m) Qualitative nominale.

n) Quantitative discrète.

o) Quantitative continue.

p) Qualitative ordinale.

Exercice 10.3.

a) La population : les employés d'une entreprise. La variable statistique : le parti politique pour lequel ils ont voté.

b) Les modalités : $\{\text{PS}; \text{PLR}; \text{PDC}; \text{UDC}; \text{verts}\}$.

c) Cette variable statistique est qualitative ordinale.

Exercice 10.4.

a) La population : les 80 étudiants du professeur de l'Uni. La variable statistique : le nombre de points obtenus lors d'un test statistique.

b) Les modalités : $\{2; 3; ...; 10\}$.

c) Elle est du type quantitative discrète.

Exercice 10.5.

Classes	Centres	Effectifs	Fréquences
$[30; 45[$	37,5	1	$1,\overline{6}\%$
$[45; 60[$	52,5	2	$3,\overline{3}\%$
$[60; 75[$	67,5	9	15%
$[75; 90[$	82,5	35	$58,\overline{3}\%$
$[90; 105[$	97,5	12	20%
$[105; 120[$	112,5	1	$1,\overline{6}\%$
Total		60	100%

Exercice 10.6.

a) Faux, ce sont les "dépenses culturelles".

b) Vrai.

c) Faux. Cela n'a pas de sens.

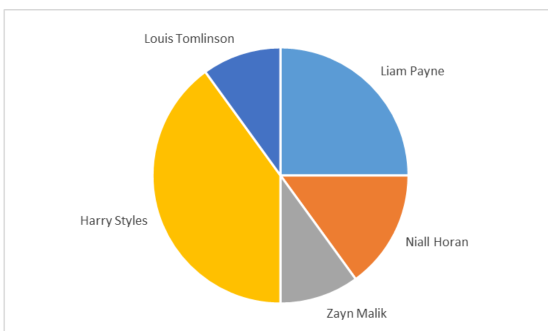
d) Faux. Le total doit être de 100%.

Exercice 10.7.

a)

Chanteur	Effectifs	Fréquences (en %)	Angle (en degrés)
Liam Payne	350	25	90°
Niall Horan	210	15	54°
Zayn Malik	140	10	36°
Harry Styles	560	40	144°
Louis Tomlinson	140	10	36°

b)

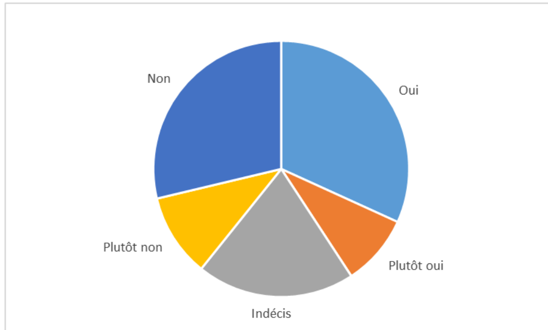


Exercice 10.8.

a)

Avis	Fréquences
Oui	$31,79\%$
Plutôt oui	$8,97\%$
Indécis	20%
Plutôt non	$10,51\%$
Non	$28,72\%$

b)



Exercice 10.9.

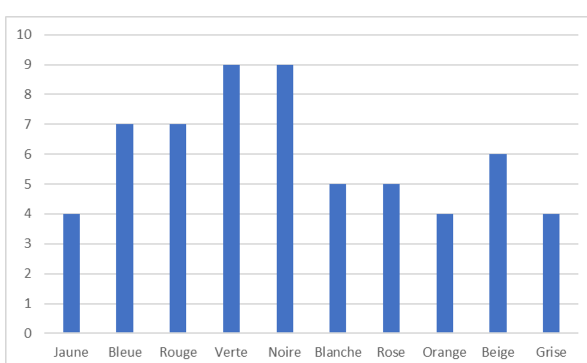
a) La population est "les robes du magasin de vêtements" et la variable statistique est "la couleur des robes".

b) Les modalités : {jaune; bleue; rouge; verte; noire; blanche; rose; orange; beige; grise}.

c)

Couleurs	Effectifs	Fréquences
Jaune	4	$6,\overline{6}\%$
Bleue	7	$11,\overline{6}\%$
Rouge	7	$11,\overline{6}\%$
Verte	9	15%
Noire	9	15%
Blanche	5	$8,\overline{3}\%$
Rose	5	$8,\overline{3}\%$
Orange	4	$6,\overline{6}\%$
Beige	6	10%
Grise	4	$6,\overline{6}\%$
Total	60	100%

d)



Exercice 10.10.

a) 30 employés d'une petite entreprise.

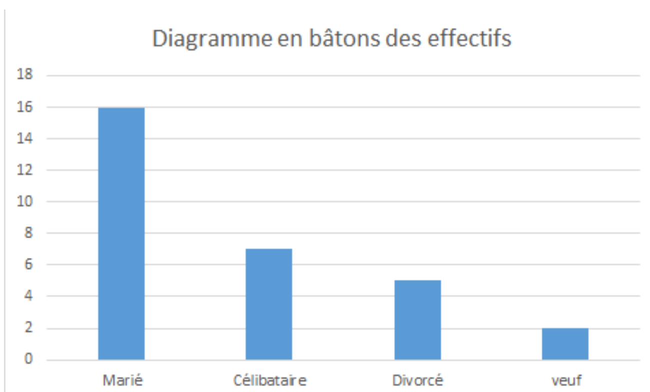
b) Leur état civil

c) {Marié, Célibataire, Divorcé, Veuf}.

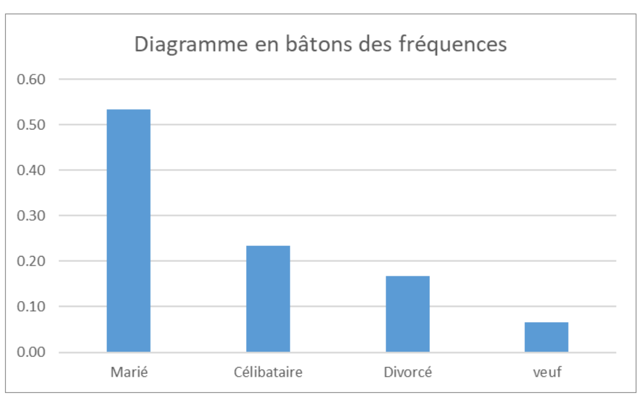
d)

Modalités	Effectifs	Fréquences
Marié	16	$53,\overline{3}\%$
Célibataire	7	$23,\overline{3}\%$
Divorcé	5	$16,\overline{6}\%$
Veuf	2	$6,\overline{3}\%$
Total	30	100%

e)



f)



g) Ils sont semblables.

Exercice 10.11.

a) La population est "les exploitations agricoles en 2015" et le caractère étudié est "leur surface".

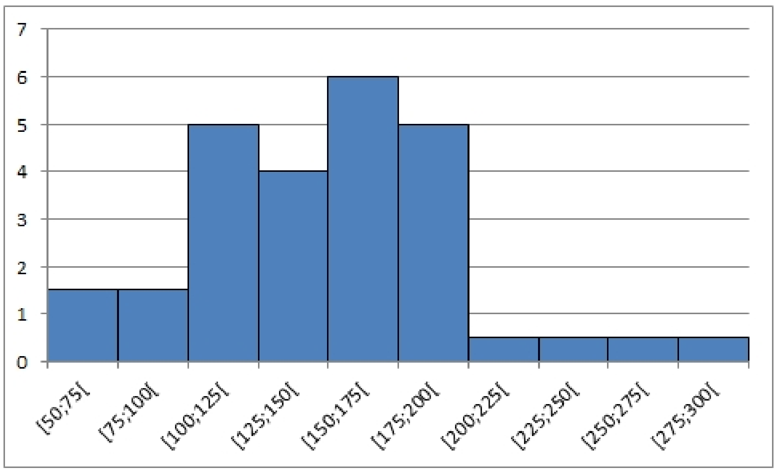
b) Des classes.

c) Car il y a beaucoup de valeurs différentes du caractère. Cela facilite la lecture.

d) Quantitative continue.

e) Par exemple un histogramme.

Exercice 10.12.



Exercice 10.13. Ce graphe va donner une image tronquée de la réalité dans la mesure où l'échelle horizontale n'est pas linéaire.

Exercice 10.14.

— L'origine de l'axe vertical n'est pas à 0, mais juste au dessus de 5000, donnant l'impression d'une multiplication par 6 des naturalisations entre 1991 et 1993 (au lieu d'une multiplication par 2,5).

— L'année 1990 à été choisie comme point de départ parce qu'elle représente l'année avec le plus faible nombre de naturalisations depuis.

— Notons enfin que les chiffres sont absolus, et ne tiennent pas compte de l'augmentation de la population d'une année à l'autre.

Exercice 10.15.

a) Le taux d'étrangers en Suisse en 2010 se montait à

$$\frac{2'092'309}{7'700'000 + 200'000 + 212'566 + 40'797} \cong 25,7\%.$$

b) Aux 1'638'949 étrangers faisant partie des 7,7 millions, on en a ajouté

$$200'000 + 212'566 + 40'797 = 453'363,$$

qu'il convient également de rajouter au total de 7,7 millions. Autrement dit, ce chiffre a été obtenu en calculant

$$\frac{2'092'308}{7'700'000}.$$

c) En plus des 2'092'309 étrangers obtenus ci-dessus, on a ajouté les 550'000 naturalisés entre 1985 et 2010, ce qui donne un total de 2'642'309. Il a ensuite été calculé le rapport

$$\frac{2'642'309}{7'700'000} \cong 34,3\%.$$

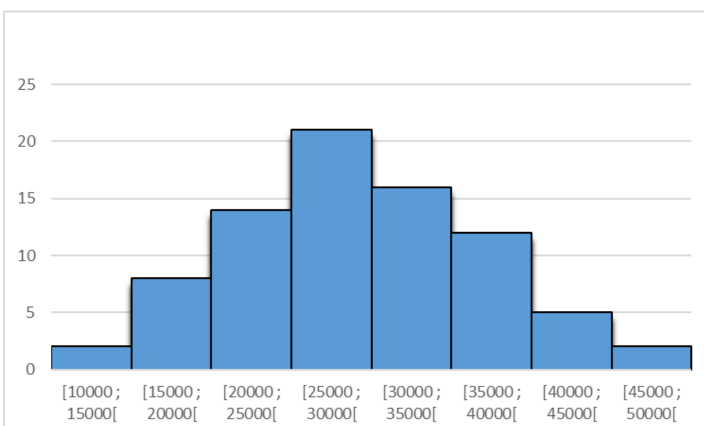
Ce calcul pose deux problèmes. D'une part, le total n'est pas correct, comme au point précédent. D'autre part, ce raisonnement repose sur l'hypothèse selon laquelle les 550'000 naturalisés depuis 25 ans sont tous en vie et résident toujours en Suisse !

Exercice 10.16.

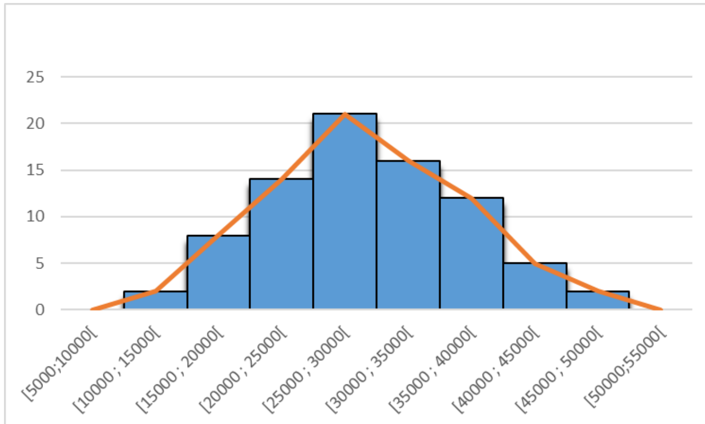
a)

Classes (salaires)	Centres	Effectifs	Fréquences
$[10'000; 15'000[$	12'500	2	$2,5\%$
$[15'000; 20'000[$	17'500	8	10%
$[20'000; 25'000[$	22'500	14	$17,5\%$
$[25'000; 30'000[$	27'500	21	$26,25\%$
$[30'000; 35'000[$	32'500	16	20%
$[35'000; 40'000[$	37'500	12	15%
$[40'000; 45'000[$	42'500	5	$6,25\%$
$[45'000; 50'000[$	47'500	2	$2,5\%$
Total		80	100%

b)



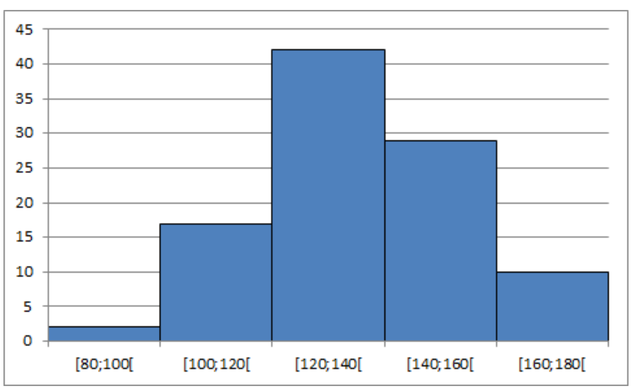
c)

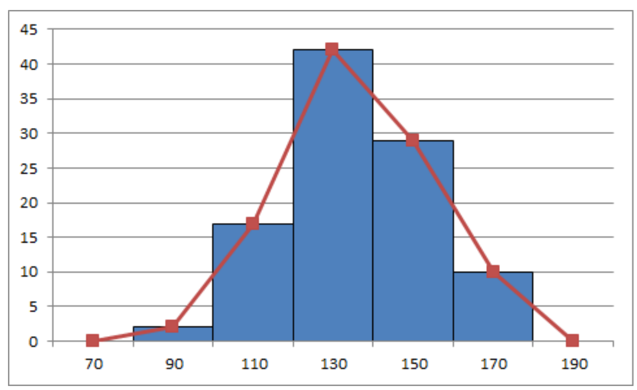


Exercice 10.17.

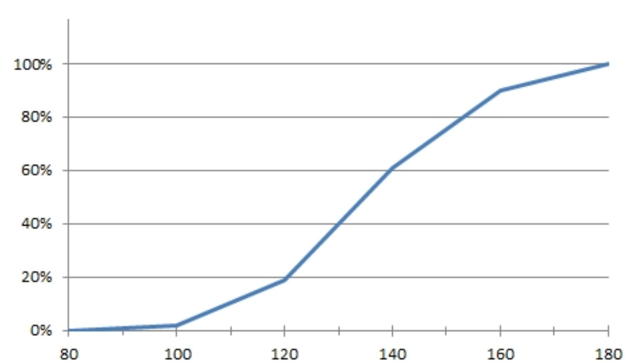
a) Quantitative continue.

b)





c)



d) 162.

e) 141.

Exercice 10.18. $\overline{x} \cong 6,46$.

Exercice 10.19. $\overline{x} = 40,4$, $\overline{x} = 92$.

Exercice 10.20.

a) $M_o = 7$.

b) $M_o = 4$ et $M_o = 8$.

Exercice 10.21. $M_o \in [4;6[$.

Exercice 10.22. La classe modale est $]30;35]$.

Exercice 10.23. $M_o \in]20;65]$, $M_o \in]80;100]$.

Exercice 10.24. Les classes modales sont $[20;22[$ et $[24;28[$.

Exercice 10.25. $M_e = 2,5$.

Exercice 10.26.

a)

Poids	Effectifs	Effectifs cumulés
1	7	7
2	4	11
3	4	15
4	5	20

b) $\overline{x} = 2,35$ kg.

c) $M_o = 1$ kg.

d) $M_e = 2$ kg.

Exercice 10.27. $\overline{x} \cong 13,51$, $M_e = 14$ et $M_o = 14$.

Exercice 10.28.

a) 6'218,75 francs.

b) 4'875 francs.

c) (a) 5'150 francs et la médiane devient 4'950 francs.
   (b) Il sera compris entre 0 et 4'800 francs.

Exercice 10.29. 4, 8 et 9.

Exercice 10.30.

a) 6 petits-enfants.

b) Elle a pu répondre n'importe quel nombre inférieur ou égal à 8.

Exercice 10.31. $M_e \in [4;6[$.

Exercice 10.32. $\overline{x} = 185,8$ et $M_e \in [180;200[$.

Exercice 10.33. La médiane, éventuellement le mode, mais surtout pas la moyenne.

Exercice 10.34.

a) Echantillon A : $\overline{x} = 5,2$ et $M_e = 3$
   Echantillon B : $\overline{x} = 5,7$ et $M_e = 5,5$.

b) La moyenne arithmétique.

Exercice 10.35. Au premier examen, je suis en dessus de la moyenne. Au deuxième, j'ai fait mieux que la moitié des étudiants. Au troisième, j'ai obtenu plus que le nombre de points le plus fréquent de 7.

Exercice 10.36. $Q_1 = 8$, $Q_2 = 9$ et $Q_3 = 10$.

Exercice 10.37.

a) 20.

b) 3.

c) $M_e = 3$, $Q_1 = 1$ et $Q_3 = 5$.

d) $M_o = 0$.

Exercice 10.38. 9.

Exercice 10.39.

a) $M_e = 3,375$ m, Maximum $= 4,5$ m, Minumum $= 2,7$ m, $Q_1 = 3,075$ m et $Q_3 = 3,65$ m.

b) (a) Faux.
   (b) Vrai.
   (c) Vrai.

Exercice 10.40. $Q_1 \in [140; 150[$, $Q_3 \in [150; 160[$.

Exercice 10.41.

a)

Taille (en cm)	Effectifs	Fréquences cumulées
$[150; 160[$	40	$0,2$
$[160; 170[$	60	$0,5$
$[170; 180[$	20	$0,6$
$[180; 190[$	30	$0,75$
$[190; 200[$	50	1

b) $M_o \in [160; 170[$, $M_e = 170$, $Q_1 \in [160; 170[$ et $Q_3 = 190$.

Exercice 10.42.

a) $Q_1 = 4$, $Q_2 = M_e = 6$ et $Q_3 = 10$.

b) Entre 2 et 13 mails.

c) Plus de 6 mails.

d) 50%.

Exercice 10.43.

a) Pour X : $Q_1 = 3$, $Q_2 = 6$ et $Q_3 = 12$.
   Pour Y : $Q_1 = 3$, $Q_2 = 12$ et $Q_3 = 16$.

b) La ville Y.

c) Non.

d) Non.

Exercice 10.44.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & U \\ 2 & \leftrightarrow & Z \\ 3 & \leftrightarrow & Y \\ 4 & \leftrightarrow & X \end{array}$$

Exercice 10.45.

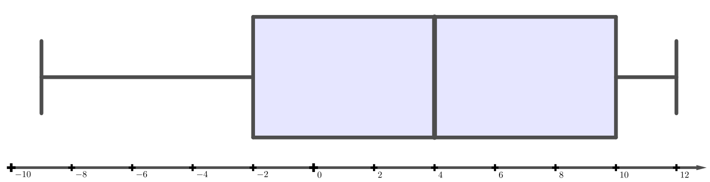
$A \leftrightarrow 4.$

$B \leftrightarrow 3.$

$C \leftrightarrow 1.$

$D \leftrightarrow 2.$

Exercice 10.46.

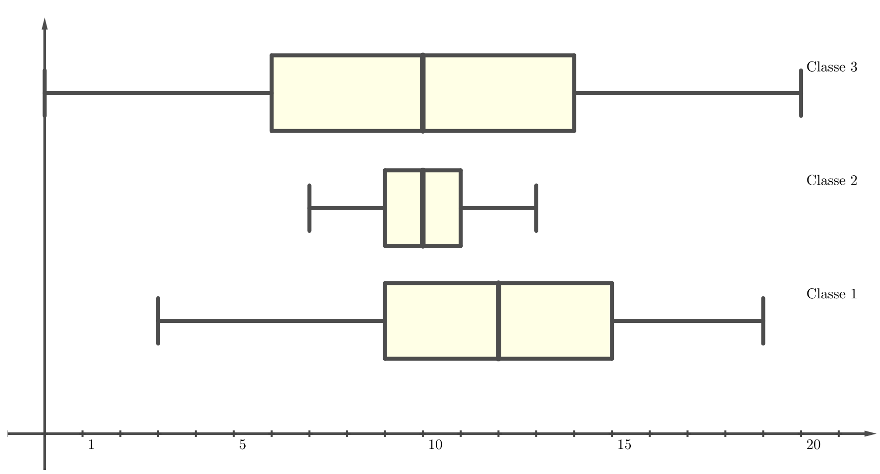


Exercice 10.47.

a)

Points	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Classe 1	0	0	0	1	1	3	1	0	2	2	2	1	7	1	4	3	2	1	2	1	0
Classe 2	0	0	0	0	0	0	0	1	7	4	8	7	6	1	0	0	0	0	0	0	0
Classe 3	1	2	1	1	1	2	1	0	3	4	2	4	3	0	1	2	1	1	1	2	1

b)



c) $\overline{x_1} \cong 11,618$, $\overline{x_2} \cong 10,029$ et $\overline{x_3} = 10$.

d)

Critère A : Classe 2.
Critère B : Classe 3.
Critère C : Classe 1.
Critère D : Classe 2.
Critère E : Aucune.

Exercice 10.48. $E = 18$.

Exercice 10.49. $Q_1 = 28'997$, $Q_2 = 37'916,5$, $Q_3 = 54'585,5$, $I_Q = 25'588,5$ et $Q = 12'794,25$.

Exercice 10.50.

a) $E = 12$ et $Q = 1$.

b) $14,78\%$.

Exercice 10.51. $V = 95,\overline{8}$ et $\sigma \cong 9,79$.

Exercice 10.52.

a) $\overline{x} = 11,3\overline{6}$, $M_o = 11$ et $M_e = 11$.

b) $V = 3,63\overline{2}$ et $\sigma \cong 1,906$.

Exercice 10.53.

a) $V \cong 486,6$ et $\sigma \cong 22,059$.

b) $V = 2416$ et $\sigma \cong 49,153$.

Exercice 10.54.

Exercice 10.55. $b_0 = 2$, $b_{10} = 5$, $Q_1 = 2$, $M_e = 4$, $Q_3 = 5$, $\overline{x} = 3,6$, $\overline{x^2} = 14,4$, $V = 1,44$ et $\sigma = 1,2$.

Exercice 10.56. $\overline{x} = 46,887$ km/h et $\sigma \cong 7,056$ km/h.

Exercice 10.57.

a) $\overline{x} \cong 25'608,696$.

b) $V \cong 6'151'228,733$ et $\sigma \cong 2'480,167$.

Exercice 10.58.

a) $C_A = 3,\overline{3}\%$.

b) $C_B = 6\%$.

c) Dans les deux cas, la dispersion est faible, bien qu'elle le soit davantage pour le titre A, malgré que son écart-type soit inférieur à celui de B.

Exercice 10.59. $\overline{x} = 65,45$ g, $M_e = 64$ g, $\sigma \cong 7,57$ g et $C \cong 11,57\%$.

Exercice 10.60. $\sigma \cong 38,99$ et $C \cong 54,58\%$.

10.9 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

10.1 ☐ Connaître le vocabulaire des statistiques.
10.2 ☐ Donner le type d'une variable statistique.
10.3 ☐ Regrouper des données brutes au sein d'un tableau d'effectifs.
10.4 ☐ Calculer les fréquences d'un ensemble de données.
10.5 ☐ Construire le diagramme en secteurs d'un ensemble de données.
10.6 ☐ Construire le diagramme en bâtons d'un ensemble de données.
10.7 ☐ Construire l'histogramme d'un ensemble de données.
10.8 ☐ Porter un jugement critique sur un diagramme ou un graphe.
10.9 ☐ Construire le polygone des effectifs d'un ensemble de données.
10.10 ☐ Calculer les effectifs cumulés croissants et décroissants d'un ensemble de données.
10.11 ☐ Construire le polygone des effectifs cumulés d'un ensemble de données.
10.12 ☐ Calculer la moyenne arithmétique d'un ensemble de données (cas discret et continu).
10.13 ☐ Calculer le mode d'un ensemble de données (cas discret et qualitatif).
10.14 ☐ Donner la classe modale d'un ensemble de données (cas continu).
10.15 ☐ Calculer la médiane d'un ensemble de données (cas discret).
10.16 ☐ Donner la classe à laquelle appartient la médiane d'un ensemble de données (cas continu).
10.17 ☐ Utiliser la valeur centrale la plus appropriée.
10.18 ☐ Calculer les quartiles d'un ensemble de données (cas discret).
10.19 ☐ Donner les classes auxquelles appartiennent les quartiles d'un ensemble de données (cas continu).
10.20 ☐ Construire la boîte à moustaches d'un ensemble de données (cas discret).
10.21 ☐ Interpréter la boîte à moustaches d'un ensemble de données.
10.22 ☐ Calculer l'étendue d'une série (cas discret et continu).
10.23 ☐ Calculer l'écart interquartile d'un ensemble de données (cas discret).
10.24 ☐ Calculer l'écart semi-interquartile d'un ensemble de données (cas discret).
10.25 ☐ Calculer la variance et l'écart-type d'un ensemble de données (cas discret et continu).
10.26 ☐ Calculer le coefficient de variation d'un ensemble de données et l'interpréter (cas discret et continu).

Chapitre 11

Probabilités

11.1 Introduction

Le *calcul des probabilités* a pour objet l'étude des *phénomènes aléatoires* (dus au hasard). Il trouve son origine dans les jeux de hasard pratiqués dès l'Antiquité, mais surtout très en vogue aux XVI^{e} et XVII^{e} siècles. De grands mathématiciens et éminents savants, tels Pascal, Fermat, Huygens, Jacques Bernouilli, Moivre, Laplace et Gauss, ont contribué à son essor. Au XIX^{e} siècle, le calcul des probabilités s'est enrichi de nombreuses applications et développements, notamment en mécanique statistique. En 1933, Kolmogorov publie dans *Fondements de la théorie des probabilités* une présentation axiomatisée du calcul des probabilités.

Aujourd'hui, le calcul des probabilités est très proche d'autres branches des mathématiques pures. Sa maîtrise est devenue importante dans de très nombreux domaines de la pensée humaine comme la physique, la chimie, la biologie, la médecine, la psychologie, la sociologie, l'économie et les sciences politiques.

11.2 Notion intuitive

Définition. Une *expérience aléatoire* est une expérience qui possède les deux propriétés suivantes :

a) On ne peut prédire avec certitude le résultat de l'expérience.

b) On peut décrire, avant l'expérience, l'ensemble des résultats possibles.

Exemple.

a) Jeter une pièce de monnaie.

b) Jeter un dé.

c) Tirer une carte dans un jeu de 52 cartes.

d) Jouer à la loterie.

Exemple.

— Quelle est la probabilité ("combien de chances sur combien a-t-on") d'obtenir pile lorsque l'on jette une pièce de monnaie ?
Comme il n'y a qu'un seul côté "pile" parmi deux côtés possibles, la probabilité sera donc d'une chance sur deux, soit $\frac{1}{2}$.

— En jetant un dé à 6 faces, quelle est la probabilité d'obtenir un résultat strictement supérieur à 4 ?
Puisque 5 et 6 sont les seuls résultats strictement supérieurs à 4 sur un total de 6 possibilités, la probabilité est de deux chances sur six, c'est-à-dire une chance sur trois car $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Exercice 11.1. On jette un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat

a) Impair ?
b) Multiple de 3 ?
c) Strictement inférieur à 5 ?
d) Supérieur ou égal à 1 ?
e) Strictement supérieur à 6 ?
f) Divisible par 2 ?

Exercice 11.2. On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Calculer la probabilité des événements suivants :

$$A = \text{"obtenir pile en premier"};$$
$$B = \text{"obtenir deux fois face"};$$
$$C = \text{"obtenir exactement une fois pile"};$$
$$D = \text{"obtenir au moins une fois face"}.$$

Les exercices et les exemples ci-dessus montrent qu'il parait naturel d'admettre que la probabilité qu'un événement se réalise est le nombre de possibilités qu'il a de se produire divisé par le nombre total de possibilités.

On calcule donc la probabilité $P(A)$ d'un événement A à l'aide de la *formule de Laplace.*

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}.}$$

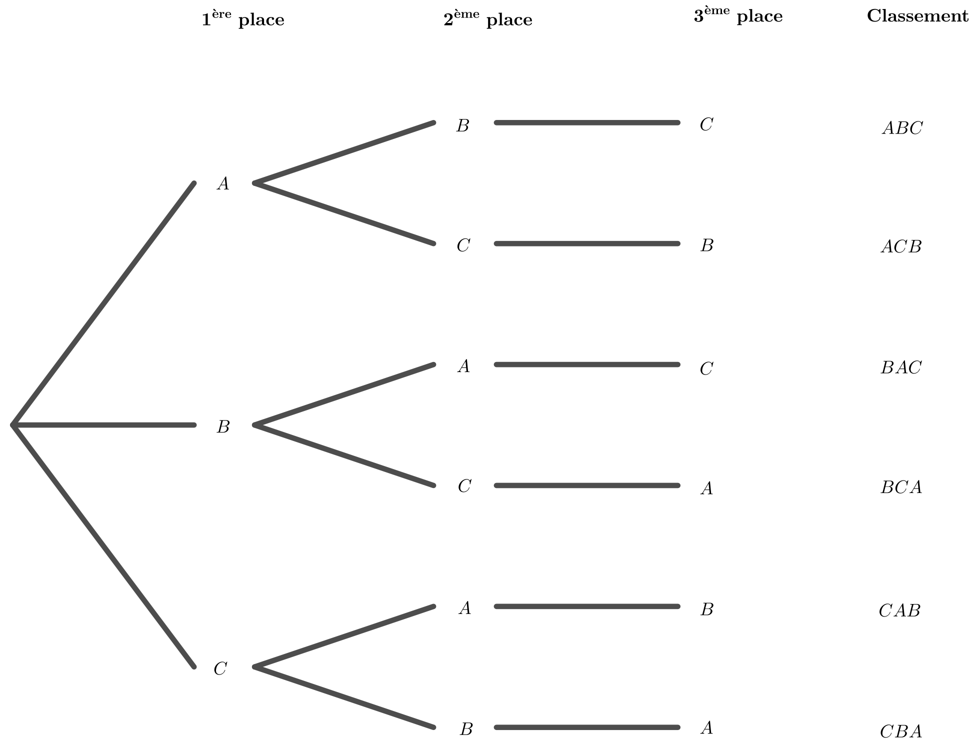
Remarque. La formule de Laplace n'est valable que lorsque les cas possibles ont tous la même probabilité de se réaliser. On dit qu'ils sont *équiprobables.*

11.3 Analyse combinatoire

11.3.1 Introduction

La principale difficulté de l'application de la formule de Laplace réside dans le calcul du nombre de cas possibles de l'expérience, ainsi que dans le nombre $n(A)$ de cas favorables à un événement A donné. La présente section a donc pour objectif de dénombrer des objets en grand nombre.

Exemple. Supposons que trois équipes participent à un tournoi dans lequel sont déterminées une première, une deuxième et une troisième place. Pour faciliter l'identification des équipes, nous allons les désigner par les lettres A, B et C. Cherchons le nombre de manières différentes permettant d'attribuer le classement de ces 3 équipes. On peut illustrer ce raisonnement par un diagramme en arbre.



On remarque que le nombre de possibilités de classement (6) est le produit du nombre de possibilités (3) d'attribuer la première place, par le nombre de possibilités (2) d'attribuer la deuxième place (après que la première place a été attribuée), par le nombre de possibilités (1) d'attribuer la troisième place (les deux premières étant déjà fixées).

Le raisonnement ci-dessus illustre la règle générale suivante, que nous utiliserons comme axiome fondamental :

Théorème. *Si une épreuve est composée de deux opérations successives, la première pouvant mener à n_1 issues différentes et le deuxième à n_2 issues différentes, alors l'épreuve peut se réaliser de $n_1 \cdot n_2$ manières différentes.*

Remarque. L'analyse combinatoire ne consiste pas en l'énumération de toutes les possibilités (souvent long et fastidieux) mais bien le dénombrement de celle-ci par un calcul.

Exemple. Une classe se compose de 12 filles et 9 garçons. De combien de façons peuvent être choisis un président de classe, un vice-président, un trésorier et un secrétaire, si le trésorier doit être une fille, le secrétaire un garçon, et si un étudiant ne peut exercer plus d'une charge ?

Il y a donc $12 \cdot 9 \cdot 19 \cdot 18 = 36'936$ choix possibles.

Exemple. Combien peut-on former de nombres entiers de quatre chiffres, si ces nombres doivent être des multiples de 5 ?

Il existe donc $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1'800$ tels nombres.

11.3.2 Permutations simples (sans répétition)

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'entier n *factorielle*, noté $n!$, comme suit :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} 0! & = & 1; \\ n! & = & n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1. \end{array}}$$

Exemple.

a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdots 2 \cdot 1 = 40'320$

Exercice 11.3. Calculer

a) $1!$

b) $3!$

c) $6!$

d) $10!$

e) $0!$

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)!$

g) $\dfrac{15!}{(4!)^2}$

h) $(-2)!$

i) $\dfrac{5! + 7!}{9! - 4 \cdot (6!)}$

j) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$

k) $\dfrac{100!}{98! \cdot 5!}$

l) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

Définition. On appelle *permutation simple* de n éléments tout classement de ces n éléments distincts dans un ordre particulier. Autrement dit, on classe tous les éléments présents dans un certain ordre.

Remarque. Deux permutations ne diffèrent que par l'ordre des objets.

Exemple. De combien de manières différentes peut-on disposer 5 personnes sur une rangée de 5 chaises ?

Il est possible de le faire de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ manières différentes.

Théorème. *Le nombre P_n de permutations simples de n éléments est donné par*

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exemple. De combien de façons différentes peut-on disposer un groupe de 9 personnes autour d'une table ronde ? On estime que deux configurations seront considérées comme identiques si chacune des neuf personnes a les mêmes voisins de gauche et de droite.
Il y a au total $9! = 362'880$ manières de placer les 9 personnes autour de la table. Or, comme il s'agit d'une table ronde, l'ordre $ABCDEFGHI$ est le même que $IABCDEFGH$ ou $HIABCDEFG$ et ainsi de suite. On remarque donc que 9 dispositions sont exactement les mêmes. On aura donc au final :

$$\frac{9!}{9} = 40'320 \text{ dispositions différentes.}$$

Exercice 11.4. En changeant l'ordre des couleurs du drapeau italien (vert-blanc-rouge), combien de drapeaux différents peut-on réaliser ?

Exercice 11.5. Lors d'une course de ski avec 12 participants, combien de classements différents peut-on obtenir ?

Exercice 11.6. De combien de manières différentes peut-on placer 7 livres sur une étagère ?

Exercice 11.7. Calculer le nombre de possibilités qu'il y a de ranger sur une étagère de bibliothèque 5 livres de mathématiques, 4 livres d'histoire et 3 livres de biologie, sachant que les livres concernant la même branche sont placés les uns à côté des autres.

11.3.3 Permutations avec répétitions

Exemple. Combien de mots différents (sans nécessairement exister dans le dictionnaire) peut-on écrire avec toutes les lettres des mots LUNE, SEVERE ou SEVERES ?

Pour le mot LUNE, le cas est clair, il s'agit d'une permutation simple : il y a $4! = 24$ mots différents puisque les 4 lettres sont distinctes. Pour le mot SEVERE, la situation est plus complexe puisque trois lettres sont identiques. Supposons que les trois E soient de couleurs différentes. Il y a alors $6! = 720$ mots colorés différents. Notons qu'un groupe de $3! = 6$ mots colorés conduit au même mot unicolore puisqu'il y a $3! = 6$ façons de placer les E sans changer le "sens" du mot. On peut donc composer $\frac{6!}{3!} = 120$ mots différents.

$$
720 \text{ mots} \left| \begin{array}{cc} \left.\begin{array}{c} \text{SEVERE} \\ \text{SEVERE} \\ \text{SEVERE} \\ \text{SEVERE} \\ \text{SEVERE} \\ \text{SEVERE} \end{array}\right\} & \text{SEVERE} \\ \vdots & \vdots \\ \left.\begin{array}{c} \text{EEESVR} \\ \text{EEESVR} \\ \text{EEESVR} \\ \text{EEESVR} \\ \text{EEESVR} \\ \text{EEESVR} \end{array}\right\} & \text{EEESVR} \end{array}\right| 120 \text{ mots}
$$

Comme le mot au pluriel SEVERES compte 3 E et 2 S, le nombre de mots de 7 lettres qu'on peut composer sera donc $\dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$.

Théorème. *Le nombre $P_n(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ de permutations avec répétitions de n éléments dont k d'entre eux apparaissant respectivement $n_1, n_2, \cdots, n_k$ fois est donné par*

$$
\boxed{P_n(n_1, n_2, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}}
$$

Exercice 11.8. Combien de mots différents peut-on former à l'aide des lettres des mots CHIEN, ECOLE, LILLE, PAPA, QUEUE, ANANAS, COMMISSION et MISSISSIPPI ?

Exercice 11.9. Un signal est constitué de 8 pavillons alignés. Combien de signaux différents peut-on former à l'aide de 4 pavillons rouges, 2 pavillons bleus et 2 pavillons verts ?

11.3.4 Arrangements simples (sans répétition)

Définition. On appelle *arrangement simple* de k éléments distincts parmi n tout choix de ces k éléments en les classant dans un ordre particulier. Autrement dit, on sélectionne un certain nombre d'éléments parmi le total pour les classer dans un ordre particulier. L'ordre est important.

Exemple. Huit athlètes participent à la finale du championnat du monde d'une course (100 mètres). Combien de podiums différents sont-ils possibles ?

Il existe $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ podiums possibles.

Exemple. Un singe sait écrire les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Combien de nombres différents de 4 chiffres peut-il former en utilisant qu'une fois chaque chiffre ?

Il existe $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ nombres différents.

Remarque. Parfois, le calcul peut s'avérer long et fastidieux. Par exemple, pour calculer $42 \cdot 41 \cdot 40 \cdots 13$, il convient d'utiliser l'expression : $\frac{42!}{12!}$. En effet,

$$\frac{42!}{12!} = \frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdots 13 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{11} \cdots \cancel{1}}{\cancel{12} \cdot \cancel{11} \cdots \cancel{1}} = 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdots 13$$

Théorème. *Le nombre A_n^k d'arrangements simples, $k \leq n$, où n est le nombre total d'éléments et k le nombre d'éléments sélectionnés, est donné par*

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.}$$

Exercice 11.10. Une course de chevaux comporte 12 partants. Combien y-a-t-il de possibilités de jouer un quarté (pronostiquer l'ordre d'arrivée des 4 premiers de le course) ?

Exercice 11.11. Dans une société de 20 personnes, on veut élire un président, un secrétaire et un caissier. Combien de comités différents peut-on former ?

11.3.5 Arrangements avec répétitions

Définition. On appelle *arrangement avec répétition* de k éléments choisis parmi n tout choix de k éléments distincts ou non (on peut choisir plusieurs fois le même) en les classant dans un ordre particulier. L'ordre est important.

Exemple. Lors d'une consultation populaire portant sur quatre objets, les électeurs peuvent répondre à chacune des questions posées par *Oui*, *Non* ou alors voter *blanc*. Les quatre réponses figurent sur une même feuille. Combien de piles différentes faut-il prévoir pour le dépouillement, si chaque pile ne doit comporter que des bulletins où les quatre réponses sont identiques ?

Il s'agit de prévoir $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ piles.

Exemple. Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former en utilisant les chiffres entre 1 et 9 ?
Il y a $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729$ nombres différents.

Exercice 11.12. Un singe est capable d'écrire les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

a) Combien de nombres différents de 4 chiffres peut-il former ?

b) Combien de nombres différents de 8 chiffres peut-il former ?

Exercice 11.13. Un questionnaire à choix multiple (QCM) comporte 15 questions. Pour chacune d'elles, 4 réponses sont proposées, dont une seule doit être cochée. De combien de manières peut-on remplir ce questionnaire ?

11.3.6 Combinaisons simples

Définition. On appelle *combinaison simple* de k éléments distincts parmi n tout choix de ces k éléments sans les classer dans un ordre particulier.

Exemple. Dans un jeu de 36 cartes, on en tire 5 au sort. Combien y a-t-il de possibilités ?

Dans un premier temps, voyons ce qui se passe si l'on tient compte de l'ordre. Dans ce cas, cela revient à un arrangement sans répétition, il y a

$$36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdots 1}{31 \cdot 30 \cdots 11} = \frac{36!}{31!} = 45'239'040 \text{ possibilités.}$$

Dans le décompte ci-dessus, deux mains contenant 5 cartes identiques mais classées dans un ordre différent sont considérées comme différentes. Puisqu'il existe $5!$ mains dans le dénombrement ci-dessus contenant 5 mêmes cartes données, on en déduit que le nombre de mains de 5 cartes d'un jeu de 36 cartes est donné par

$$\frac{45'239'040}{5!} = \frac{36!}{31! \cdot 5!} = 376'992 \text{ mains.}$$

Théorème. *Le nombre C_n^k (noté aussi $\binom{n}{k}$) de combinaisons simples, appelé coefficient binomial où n est le nombre total d'éléments et k le nombre d'éléments sélectionnés, est donné par*

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.}$$

Exemple. De combien de manières différentes peut-on former un comité de trois personnes à partir d'une classe de 24 élèves ?

Il existe $C_{24}^3 = \dfrac{24!}{(24-3)! \cdot 3!} = 2'024$ comités différents.

Exercice 11.14. De combien de manières différentes peut-on remplir une grille de la loterie à numéros, c'est-à-dire cocher 6 numéros sur 45 ?

Exercice 11.15. On doit désigner 7 personnes parmi 12 hommes et 8 femmes pour peler des pommes de terre.

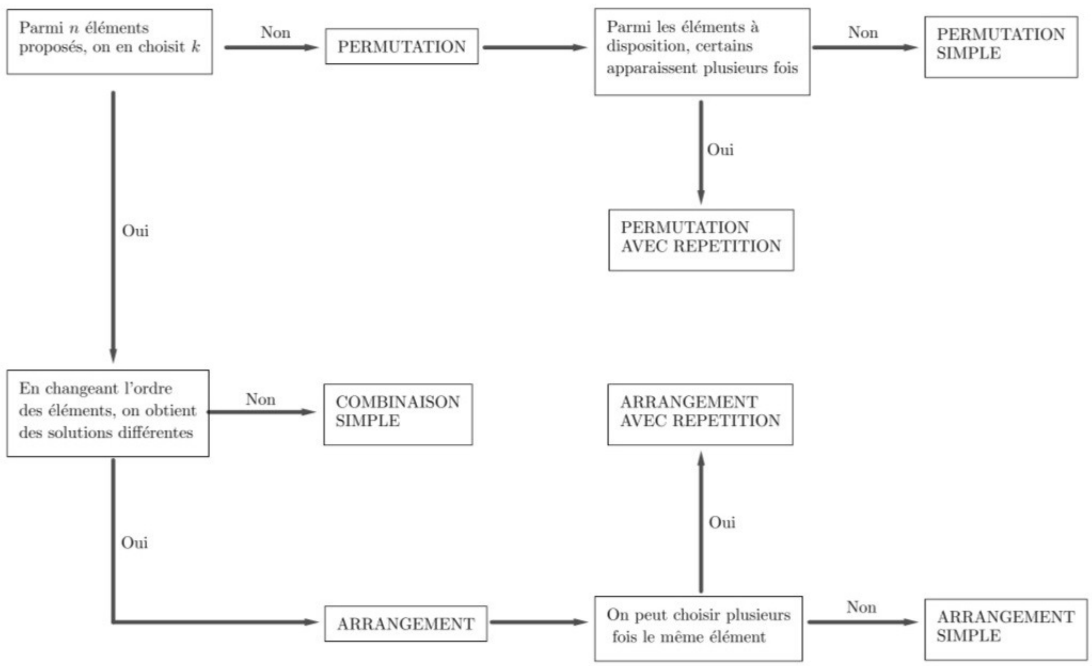
a) Combien de groupes différents peut-on imaginer ?

b) Combien de groupes différents peut-on imaginer si le groupe doit comporter 3 femmes et 4 hommes ?

c) Combien de groupes différents peut-on imaginer si le groupe doit comporter au moins un homme ?

11.3.7 Resumé

La figure ci-dessous résume la méthode de dénombrement à choisir en fonction d'une situation donnée.



Exercice 11.16. Supposons que les lettres F et G désignent respectivement la naissance d'une fille et la naissance d'un garçon. Pour une famille de 3 garçons et de 3 filles, un ordre de naissance possible est $FFFGGG$. Combien d'ordres de naissance sont possibles pour ces 6 enfants ?

Exercice 11.17. Considérons 6 points quelconques de sorte que trois points ne soient pas alignés. Combien de droites différentes déterminent-ils ?

Exercice 11.18. Sachant que 8 équipes de basket-ball participent à un tournoi, calculer le nombre de manières différentes d'attribuer la première, la deuxième et la troisième place, en supposant qu'il n'y ait pas d'équipes ex aequo.

Exercice 11.19. Un étudiant doit répondre à 6 questions sur dix à un examen.

a) Combien de choix différents cet étudiant peut-il effectuer ?

b) Combien de choix différents peut-il effectuer si les deux premières questions sont imposées ?

Exercice 11.20. De combien de façons différentes, 3 hommes et 2 femmes peuvent-ils occuper les 5 sièges d'une rangée

a) au total ?

b) si 2 femmes doivent occuper les extrémités de la rangée ?

c) si les hommes et les femmes doivent alterner ?

d) si les 2 femmes doivent être voisines ?

e) si les 2 femmes ne doivent jamais être voisines ?

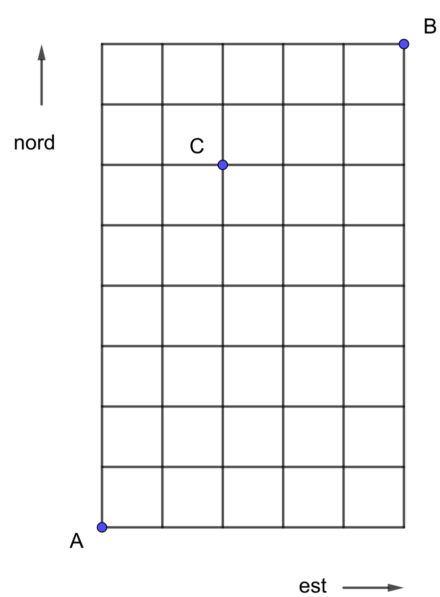
Exercice 11.21. Pour gagner à l'EuroMillions, il s'agit de deviner les 7 bons numéros parmi 50 et les 2 bonnes étoiles parmi 12. De combien de manières différentes peut-on remplir la grille ?

Exercice 11.22. Un client d'une banque se rappelle que 2, 4, 7 et 9 sont les chiffres d'un code d'accès à 4 chiffres pour un distributeur automatique de billets. Malheureusement, il a oublié l'ordre des chiffres. Calculer le plus grand nombre possible d'essais nécessaires pour obtenir le code correct.

Exercice 11.23. Le code de la porte d'entrée d'un immeuble est composé de 4 chiffres (pas forcément distincts) suivi d'une lettre. Exemple : 3436A. Combien de possibilités le concierge a-t-il pour choisir un code ?

Exercice 11.24. De combien de façons peut-on peindre les 4 murs d'une chambre si on dispose de 6 couleurs différentes ? Même question si les répétitions ne sont pas permises.

Exercice 11.25. Un piéton doit se rendre du point A au point B situé à 8 rues au nord et à 5 avenues à l'est du point A. Le piéton ne doit jamais marcher vers le sud ou vers l'ouest. Un cheminement possible pourrait être $EENNENNNEENNN$ où E et N correspondent respectivement à "est" et à "nord".



a) Combien de cheminements sont possibles ?

b) Même question si le piéton doit nécessairement passer par C.

Exercice 11.26. Un joueur de scrabble dispose de 7 lettres différentes. S'il met 5 secondes à former chaque mot de 7 lettres, combien d'heures lui faudra-t-il pour visionner tous les mots ?

Exercice 11.27. Un marchand de glaces possède 31 parfums différents en stock. Il se vante de pouvoir proposer environ 4'500 glaces différentes à 3 boules, chaque boule étant d'un parfum différent. A-t-il raison d'avancer ce nombre ?

Exercice 11.28. Lors de la saison 2022-2023, 14 équipes ont disputé le championnat de LNA de hockey. Quel est le nombre total de matches (aller et retour) ?

Exercice 11.29. On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?
Combien de ces mains contiennent

a) Le roi de coeur ?
b) Exactement un as ?
c) Les 4 reines ?
d) Un carré (4 cartes de même valeur) ?
e) 5 cartes de même couleur ?
f) 5 cartes de même couleur dont les valeurs se suivent ?
g) 5 cartes dont les valeurs se suivent ?
h) Au moins un valet ?
i) Un full (3 cartes de même valeur et deux autres également de même valeur) ?

11.4 Probabilités

11.4.1 Formule de Laplace

Définition. *L'univers* d'une expérience aléatoire est l'ensemble Ω de toutes les issues possibles que l'on peut obtenir au cours de cette expérience.

Exemple. Décrivons l'univers ainsi que le nombre d'issues possibles des expériences aléatoires proposées :

a) Lancer une pièce de monnaie : $\Omega = \{P; F\}$, 2 issues possibles.
b) Jeter un dé : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, 6 issues possibles.
c) Jeter deux fois de suite le même dé : $\Omega = \{(1;1); (1;2); (1;3); ...; (6;5); (6;6)\}$, $6 \cdot 6 = 36$ issues possibles.

Définition. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Un *événement* est un sous-ensemble de l'univers Ω. On note les événements par des lettres majuscules.

Le sous-ensemble vide ϕ est *l'événement impossible* et l'univers Ω est *l'événement certain.*

Exemple. On tire au hasard un jeton parmi les 3 jetons suivants : $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$.

L'univers Ω est donné par $\Omega = \{1; 2; 3\}$.

Les 8 événements possibles sont :

— $A =$ "Obtenir le jeton 1", $A = \{1\}$.
— $B =$ "Obtenir le jeton 2", $B = \{2\}$.
— $C =$ "Obtenir le jeton 3", $C = \{3\}$.
— $D =$ "Obtenir le jeton 1 ou 2", $D = \{1; 2\}$.
— $E =$ "Obtenir le jeton 1 ou 3", $E = \{1; 3\}$.
— $F =$ "Obtenir le jeton 2 ou 3", $F = \{2; 3\}$.
— $G =$ "Obtenir le jeton 1, 2 ou 3", $G = \{1; 2; 3\} = \Omega$.
— $H =$ "Obtenir le jeton 4", $H = \phi$.

On rappelle que dans le cas d'événements équiprobables, la probabilité qu'un événement se produise se calcule à l'aide de ladite *Formule de Laplace* :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}.}$$

Exemple. Si on tire deux cartes d'un jeu de 36 cartes bien brassé et si le tirage se fait au hasard, sans tricher, l'univers sera constitué de tous les tirages possibles de 2 cartes parmi les 36. Sans les décrire, nous savons qu'il y a

$$C_{36}^2 = \frac{36!}{34! \cdot 2!} = 630 \text{ possibilités.}$$

Si maintenant, on s'intéresse parmi ces possibilités à l'événement

$$A = \text{"Obtenir deux as"},$$

nous pouvons calculer le nombre de possibilités d'obtenir 2 as par

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \text{ possibilités.}$$

La probabilité d'obtenir 2 as en tirant au hasard 2 cartes dans un jeu de 36 cartes est donc :

$$P(A) = \frac{6}{630} \cong 0,00952 = 0,952\%.$$

Remarque.

— Cette définition est valable uniquement si tous les tirages ont la même chance de se réaliser. On dira alors que les résultats sont *équiprobables*. Par exemple, les résultats "on obtient pile" ou "on obtient face" en lançant une pièce de monnaie pourraient ne pas être équiprobables si la pièce est faussée. Dès lors, on ne pourrait plus utiliser la formule de Laplace.

— La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et 1. On l'exprime volontiers sous la forme d'un pourcentage.

— Dans la réalité, il est relativement rare qu'il soit possible de dénombrer les cas favorables et les cas possibles. Par exemple, les meilleurs météorologues ne savent pas chiffrer avec certitude la probabilité de l'événement "il fera beau demain".

Exercice 11.30. Dans une urne, se trouvent 5 boules rouges, 6 boules vertes et 4 boules blanches. Si on tire une boule au hasard, quelle est la probablité que la boule

a) soit rouge ?

b) soit verte ?

c) soit rouge ou blanche ?

d) soit verte ou blanche ?

e) ne soit pas verte ?

Exercice 11.31. On jette deux dés. Calculer la probabilité que la somme soit

a) égale à 11.

b) égale à 8.

c) égale à 8 ou 11.

d) strictement plus grande que 9.

e) un nombre impair.

f) plus grand ou égal à 4.

Exercice 11.32. A une personne qui a les yeux bandés, on demande d'aligner 4 boules de couleur différentes (rouge, jaune, bleue et verte) impossibles à distinguer au toucher. Calculer la probabilité des événements suivants :

$A =$ "la personne aligne dans l'ordre rouge, jaune, bleu et vert";

$B =$ "la personne place la boule verte en premier";

$C =$ "la personne place la boule rouge en deuxième position et la jaune en dernière position".

Exercice 11.33. Dans un groupe de 12 personnes, on désigne au hasard un groupe de 3 personnes chargées de préparer le repas. Quelle est la probabilité que Serge et Henri, qui sont amis, en fassent partie ?

Exercice 11.34. Un examen consiste en un questionnaire à choix multiples (QCM), comprenant 10 questions. Pour chaque question, il est proposé 4 réponses dont une seule est correcte. Un étudiant répond complètement au hasard à toutes les questions.

a) Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à toutes les questions ?

b) Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à aucune question ?

c) Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à une seule question ?

d) Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à exactement 8 questions ?

e) Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à la moitié des questions ?

11.4.2 Ensembles

Parler d'*événements* revient à parler d'*ensembles*. Pour décrire certains événements, on utilise donc les notations ensemblistes et des *diagrammes de Venn*[1] pour les représenter.

Définition. Soit Ω un univers et $A, B \subset \Omega$ deux événements.

— On note ${}^cA$ l'*événement complémentaire* (ou *contraire*) de A. Il se réalise à chaque fois que A ne se réalise pas.

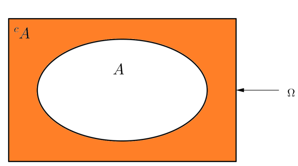


FIGURE 11.1 – Complémentaire ${}^cA$ d'un événement A.

1. JOHN VENN, mathématicien et logicien anglais (1834-1923).

— On note $A \cup B$ l'événement A *ou* B. Il se réalise chaque fois que A se réalise ou que B se réalise (ou les deux simultanément).

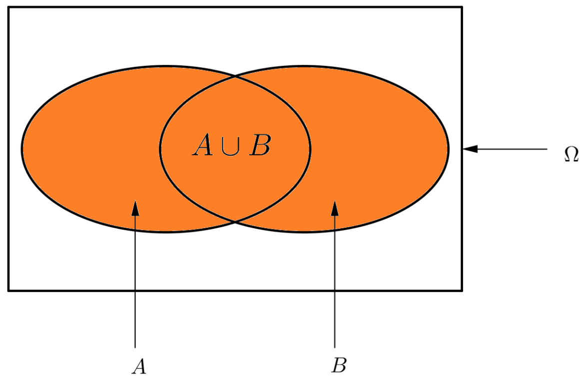


FIGURE 11.2 – Evénement $A \cup B$.

— On note $A \cap B$ l'événement A *et* B. Il se réalise chaque fois que A et B se réalisent simultanément.

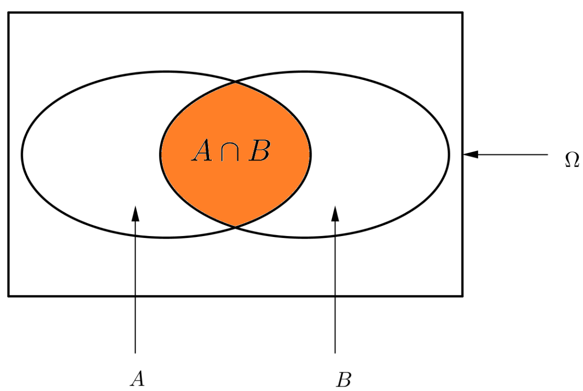


FIGURE 11.3 – Evénement $A \cap B$.

— On dit que A et B sont *incompatibles* s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément. Dans ce cas, on a $A \cap B = \phi$.

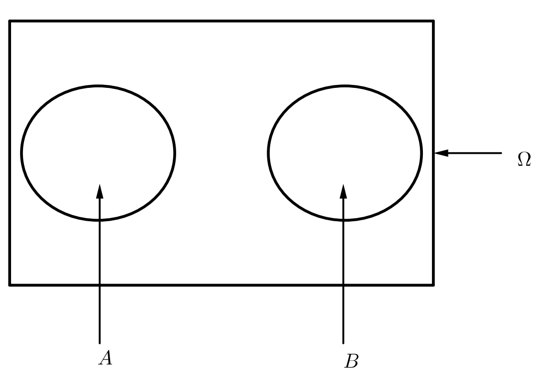


FIGURE 11.4 – Evénements incompatibles.

Exemple. On jette un dé.

- L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- L'événement $A =$ "obtenir un multiple de 3" est donné par $A = \{3; 6\}$.
- L'événement $B =$ "obtenir un nombre pair" est donné par $B = \{2; 4; 6\}$.
- L'événement $C =$ "obtenir un nombre strictement inférieur à 3" est donné par $C = \{1; 2\}$.
- L'événement complémentaire de A est ${}^cA = \{1; 2; 4; 5\}$.
- L'événement A ou B est $A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$.
- L'événement A et B est $A \cap B = \{6\}$.
- Les événements A et C sont incompatibles, car $A \cap C = \phi$.

Exemple. Reprenons l'exemple précédent dans lequel il s'agissait de tirer 2 cartes parmi 36, avec l'événement

$$A = \text{"Obtenir deux as"}.$$

La probabilité de l'événement complémentaire

$${}^cA = \text{" Ne pas obtenir deux as"}$$

est donnée par

$$P({}^cA) = 1 - P(A) \cong 1 - 0,952\% = 99,048\%.$$

Exemple. On jette deux dés et on s'intéresse à la somme des points obtenus.

Considérons les événements

$$A = \text{"obtenir une somme paire"}$$

et

$$B = \text{"obtenir une somme multiple de 3"}.$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On a $P(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$ et $P(B) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

Calculer $P(A \cap B)$ revient à dénombrer les cas favorables à l'événement

$$A \cap B = \text{"obtenir une somme multiple de 2 et de 3"} = \text{"obtenir une somme multiple de 6"}.$$

On trouve facilement que

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Quant à $P(A \cup B)$, il s'agit de déterminer le nombre de cas favorables à l'événement

$$A \cup B = \text{"obtenir une somme multiple de 2 ou de 3.}$$

Du tableau précédent, on en tire que

$$P(A \cap B) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

Au total, on observe que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Théorème. *Les probabilités vérifient les propriétés suivantes :*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
3. *Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*
4. $P({}^cA) = 1 - P(A)$.

Exercice 11.35. Soient les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ suivants :

$$A = \{2; 4; 6; 8\}, B = \{1; 2; 3; 4; 5\}, C = \{1; 3; 5; 7\}$$

Déterminer :

a) $A \cup {}^cA$	b) $A \cap B$
c) $A \cup B$	d) $A \cup {}^cB$
e) $A \cap {}^cA$	f) $A \cap B \cap C$

Exercice 11.36. Un professeur interroge 23 élèves qui pratiquent tous l'un au moins de ces trois sports : football, natation, tennis.
13 pratiquent le football, dont 6 le football uniquement et 3 le football et la natation seulement. 5 élèves pratiquent seulement la natation, tandis qu'un élève pratique la natation et le tennis seulement. 2 élèves enfin pratiquent ces trois sports.

a) Représenter par un diagramme de Venn les trois ensembles F, N et T.
b) Combien d'élèves pratiquent la natation ?
c) Combien d'élèves pratiquent le tennis ?
d) Combien d'élèves pratiquent seulement le tennis et le football ?
e) Combien d'élèves pratiquent le tennis uniquement ?

Exercice 11.37. On sait que parmi 120 étudiants, 60 étudient l'italien, 50 étudient l'espagnol et 20 étudient à la fois l'italien et l'espagnol. En prenant un étudiant au hasard, calculer la probabilité qu'il étudie l'italien ou l'espagnol. Quelle est la probabilité qu'il n'étudie ni l'italien, ni l'espagnol ?

Exercice 11.38. Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% sont vaccinés contre la diphtérie et 30% sont vaccinés contre les deux maladies. Quelle est la probabilité, pour un individu choisi au hasard, de n'être vacciné contre aucune de ces deux maladies ?

Exercice 11.39. Une enquête portant sur 100 étudiants a donné les résultats suivants :

— 32 étudient les mathématiques.

— 20 la physique.

— 45 la biologie.

— 15 les mathématiques et la biologie.

— 7 les mathématiques et la physique.

— 10 la physique et la biologie.

— 30 aucune de ces matières.

a) Représenter la situation à l'aide d'un diagramme de Venn.

b) Quel nombre d'étudiants étudient les trois matières ?

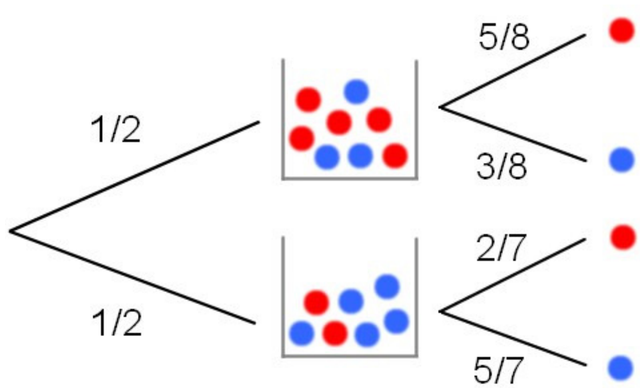
c) Quel est le nombre d'étudiants n'ayant choisi qu'un seul sujet d'étude ?

11.4.3 Diagramme en arbre

Lorsque plusieurs opérations sont effectuées à la suite (lancer une pièce 5 fois, tirer une carte puis une autre dans un jeu de carte, etc.), on peut illustrer la situation à l'aide d'un *diagramme en arbre* où chaque branche correspond à un événement.

Exemple. Deux urnes contiennent des boules rouges et des boules bleues. La première urne contient 5 boules rouges et 3 boules bleues. La seconde urne contient 2 boules rouges et 5 boules bleues. On tire une pièce afin de déterminer l'urne dans laquelle on tirera au hasard une boule. Si l'on obtient "pile", on choisit la première urne alors que la seconde est sélectionnée si c'est "face". Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

On peut illustrer cette expérience par le diagramme en arbre ci-dessous :



La probabilité de tirer une boule rouge est donc :

$$P(\text{boule rouge}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}=\frac{51}{112}\cong 0,455 = 45,5\%$$

Exercice 11.40. On tire au sort deux cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité que les deux cartes soient des coeurs

a) si la première est remise dans le jeu avant le tirage de la seconde ?

b) si la première n'est pas remise dans le jeu avant le tirage de la seconde ?

Exercice 11.41. Un sac contient 9 boules : 4 rouges et 5 blanches. On tire 3 boules. Calculer la probabilité pour qu'elles soient toutes rouges

a) si le tirage a lieu avec remise ;

b) si le tirage a lieu sans remise.

Exercice 11.42. L'éclairage d'une salle requiert deux ampoules différentes, A et B.
La probabilité que ces ampoules explosent après 100 heures d'utilisation se monte à 12% pour l'ampoule A et 18% pour l'ampoule B.

a) Construire le diagramme en arbre.

b) Calculer la probabilité que les deux ampoules explosent après 100 heures.

c) Calculer la probabilité qu'au moins une ampoule fonctionne toujours après 100 heures.

d) Quelle est la probabilité qu'exactement une ampoule explose après 100 heures ?

Exercice 11.43. Supposons qu'une fusée sol-air ait 5 chances sur 10 d'atteindre son objectif, 2 chances sur 10 de le rater et 3 chances sur 10 de l'endommager. Admettons de plus qu'un avion est considéré comme abattu s'il est endommagé plus d'une fois.
Combien de fusées faut-il tirer sur un avion pour avoir à peu près 80 chances sur 100 de l'abattre ? (à l'aide d'un diagramme en arbre)

Exercice 11.44. La mafia subtilise 15% des colis expédiés de New York par avion. Dominique veut envoyer deux cadeaux de Noël à sa petite sœur. Elle peut faire soit deux paquets séparés indépendants, soit un paquet groupé.
Calculer dans les deux cas les probabilités des événements suivants :

a) Les deux cadeaux sont bien arrivés (groupés et séparés).

b) Un cadeau au moins est bien arrivé (groupés et séparés).

Exercice 11.45. Si un élève réalise un bon travail écrit, il relâche son effort et la probabilité que son prochain TE soit moins bon vaut $2/3$. Par contre, s'il estime que son TE est plus mauvais, plein de courage, il redouble d'attention et la probabilité que le prochain TE soit meilleur vaut $2/3$.
L'élève vient de faire un mauvais TE, quelle est la probabilité que sur les trois prochains TE, l'un au plus soit mauvais ?

11.4.4 Probabilité conditionnelle

Exemple. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé deux fois.
Soient les événements

$$A = \text{"La somme des points obtenus est supérieure ou égale à 9"};$$
$$B = \text{"Le premier dé tombe sur 6"}.$$

On a

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18},$$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

et

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Si on sait que le dé est tombé sur 6 au premier lancer, alors l'univers se réduit à

$$\Omega = \{(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6)\}.$$

Le nombre de cas possibles passe alors de 36 à 6.

Dans ce cas, quelle est alors la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure ou égale à 9, que l'on note $P(A|B)$?

Parmi les 6 cas possibles, 4 sont favorables.

Ainsi, on a

$$P(A|B) = \frac{4}{6} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Définition. Soient deux événements A et B associés à une même expérience aléatoire. On définit la *probabilité conditionnelle*, notée $P(A|B)$, comme étant la probabilité que l'événement A se réalise sachant que B est déjà réalisé.

Remarque. $P(A|B)$ n'est pas la probabilité d'un nouvel événement qui s'appellerait "$A|B$", mais la probabilité de A lorsque l'on prend comme univers, l'ensemble des seuls cas favorables à B.

Théorème. *Si A et B sont deux événements associés à la même expérience aléatoire avec $P(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est donnée par*

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.}$$

Corollaire. (Formule de Bayes.) *Si A et B sont deux événements associés à une même épreuve, on a*

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A).}$$

11.4.5 Evénements indépendants

Exemple. Un sac contient trois boules rouges et quatre boules noires. On tire au hasard deux boules avec remise et on considère les événements

$$A = \text{"La première boule extraite est rouge"};$$
$$B = \text{"La deuxième boule extraite est noire"}.$$

On a

$$P(A) = \frac{3}{7},$$
$$P(B) = \frac{4}{7}$$

et

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{12}{49}}{\frac{3}{7}} = \frac{12}{49} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4}{7}.$$

On observe que

$$P(B|A) = P(B).$$

Cela signifie que la réalisation de l'événement A n'influence pas celle de B.

Définition. On dit de deux événements A et B qu'ils sont *indépendants* si la réalisation de l'un n'influence en rien la réalisation (ou la non-réalisation) de l'autre. Dans ce cas, on a

$$\boxed{P(A|B) = P(A) \text{ et } P(B) = P(B|A).}$$

Théorème. *Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si*

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).}$$

Exercice 11.46. Dans une ville, 40% de la population a les cheveux bruns, 25% a les yeux marron et 15% possède à la fois les cheveux bruns et les yeux marron. On choisit au hasard une personne résidant dans la ville.

a) Si elle a les cheveux bruns, quelle est la probabilité qu'elle ait aussi les yeux marron ?

b) Si elle a les yeux marron, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas les cheveux bruns ?

c) Quelle est la probabilité qu'elle n'ait ni les cheveux bruns, ni les yeux marron ?

Exercice 11.47. Dans une école, 15% des moyennes de mathématiques sont insuffisantes, 25% des moyennes de physique sont insuffisantes et 10% des élèves ont une moyenne insuffisante dans les deux branches. On choisit un élève au hasard dans cette école.

a) Il a une moyenne insuffisante en physique. Calculer la probabilité qu'il ait aussi une moyenne insuffisante en mathématiques.

b) Il a une moyenne insuffisante en mathématiques. Calculer la probabilité qu'il ait aussi une moyenne insuffisante en physique.

c) Calculer la probabilité qu'il ait au moins une moyenne suffisante en mathématiques ou en physique.

Exercice 11.48. Dans une famille ayant deux enfants, calculer la probabilité des événements suivants :

a) Les deux enfants sont des garçons, sachant que l'ainé est un garçon ;
b) Les deux enfants sont des garçons, sachant qu'il y a au moins un garçon.

Exercice 11.49. On jette deux dés l'un après l'autre.

a) Sachant que la somme vaut 6, calculer la probabilité que l'un des dés ait donné 2 ;
b) Calculer la probabilité que la somme vaille 6, sachant que le premier dé a donné 5 ;
c) Calculer la probabilité que la somme vaille 6, sachant qu'au moins un dé indique 5.

Exercice 11.50. On extrait simultanément deux cartes d'un jeu de 36 cartes et on considère les événements suivants :

$$A = \text{"on tire deux cartes de coeur"};$$
$$B = \text{"on tire au moins un roi"}.$$

Calculer les probabilités conditionnelles $P(A|B)$ et $P(B|A)$.

Exercice 11.51. Dans un village de 150 habitants, 100 ont été vaccinés contre la grippe. Lors d'une épidémie, on constate que 10 personnes ont été malades alors qu'elles avaient été vaccinées et que 10 autres ont aussi été malades alors qu'elles n'avaient pas été vaccinées.

a) Calculer la probabilité qu'une personne vaccinée attrape la grippe ;
b) Calculer la probabilité qu'un habitant de ce village attrape la grippe ;
c) Calculer la probabilité qu'une personne ait été vaccinée si elle a la grippe.

Exercice 11.52. Philippe participe a un jeu télévisé. Il doit tout d'abord tourner une grande roue comportant les nombres de 1 à 20.

- Si le nombre sur lequel la roue s'arrête est un multiple de 3, il s'approche de la boîte A qui contient :
  - 1 enveloppe avec 100'000 CHF
  - 3 enveloppes avec 5'000 CHF
  - 8 enveloppes avec 200 CHF
- Si le nombre n'est pas un multiple de 3, il s'approche de la boîte B qui contient :
  - 2 enveloppes avec 5'000 CHF
  - 5 enveloppes avec 200 CHF
  - 3 enveloppes vides

A. Philippe tourne la roue puis tire une enveloppe :
   a) Construire un arbre illustrant la situation.
   b) Quelle est la probabilité de gagner le gros lot ? (100'000 CHF)
   c) Quelle est la probabilité de gagner 5'000 CHF ?
   d) Quelle est la probabilité de gagner au moins 200 CHF ?

B. Philippe tourne la roue une fois puis tire deux enveloppes l'une après l'autre dans la même urne :
   a) Quelle est la probabilité qu'il ne gagne rien ?

Exercice 11.53. On lance une pièce de monnaie.

— Si le résultat est "pile", on tire une boule dans l'urne U_1.

— Si le résultat est "face", on tire une boule dans l'urne U_2.

Les deux urnes contiennent les boules suivantes :

— U_1 contient 5 boules rouges et 8 boules vertes.

— U_2 contient 4 boules rouges, 5 boules vertes et 3 boules noires.

a) Construire l'arbre correspondant à cette situation.

b) Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ?

c) Quelle est la probabilité de tirer une boule verte ?

d) Sachant qu'une boule soit verte, calculer la probabilité qu'elle ait été tirée de l'urne U_1.

e) Sachant qu'une boule soit tirée de l'urne U_1, calculer la probabilité qu'elle soit rouge.

Exercice 11.54. Un chapeau contient trois cartes : l'une dont les deux faces sont blanches, l'une dont les deux faces sont rouges, la troisième ayant une face rouge et l'autre blanche. On tire une carte dont la face visible est rouge. Quelle est la probabilité que l'autre face soit également rouge ?

Exercice 11.55. Parmi les sportifs de compétition, 40% sont dopés avec des substances interdites. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

— Lorsque le sang d'une personne contient des substances interdites, le test est positif 94 fois sur 100.

— Lorsque le sang d'une personne ne contient pas de substances interdites, le test est positif 8 fois sur 100.

On choisit un sportif au hasard et on le soumet au test.

a) Quelle est la probabilité que le sportif ne soit pas dopé et que le test soit négatif ?

b) Quelle est la probabilité que le test soit positif ?

c) Si le test est positif, quelle est la probabilité que le sportif ne soit pas dopé ?

d) Quelle est la probabilité que le résultat soit erroné ?

Exercice 11.56. Un test pour le dépistage d'une maladie donne un résultat positif pour un individu malade avec une probabilité de 0,9 (*indice de sensibilité*) et un résultat négatif pour un individu sain avec une probabilité de 0,95 (*indice de spécificité*). Calculer la probabilité qu'un individu soit malade si son test est positif, sachant que la fréquence de la maladie dans la population vaut $\frac{2}{1000}$ (*taux de prévalence*).

Exercice 11.57. Une boîte contient 5 boules rouges, 5 noires et 8 vertes. Après chaque tirage, on ne remet pas la boule dans la boîte. Si 4 boules sont tirées de la boîte, calculer la probabilité d'obtenir :

a) 2 rouges et 2 vertes.

b) 3 rouges et 1 noire.

c) Exactement 3 noires.

d) $NNRV$ dans cet ordre.

e) 4 couleurs identiques.

f) 3 couleurs différentes.

Exercice 11.58. (Problème de Monty Hall)
Ce problème est inspiré d'une émission de TV "Let's Make a Deal" (1963-1986) présenté par Maurice Halprin, dit Monty Hall. Le candidat est placé devant 3 portes fermées. On sait que derrière une de ces portes, il y a une voiture alors que derrière les 2 autres se trouvent une chèvre. Tout d'abord, le candidat choisit une porte. Le présentateur, qui sait où se situe la voiture, ouvre une autre porte où la voiture ne se situe pas. Dès lors, le candidat a le choix de garder la porte initialement choisie ou de changer.

a) Que devrait-il faire ?

b) Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ?

11.5 Solutions

Exercice 11.1.

a) $\frac{1}{2}$	b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{2}{3}$	d) 1
d) 0	e) $\frac{1}{2}$

Exercice 11.2. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{2}$ et $P(D) = \frac{3}{4}$.

Exercice 11.3.

a) 1	b) 6
c) 720	d) $3'628'800$
e) 1	f) Indéfini
g) $2'270'268'000$	h) Indéfini
i) $\frac{43}{3000} = 0,014\bar{3}$	j) n
k) $82,5$	l) $(n+2)(n+1)n = n^3 + 3n^2 + 2n$

Exercice 11.4. 6 drapeaux différents.

Exercice 11.5. 479'001'600 classements différents.

Exercice 11.6. 5040 manières différentes.

Exercice 11.7. 103'680 possibilités différentes.

Exercice 11.8.

CHIEN : 120	ECOLE : 60
LILLE : 20	PAPA : 6
QUEUE : 30	ANANAS : 60
COMMISSION : $226'800$	MISSISSIPPI : $34'650$

Exercice 11.9. 420 signaux différents.

Exercice 11.10. 11'880 quartés différents.

Exercice 11.11. 6'840 comités différents.

Exercice 11.12.

a) 2401 nombres différents   b) $5'764'801$ nombres différents

Exercice 11.13. 1'073'741'824 manières différentes.

Exercice 11.14. 8'145'060 manières différentes.

Exercice 11.15.

a) $77'520$ groupes
b) $27'720$ groupes
c) $77'512$ groupes

Exercice 11.16. 20 ordres différents.

Exercice 11.17. 15 droites différentes.

Exercice 11.18. 336 manières différentes.

Exercice 11.19.

a) 210 choix
b) 70 choix

Exercice 11.20.

a) 120
b) 12
c) 12
d) 48
e) 72

Exercice 11.21. 6'592'370'400 manières différentes.

Exercice 11.22. 24 essais maximum.

Exercice 11.23. 260'000 codes différents.

Exercice 11.24.

Avec répétitions : 1296 façons
Sans répétition : 360 façons

Exercice 11.25.

a) 1287 cheminements
b) 280 cheminements

Exercice 11.26. 7 heures.

Exercice 11.27. Il y a 4495 glaces différentes, donc il a raison.

Exercice 11.28. 182 matches.

Exercice 11.29. Il y a 2'598'960 mains différentes en tout.

a) $249'900$
b) $778'320$
c) 48
d) 624
e) 5148
f) 40
g) $10'240$
h) $886'656$
i) 3744

Exercice 11.30.

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{5}$
c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{3}{5}$

Exercice 11.31.

a) $\dfrac{1}{18}$ b) $\dfrac{5}{36}$

c) $\dfrac{7}{36}$ d) $\dfrac{1}{6}$

e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{11}{12}$

Exercice 11.32. $P(A) = \dfrac{1}{24}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$ et $P(C) = \dfrac{1}{12}$.

Exercice 11.33. $\dfrac{1}{22}$.

Exercice 11.34.

a) $\dfrac{1}{4^{10}} \cong 0,0000954\%$ b) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} \cong 5,63\%$

c) $18,77\%$ d) $0,04\%$

e) $5,84\%$

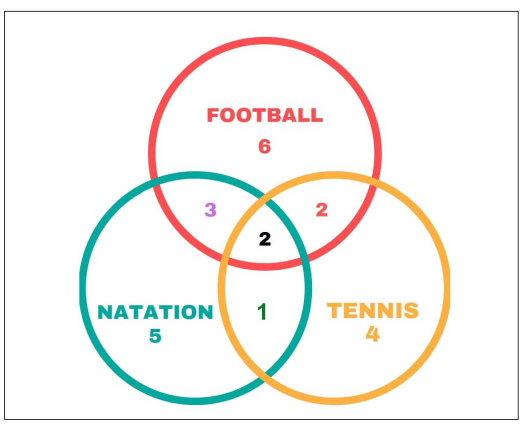
Exercice 11.35.

a) $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; ...\}$ b) $\{2; 4\}$

c) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$ d) $\{2; 4; 6; 7; 8; 9; ...\}$

e) $\emptyset$ f) $\emptyset$

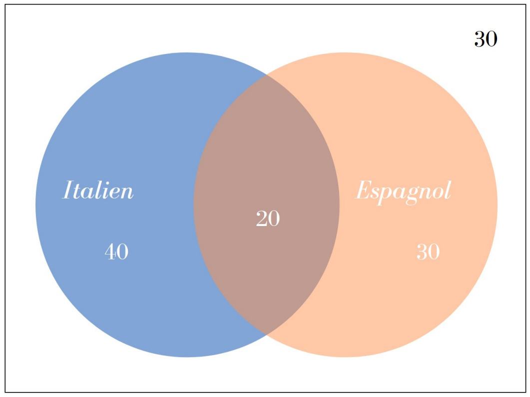
Exercice 11.36. a)



b) 11 c) 9

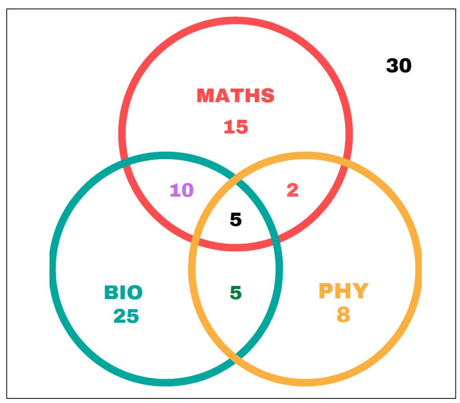
d) 2 e) 4

Exercice 11.37. Respectivement $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$.



Exercice 11.38. 25%.

Exercice 11.39. a)



b) 5 c) 48

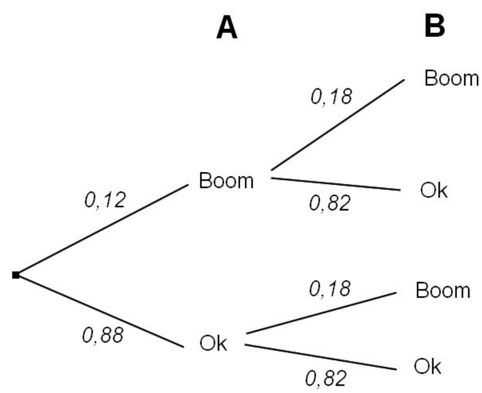
Exercice 11.40.

a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{2}{35}$

Exercice 11.41.

a) $\frac{64}{729}$ b) $\frac{1}{21}$

Exercice 11.42. a)



b) $2,16\%$ c) $97,84\%$
d) $25,68\%$

Exercice 11.43. Il faut 2 fusées.

Exercice 11.44.

a) Groupés : 85% ; Séparés : 72,25%

b) Groupés : 85% ; Séparés : 97,75%

Exercice 11.45. $\dfrac{16}{27}$.

Exercice 11.46.

a) $37,5\%$ b) 40%
c) 50%

Exercice 11.47.

a) 40% b) $66,\bar{6}\%$
c) 90%

Exercice 11.48.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$

Exercice 11.49.

a) $\dfrac{2}{5}$ b) $\dfrac{1}{6}$
c) $\dfrac{2}{11}$

Exercice 11.50. $P(A|B) = 5,97\%$ et $P(B|A) = 22,\bar{2}\%$.

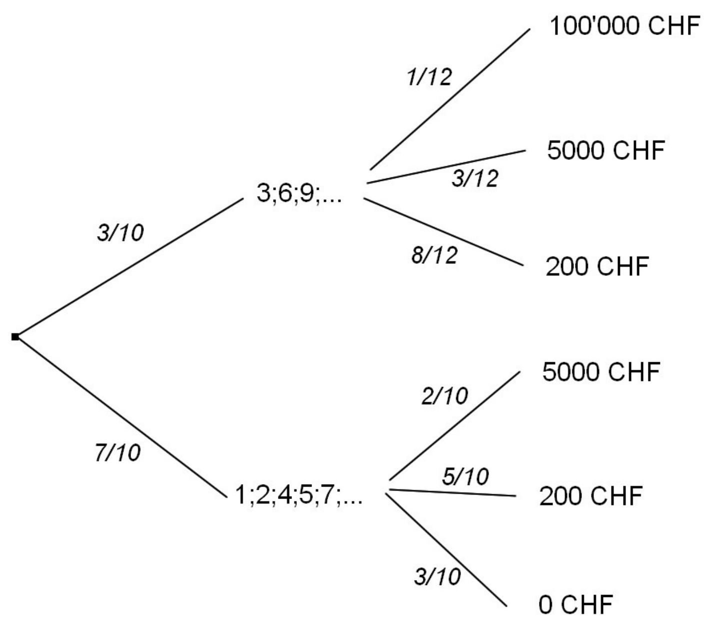
Exercice 11.51.

a) $\dfrac{1}{10}$ b) $\dfrac{2}{15}$

c) $\dfrac{1}{2}$

Exercice 11.52.

A. a)

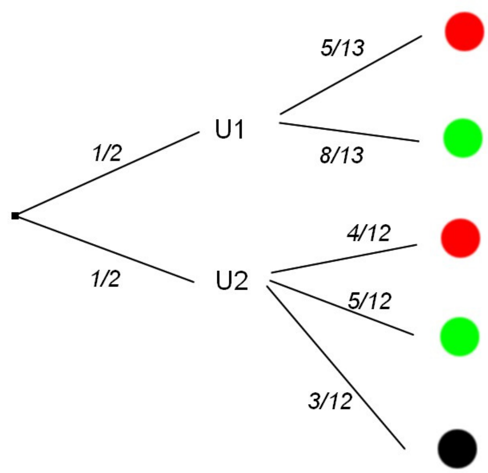


b) $\dfrac{1}{40}$ c) $\dfrac{43}{200}$

d) $\dfrac{79}{100}$

B. $\dfrac{7}{150}$

Exercice 11.53. a)



b) $\dfrac{1}{8}$ c) $\dfrac{161}{312}$

d) $\dfrac{96}{161}$ e) $\dfrac{5}{13}$

Exercice 11.54. $\dfrac{2}{3}$.

Exercice 11.55.

a) $55,2\%$ b) $42,4\%$

c) $11,3\%$ d) $7,2\%$

Exercice 11.56. 3,48%.

Exercice 11.57.

a) $0,09$ b) $0,02$

c) $0,04$ d) $0,01$

e) $0,03$ f) $0,49$

Exercice 11.58. Il a meilleur temps de changer de porte. En effet, il a 2 chances sur 3 de gagner en prenant cette décision.

11.6 Objectifs du chapitre

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de

11.1 ☐ Résoudre un problème de dénombrement à l'aide des permutations avec ou sans répétition.

11.2 ☐ Résoudre un problème de dénombrement à l'aide des combinaisons.

11.3 ☐ Résoudre un problème de dénombrement à l'aide des arrangements avec ou sans répétition.

11.4 ☐ Calculer la probabilité d'un événement à l'aide de la formule de Laplace.

11.5 ☐ Utiliser les opérations ensemblistes de base (complémentaire, union et intersection)

11.6 ☐ Construire un diagramme de Venn.

11.7 ☐ Construire le diagramme en arbre pour résoudre un problème.

11.8 ☐ Appliquer la formule des probablités conditionnelles pour résoudre un problème.

Chapitre 12

Révisions

12.1 Ensembles de nombres

Exercice 12.1. Calculer sans machine.

a) $15 + 4 \cdot 6$
b) $45 : 5 - 81 : 9$
c) $17 + 35 - 72 : 9$
d) $120 : 2 \cdot 6 : 40$
e) $67 - 48 : 8 \cdot 6$
f) $7 \cdot 8 \cdot 2 - 64 : 8$
g) $240 \cdot 10 : 5 + 17 \cdot 0$
h) $132 : 12 + 5 \cdot 4 \cdot 6$
i) $230 - 180 : 9 + 1$
j) $72 : 8 + 4 \cdot 5 - 12$
k) $3^2 + 6^2 \cdot 5 - 4 : 4$
l) $3 \cdot 7 - 48 : 4 + 3 \cdot 10$
m) $4(13 - 24 : 4) - 12$
n) $6^2 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot (5 - 2)$
o) $15 + 8 \cdot 4 - [5 \cdot 3 + (2 + 3) \cdot 4 - 2]$
p) $4 + 5 \cdot 2 - [2 \cdot (5 \cdot 4 + 1 - 21) + 2]$

Exercice 12.2. Calculer sans machine.

a) $(-5 + 5) : (3 - 2)$
b) $(34 - 45)(145 : (-5))$
c) $72 : (-8) - 15$
d) $12 - (-14 - 13) + (19 - 50)$
e) $(-24) : (-8) \cdot (-7) + (+3) \cdot (+11)$
f) $[-5 - (-3)] : [7 - (-7) \cdot (-1)]$
g) $(+3) \cdot [(-7) + (+11)] : [(-2) - (-8)]$
h) $[-11 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-2)] : [-8 - 4 \cdot (-3) - 4]$
i) $-(50 - 30) + [(3 + 9 - 13)(-1 - 2) - (-20)]$
j) $(3 - 18 + 15) - \{2 - [-5 - (-4 - 14) + 11] - 3\}$

Exercice 12.3. Calculer les expressions suivantes.

a) $-|-5|$
b) $|-3| + |-7|$
c) $|-2| \cdot (-2)$
d) $\dfrac{-15}{|-5|}$

Exercice 12.4. Calculer les expressions ci-dessous.

a) $\dfrac{17}{6} - \dfrac{5}{9} - \dfrac{1}{5}$
b) $\dfrac{6}{7} - \dfrac{3}{11} + 1$
c) $\dfrac{5}{8} - \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{5}\right)$
d) $\dfrac{7}{10} - \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{6}\right)$
e) $1 - \left(\dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{5}\right)$
f) $\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{3} - \left(2 - \dfrac{13}{9}\right)$

Exercice 12.5. Calculer et simplifier s'il y a lieu.

a) $\frac{3}{6}-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)$ b) $\left(\frac{5}{4}-\frac{9}{16}\right)-\left(\frac{5}{8}-\frac{11}{12}\right)$

c) $\left(\frac{12}{5}:13\right)\left(\frac{5}{3}-3\right)$ d) $\dfrac{2+\frac{7}{3}}{4-\frac{11}{3}}$

e) $\frac{10}{7}\cdot\frac{4}{15}+\frac{7}{6}\cdot\frac{5}{28}$ f) $\frac{13}{27}\cdot\frac{18}{5}+\frac{13}{210}\cdot\frac{28}{65}$

g) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{7}\right):\frac{5}{6}$ h) $15-3\left(-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\right)\cdot 6$

i) $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{8}{20}\right)$ j) $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{4}{5}+\frac{8}{20}$

Exercice 12.6. André joue aux fléchettes. Il tire 12 fléchettes et en place 10 dans la cible. Gérard tire 8 fléchettes et en place 5. Lequel est le plus adroit ?

Exercice 12.7. Dans la classe de M. Toubon, 3 élèves sur 21 sont malades le jeudi. Le même jour, dans la classe de Mme Robiot, 4 élèves sur 20 sont malades. Quelle est la classe qui a le rapport de malades le plus élevé ?

Exercice 12.8. Manuel achète aux soldes un home-cinéma qu'il paie 567 francs. Calculer le prix qu'il aurait payé s'il n'avait pas eu une réduction de 10%.

Exercice 12.9. Lorsqu'il va chez son cardiologue, un patient paye 23 francs pour la consultation. 70% de ce montant lui est remboursé par la sécurité sociale. Sur le montant restant à sa charge après remboursement de la sécurité sociale, sa mutuelle lui rembourse 80%. Quel pourcentage du prix de la consultation a-t-il finalement payé ?

Exercice 12.10. Calculer sans machine.

a) $\frac{9^3}{9^5}$ b) $(-6)^3\cdot(-6)^4$

c) $(-3)^7\cdot(-3)^8$ d) $2^{-3}\cdot(2^{11}:2^4)$

e) $5^3\cdot(5^2)^3$ f) $\frac{2^2\cdot 4^2}{2^3}$

Exercice 12.11. Effectuer sans calculatrice.

a) $-\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}$ b) $-\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$ c) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{2}$

Exercice 12.12. Calculer sans machine.

a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[6]{1}$

c) $\sqrt[4]{81}$ d) $\sqrt[5]{32}$

e) $\sqrt[3]{0,000001}$ f) $\sqrt[3]{0,027}$

12.2 Calcul littéral

Exercice 12.13. Effectuer et réduire les termes semblables.

a) $-4a^4 \cdot (2a - 3b^2)$

b) $-2x^2y(4xy + 2x^2y - x + 2)$

c) $(x+3) \cdot (x-2)$

d) $(2x-5) \cdot (3y-7)$

e) $3xy - 6xz + yz + 5xy + 6xz - 3yz - (-3xy + xz + 3yz)$

f) $15t - [(3t - 6u) - v] - [5u - (20t + 4v)]$

g) $5x - \{3x - [4y - (8x - 5y) + 4x]\} - 4y$

h) $7x \cdot (x-y) \cdot (x+y)$

i) $-3 + 2xy(x - 2xy) - \left\{-\frac{1}{2}x^2y - (xy + 2x)\right\}$

j) $5x^3 - x\{4 + 3[4 - 5(x-3)]\}$

k) $(2x+3) \cdot (x^2 + x - 1) - x^2 - (x^2 + 1) \cdot (x + 4)$

l) $2a \cdot (3a^2 - a) - 3b^3 \cdot (2ab - 8)$

Exercice 12.14. Effectuer à l'aide des identités remarquables.

a) $(3x-2)^2$

b) $(3x-2) \cdot (3x+2)$

c) $(3x-2y)^2$

d) $(7x-1)^2$

e) $(7x-1) \cdot (7x+1)$

f) $(4x^3+2)^2$

g) $(a+1)(a-1)^2$

h) $(2-a)^2 - (a+2)(2-a) + (a+2)^2$

Exercice 12.15. Mettre en évidence les facteurs communs.

a) $24xy + 8x$

b) $8ac^2 - 24bc^2$

c) $2rny - 4ny + 6y$

d) $xyz + x^2yz - xy^2z + 2xyz^2$

e) $4a^2b - 2a^3c + 6av$

f) $m(a-b) + n(a-b)$

g) $2(x+1)^2 + 4(x+1)$

h) $(a+b)^3 + (a+b)^2$

Exercice 12.16. Factoriser à l'aide des identités remarquables.

a) $x^2 + 2xy + y^2$

b) $x^2 + 2x + 1$

c) $x^2 - 144$

d) $9x^2 + 24x + 16$

e) $100a^2 - 9b^2$

f) $x^2 + xy + \frac{y^2}{4}$

Exercice 12.17. Factoriser les trinômes suivants.

a) $x^2 + 8x + 15$

b) $x^2 + 3x - 28$

Exercice 12.18. Effectuer si nécessaire puis simplifier au maximum.

a) $\frac{10x^2y^5}{5x^5y^2}$

b) $\frac{45(x+1)}{63(x^2-1)}$

c) $\frac{a^2b - ab}{a-1}$

d) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

e) $\frac{a^2-2a+1}{a^4-1}$

f) $\frac{(x-y)^2}{3a} : \frac{x^2-y^2}{6a}$

g) $\frac{x^2-1}{x+2} : \frac{x^2-3x+2}{x+2}$

h) $\frac{a-b}{6} + \frac{a+2b}{9}$

i) $\frac{2x-1}{3} + \frac{x-2}{15} + \frac{3x+1}{5}$

j) $\frac{5x-3b}{3a} - \frac{2y+a}{5b}$

k) $\frac{4}{(5s-2)^2} + \frac{s}{5s-2}$

l) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} + 3$

12.3 Equations

Exercice 12.19. Résoudre les équations suivantes.

a) $\dfrac{x}{3}+5=2$

b) $\dfrac{1}{3}x(x+2)=2+\dfrac{1}{3}x^2$

c) $(x+3)^2=(x+4)^2-(2x+7)$

d) $\dfrac{x}{5}-\dfrac{x}{3}+\dfrac{3x}{10}+\dfrac{7x}{2}=\dfrac{4x}{15}$

e) $(2x+1)^2+(3x+1)^2+(8x-3)^2=(7x-2)(11x-1)$

f) $3(x+5)=\dfrac{x-1}{4}$

g) $\dfrac{x(x+2)}{3}=\dfrac{x^2}{3}+2(x+1)$

h) $\dfrac{1}{2}(3x-1)-\dfrac{1}{4}(4-x)=0$

i) $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{9}{5}-\dfrac{x+3}{5}$

j) $3x-\dfrac{1}{2}(x+5)=5-\dfrac{x-3}{6}$

k) $\dfrac{3x+2}{5}-x-\dfrac{2x+5}{3}=3$

l) $5+\dfrac{1}{2}(11x-37)=\dfrac{31}{10}x+\dfrac{2}{5}(6x-40)+\dfrac{5}{2}$

Exercice 12.20. Résoudre les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} x+5y &= 47 \\ x+y &= 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x-3y &= 0 \\ x+y &= 50 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+7y &= 1 \\ y-3x &= 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-y &= 4 \\ 5x-2y &= 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{2} &= \dfrac{y+79}{4} \\ \dfrac{33x+13y}{12}-y &= \dfrac{x}{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{5}{4}x-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{4} &= 0 \\ -x-\dfrac{7-3y}{2} &= 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{x}{12}-\dfrac{1-2y}{4} &= \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{29}{10}-2+x &= -\dfrac{y}{10} \end{cases}$

h) $\begin{cases} -\dfrac{x+y}{9} &= \dfrac{1}{27}(y+2) \\ \dfrac{-x+1}{10}-\dfrac{y}{6}+\dfrac{1}{5} &= \dfrac{8}{15} \end{cases}$

Exercice 12.21. Résoudre les équations suivantes à l'aide de la formule de Viète ou à l'aide de toute autre méthode.

a) $x^2-6x+5=0$

b) $4x^2+4x=-1$

c) $x(x-8)+7=0$

d) $\dfrac{9}{x}-\dfrac{x}{3}=2$

e) $(x+4)^2-x-2-3x^2=0$

f) $(x+1)(x+2)=(x+2)(x-3)-(2x-1)^2$

Exercice 12.22. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $x^4-25x^2+144=0$

b) $x^4+5x^2-36=0$

c) $x^2+\dfrac{18}{x^2}-11=0$

d) $x^6+2x^3+1=0$

Exercice 12.23. Résoudre les équations suivantes.

a) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3-x^2}$

b) $x-1+\sqrt{x}=1$

c) $x+\sqrt{5x+10}=8$

d) $\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}=2$

Exercice 12.24. On achète sept boîtes de caramels identiques. En payant avec un billet de 10 francs, on rend 1,60 franc. Combien coûte une boîte de caramels ?

Exercice 12.25. Trouver un nombre tel que la somme de ses quotients par deux, par trois et par quatre soit égale à 130.

Exercice 12.26. Combien faut-il mélanger de vin à 6 francs le litre avec du vin à 9 francs le litre pour obtenir 60 litres de vin valant 480 francs ?

Exercice 12.27. Le vol de Los Angeles à Albuquerque, avec une escale à Phoenix, coûte 90 francs de Los Angeles à Phoenix et 120 francs de Los Angeles à Albuquerque. Au total, 185 passagers sont montés dans l'avion à Los Angeles, et la recette totale a été de 21'000 francs. Combien de passagers sont descendus de l'avion à Phoenix ?

Exercice 12.28. Il y a 2 ans, la somme des âges d'une mère et de sa fille était de 90 ans. Il y a 12 ans la mère avait 2 ans de moins que le double de l'âge de sa fille. Quels sont aujourd'hui les âges de ces 2 personnes ?

Exercice 12.29. Considérons un rectangle de largeur x et de longueur y. Si on augmente la largeur de 3 cm et on diminue la longueur de 2 cm, son aire reste la même. C'est également le cas si on diminue la largeur de 2 cm et on augmente la longueur de 3 cm. Déterminer les dimensions du rectangle

Exercice 12.30. Une cagnotte à fonds perdu doit être partagée entre les membres d'une société qui organise une course. Quatre personnes ne peuvent participer à la course, ce qui augmente la part des autres de 50 francs. Combien de personnes cotisent à la cagnotte si le capital que contient cette dernière s'élève à 4'000 francs ?

12.4 Fonctions

Exercice 12.31. Voici un tableau de valeurs représentant une fonction f.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	2	1	-3	-4	5	3	4	-4

a) Quelle est l'image de 3 par la fonction f ?

b) Quel nombre a pour image -3 par la fonction f ?

c) Quels nombres ont la même image par la fonction f ?

Exercice 12.32. Soit la fonction f définie par $f(x) = 4 - x^2$. Calculer

a) $f(0)$ b) $f(\sqrt{2})$

c) $3f(x)$ d) $f(3x)$

e) $f(-x)$ f) $f(\sqrt{2} - 2)$

Exercice 12.33. Représenter graphiquement les fonctions suivantes.

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = -2 + \frac{4}{3}x$

12.5 Fonctions du premier degré

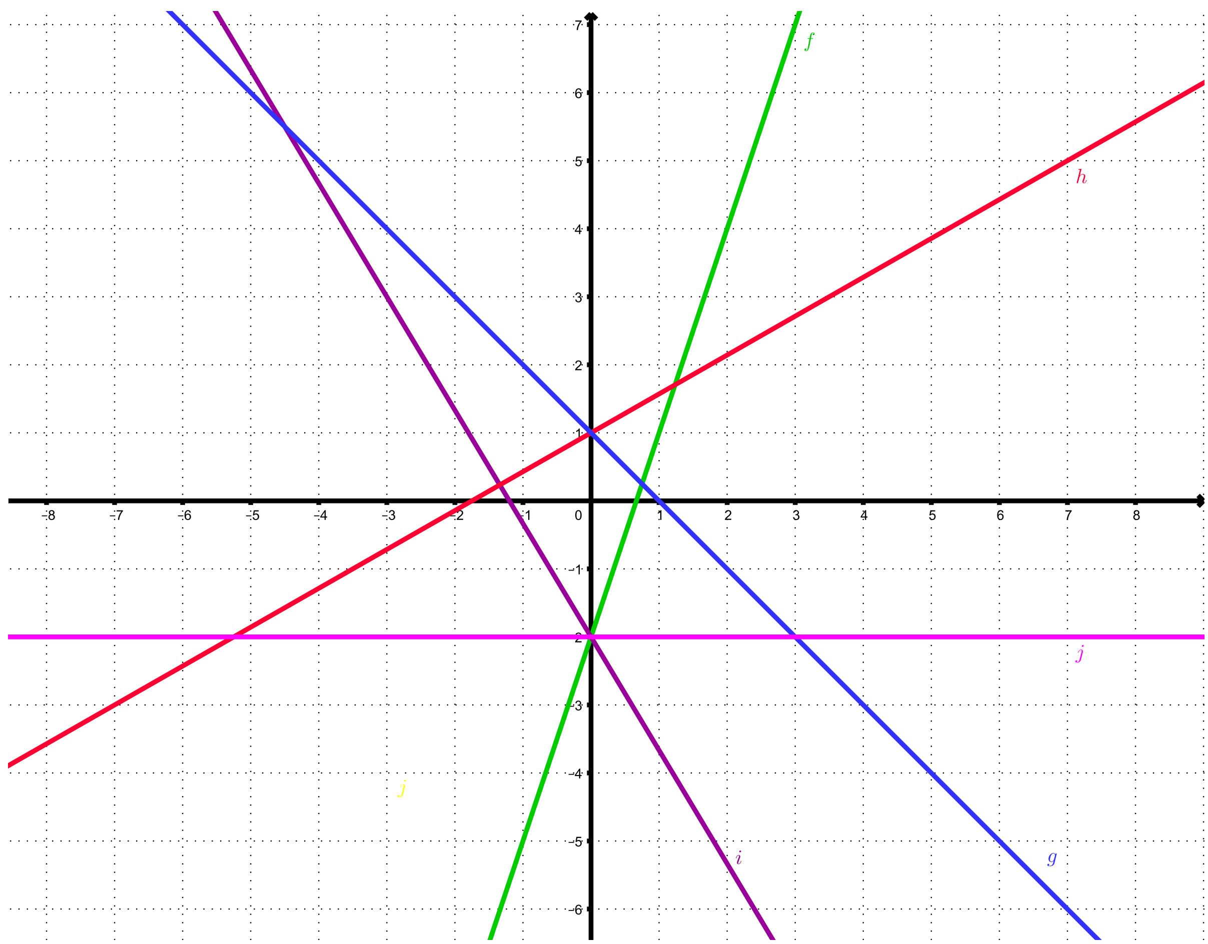
Exercice 12.34. Tracer les droites ci-dessous dans un système d'axes.

a) $y = \dfrac{5}{3}x - 2$ b) $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$

c) $6x - 2y + 4 = 0$ d) $5x + 2y = 2$

Exercice 12.35. Déterminer l'expression fonctionnelle de la fonction f qui passe par les points $A(5;1)$ et $B(1;-4)$.

Exercice 12.36. Déterminer l'équation de chacune des droites suivantes.

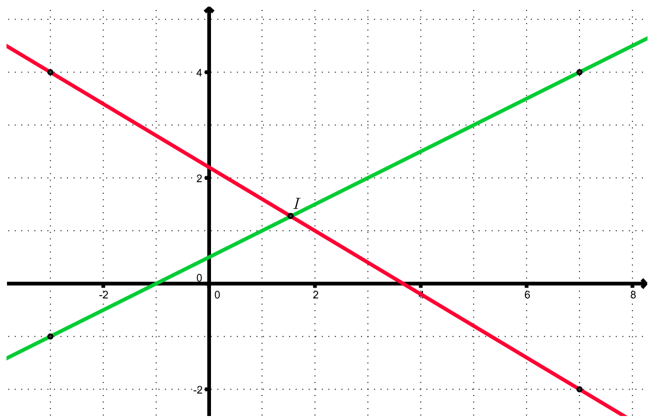


Exercice 12.37. Trouver l'équation de la droite passant par le point $P(6;3)$ et perpendiculaire à la droite $3x + 2y = 6$.

Exercice 12.38. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des fonctions f et g suivantes.

$$f(x) = \frac{3}{5}x - 2 \text{ et } g(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

Exercice 12.39. Soit la figure ci-dessous.



a) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des deux droites dessinées ci-dessus.

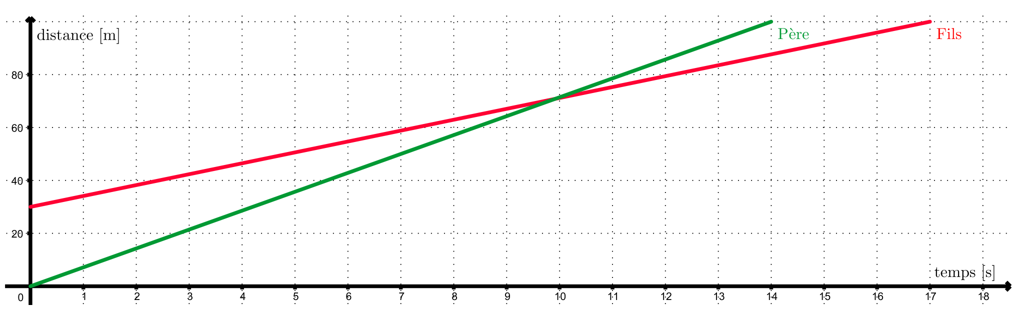
b) Trouver la fonction f dont le graphe est une droite qui passe par l'origine et par le point I.

c) Trouver la fonction g dont le graphe est une droite parallèle au graphe de f passant par le point $P(2; -1)$.

Exercice 12.40. Donner les coordonnées des points d'intersection de chacune des droites suivantes avec les axes.

a) $y = 4x - 8$ b) $3x - 2y = 6$

Exercice 12.41. Un père défie son fils au 100 m et lui laisse un certain nombre de mètres d'avance. Les graphes simplifiés de cette course sont donnés ci-dessous.



a) Combien de mètres d'avance le père laisse-t-il au fils ?

b) Qui a gagné ? Avec combien de secondes d'avance ?

c) Quelle distance les sépare lorsque le vainqueur franchit la ligne d'arrivée ?

d) Quelle est la vitesse (en m/s) du père ? Celle du fils ?

e) A quoi correpond concrètement la pente de chacune des droites ?

f) Le père et le fils ont-ils été côte à côte ? Si oui, quelle distance avait parcourue le père ?

Exercice 12.42. Un travail écrit comporte 17 points. La note 1 correspond à 0 point et la note 6 à 17 points. Déterminer la fonction permettant de calculer la note y en fonction du nombre de points x.

Exercice 12.43. Dans le village de Courvelier, chaque citoyen reçoit une facture relative à sa consommation d'eau, qui s'établit ainsi :

— une taxe annuelle de 40 francs ;

— un coût variable correspondant à 2,5 francs par m^3 d'eau consommée.

a) Exprimer la fonction qui décrit, dans cette commune, la facture annuelle d'eau y en fonction de la consommation x.

b) En 2017, Noah, citoyen de Courvelier, est un sportif endurci et se douche régulièrement dans les salles de sport. Ainsi, sa consommation à son domicile est plutôt modérée. Au cours de cette année, Noah a consommé 65 m^3 d'eau. Quel a été le montant de sa facture ?

Mia vit à Montébert. Elle a un travail stressant et apprécie de prendre régulièrement un bain, ce qui fait que sa consommation d'eau est plutôt élevée. En 2016, Mia a payé une facture de 270 francs pour une consommation de 100 m^3 d'eau, alors qû'en 2017, sa facture d'eau s'est élevée à 253 francs pour 90 m^3 d'eau consommée.

c) Exprimer la fonction qui décrit la facture annuelle d'eau de Montébert en fonction de l'eau consommée.

d) En admettant que Noah et Mia utilisent, au cours d'une année, une quantité d'eau identique, pour quelle consommation vont-ils payer le même tarif ?

e) Courvelier et Montébert envisagent de fusionner. S'agissant de la consommation d'eau, ces communes demandent à leurs concitoyens leur avis quant au tarif d'eau à mettre en place. Quel tarif communal va privilégier Noah ? Et Mia ?

Exercice 12.44. Un théâtre propose les trois tarifs ci-dessous :

— 20 francs par représentation.

— Une carte privilège à 48 francs donnant droit à une réduction de 30%.

— Un abonnement annuel de 300 francs permettant d'entrer librement à chaque représentation.

a) Exprimer les fonctions qui décrivent le coût annuel y en fonction du nombre de représentations x auxquelles un amateur de théâtre va assister selon les trois formules.

b) Eddy privilégie les comédies. Il pense aller en voir 20 en une année. Combien paiera-t-il s'il opte pour le tarif 2 ? Dans ce cas, est-ce qu'un autre tarif serait préférable ?

c) A partir de combien, et jusqu'à combien de représentations le tarif 2 est-il le plus avantageux ?

12.6 Fonctions du deuxième degré

Exercice 12.45. Déterminer les coordonnées des intersections avec les axes et celles du sommet de chacune des fonctions f ci-dessous et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

a) $y = x^2 - 5x + 6$ b) $y = -2(x + 3)(x - 4)$

c) $y = -3(x - 2)^2 - 1$ d) $y = x^2 + 9x + 18$

e) $y = -3(x - 2)^2$ f) $y = 4x^2 - 4x - 8$

Exercice 12.46. Le risque de développer des problèmes de santé peut être évalué par la fonction

$$R(i) = 0,002i^2 - 0,08i + 0,85$$

dans laquelle i désigne l'indice de masse corporelle. Cet indice s'exprime au moyen de la relation suivante :

$$i = \frac{\text{Masse en kg}}{(\text{Taille en mètres})^2}.$$

Une personne mesure 1,75 m et pèse 80 kg.

a) Quel est son indice de masse corporelle ?

b) Quel est son poids idéal ?

Exercice 12.47. Soient les paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations

$$\mathcal{P}_1 : y = x^2 + x - 6;$$

$$\mathcal{P}_2 : y = -x^2 + x + 2.$$

Déterminer

a) Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}_1$ avec l'axe O_x.

b) Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}_2$ avec l'axe O_x.

c) Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}_1$ avec l'axe O_y.

d) Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}_2$ avec l'axe O_y.

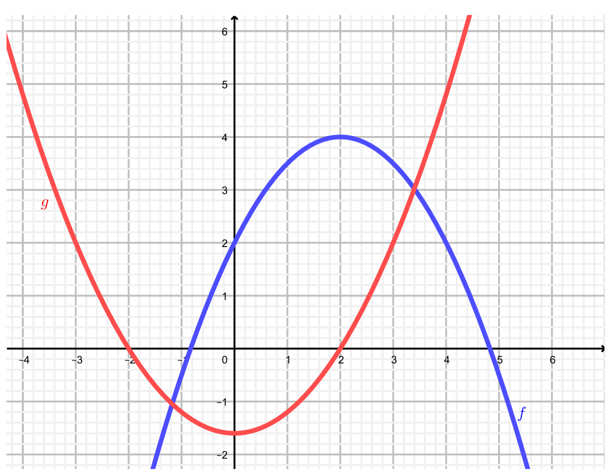
e) Les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}_1$.

f) Les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}_2$.

g) Les coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice 12.48. Déterminer l'expression fonctionnelle de la fonction f de sommet $S(-6; -3)$ passant par le point $A(5; -1)$.

Exercice 12.49. Déterminer la forme polynômiale de chacune des paraboles ci-dessous.



Exercice 12.50. Quel est le produit maximal de deux nombres si leur somme vaut 35 ?

Exercice 12.51. Dans un bowling, les clients jouent habituellement au total 3'000 parties par jour au prix de 2 francs la partie. Considérant qu'une réduction de 5 centimes engendre une augmentation de 100 parties jouées, déterminer le prix à fixer pour maximiser le bénéfice et déterminer le montant de celui-ci.

Exercice 12.52. Un match de tennis très attendu aura lieu dans un stade pouvant accueillir jusqu'à 6'300 personnes. Une ancienne étude a démontré que le nombre de spectateurs x dépend du prix d'entrée p en francs selon la relation

$$x = 6'300 - 50p.$$

a) Trouver le prix du billet s'il y a 4'800 personnes.
b) Trouver l'équation du revenu généré par le stade.
c) Quel est le prix du billet permettant de réaliser un revenu maximal ?

Exercice 12.53. L'entreprise d'horlogerie Rolega va mettre sur le marché un nouveau modèle de montre, la Rowatch. Pour la production de la Rowatch, cette entreprise doit effectuer un investissement initial d'un million de francs auquel s'ajoute 80 francs pour chaque Rowatch fabriquée. Une étude de marché a permis de dire que la demande x de Rowatch en fonction du prix de vente au public p est donnée par

$$x = 80'000 - 200p.$$

a) Quel est le prix unitaire de vente au public qui assure un bénéfice maximal ?
b) Combien de Rowatch seraient vendues à ce prix-là ?
c) Quel bénéfice maximal la marque Rolega pourra-t-elle dégager de la vente des Rowatch ?
d) Après une année Rolega prévoit de liquider les Rowatch invendues au prix assurant le seuil de rentabilité inférieur. A quel prix (arrondi aux 5 centimes) sera liquidé le dernier stock de Rowatch ?

12.7 Fonctions exponentielles et logarithmes

Exercice 12.54. Résoudre les équations suivantes.

a) $5^{x+\frac{1}{4}} = 25$ b) $3^{x^2+2} = 9^{x^2-x+5}$
c) $25^x = 125^{x-2}$ d) $\left(3^{x-1}\right)^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

Exercice 12.55. Calculer les logarithmes suivants.

a) $\log_{10}(1'000'000'000)$ b) $\log_8(1)$
c) $\log_{11}\left(\dfrac{1}{121}\right)$ d) $\log_4(2)$

Exercice 12.56. Résoudre les équations ci-dessous.

a) $\log_{10}(3x-7) = \log_{10}(5x-9)$ b) $\log_3(x-6) = 2$
c) $\log_9(x) = \dfrac{1}{2}$ d) $\log_{10}(x^2-7) = 2 \cdot \log_{10}(x+3)$

Exercice 12.57. Un biologiste sait que la population canine d'une ville croît selon une fonction exponentielle. Une enquête faite il y a cinq ans montre qu'il y avait alors 2'800 chiens. Aujourd'hui, on en compte 5'160. Combien de chiens peupleront cette ville dans dix ans ?

Exercice 12.58. Un étang contenait 1'000 truites trois mois auparavant. On estime qu'il en reste actuellement 600. Dans combien de temps y aura-t-il moins de 150 truites ?

Exercice 12.59. Établi de longue date, FEDERALPHONE, un opérateur de téléphonie mobile en mains de l'État, a vu sa clientèle passer de 12'212'000 abonnés en l'an 2000 à 8'962'000 abonnés en 2005. Entré sur le marché à la fin des années nonante, le groupe MOONRISE a, quant à lui, augmenté l'effectif de ses clients de 4'500'000 à 6'924'000 durant la même période.

a) Déterminer, en %, le taux de variation annuel de la clientèle de chacune de ces sociétés.

b) En quelle année doit-on s'attendre à ce que le nombre de clients de MOONRISE dépasse l'effectif des abonnés de FEDERALPHONE ?

Exercice 12.60. Si 10 g de sel sont ajoutés à de l'eau, alors la quantité $q(t)$ de sel (en g) qui reste non dissoute après t minutes est donnée par la formule

$$q(t) = 10 \cdot 0,8^t.$$

Quelle quantité subsiste-t-il après 5 minutes ? Estimer le temps qu'il faut pour que 9 g du sel soit dissous.

12.8 Inéquations

Exercice 12.61. Résoudre les inéquations suivantes et donner la solution sous forme d'intervalle.

a) $x + 5(x+1) > 4(2-x) + 2$

b) $-\dfrac{2}{3}x + 3 \geq 0$

c) $\dfrac{15x-4}{2} < 1 + 6x$

d) $\dfrac{7}{2}x - \dfrac{x-1}{2} \leq x + \dfrac{3}{4}$

e) $1 < \dfrac{2}{3}x + 1 < 2$

f) $4 > \dfrac{2-3x}{7} \geq -2$

Exercice 12.62. Résoudre les systèmes d'inéquations suivantes et donner la solution sous forme d'intervalle.

a) $\left\{ \begin{array}{rcl} (x-1)(x-2) & \geq & x^2 - 7 \\ (x-2)(x-3) & < & x^2 + 1 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 1 & > & x + 3 \\ \dfrac{4x}{3} + 3 & < & \dfrac{x+7}{2} \end{array} \right.$

Exercice 12.63. Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivantes.

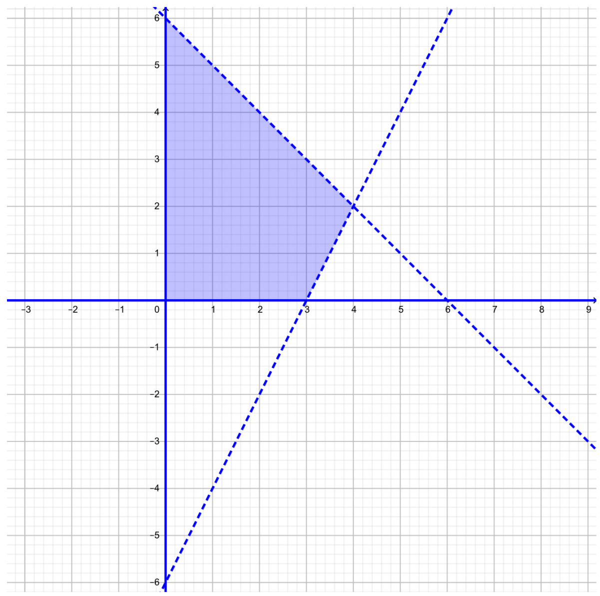
a) $\left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y + 6 & > & 0 \\ 3x - 2y + 11 & < & 0 \\ 2x - y - 9 & \leq & 0 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 5y & < & 15 \\ y - x & \leq & 0 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y + 15 & > & 0 \\ 2x + 3y - 12 & < & 0 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 4y & \leq & 8 \\ x - y & \geq & 3 \\ y & \geq & 0 \end{array} \right.$

Exercice 12.64. A quel système d'inéquation la figure ci-dessous correspond-elle ?



12.9 Programmation linéaire

Exercice 12.65. Une petite communauté désire acquérir des camionnettes et des petits bus usagés pour son système de transports publics. La communauté ne peut pas dépenser plus de 200'000 francs pour les véhicules et pas plus de 1'000 francs par mois pour l'entretien. Les camionnettes coûtent 20'000 francs pièce et en moyenne 200 francs par mois pour l'entretien. Les coûts approximatifs correspondants pour chaque bus sont de 40'000 francs et 150 francs par mois. Sachant que chaque camionnette peut transporter 15 passagers et chaque bus 25 voyageurs, trouver le nombre de camionnettes et de bus à acheter pour que la capacité en passagers du système soit maximale.

Exercice 12.66. Un fabricant de radios fait un bénéfice de 25 francs sur le modèle de luxe et de 30 francs sur le modèle ordinaire. L'entreprise désire produire chaque jour au moins 80 modèles de luxe et 100 modèles ordinaires. Pour maintenir une qualité élevée, la production journalière ne devrait pas dépasser 200 radios. Combien de radios de chaque type faudrait-il fabriquer quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximum ?

Exercice 12.67. Un club d'investisseur a 30'000 francs pour investir dans deux projets A et B. On ne peut investir dans chaque projet que par tranches de 1'000 francs. Le taux de rendement du projet A se situe aux alentours de 12% et celui du projet B de 7%. La politique du club est d'investir au moins deux fois plus dans le projet B qui est moins risqué que dans le projet A. Combien de parts le club doit-il investir dans chaque projet pour maximiser son gain espéré ?

12.10 Introduction à la statistique descriptive

Exercice 12.68. On a demandé aux enfants de trois classes de 3ème année primaire quel était leur sport d'hiver préféré. On a obtenu les données brutes suivantes :

Hockey	Glissade	Hockey	Hockey	Hockey
Hockey	Ski	Hockey	Ski	Raquette
Patinage	Ski	Ski	Hockey	Ski
Ski	Hockey	Ski	Raquette	Ski
Patinage	Ski	Hockey	Raquette	Raquette
Ski	Glissade	Hockey	Glissade	Glissade
Hockey	Glissade	Hockey	Hockey	Hockey
Ski de fond	Hockey	Patinage	Patinage	Hockey
Ski	Hockey	Ski	Raquette	Patinage
Hockey	Glissade	Ski	Ski	Ski de fond
Hockey	Patinage	Ski	Patinage	Hockey
Hockey	Patinage	Ski	Patinage	Raquette

a) Identifier la population.

b) Caractériser la variable statistique. Déterminer le type de la variable.

c) Donner l'ensemble des modalités.

d) Construire le tableau des distributions des effectifs et des fréquences, puis le diagramme en secteurs.

Exercice 12.69. La série ci-dessous représente l'âge de 50 joueurs d'un club de tennis.

33	30	19	29	17	31	33	29	30	28
32	22	27	27	23	31	28	26	20	34
30	35	27	32	26	29	27	22	28	18
23	31	36	24	27	30	35	31	40	31
41	25	30	38	25	29	36	28	39	28

a) Organiser cette série statistique en 5 classes d'amplitude égale, en prenant $16,5$ comme borne inférieure. Calculer ensuite les fréquences et les fréquences cumulées.

b) Représenter l'histogramme correspondant ainsi que le polygone des fréquences.

c) Construire le polygone des fréquences cumulées.

Exercice 12.70. On a mesuré la taille des 50 professeurs d'une école.

Taille en cm	Nombre de professeurs
$[130; 140[$	2
$[140; 150[$	4
$[150; 160[$	7
$[160; 170[$	8
$[170; 180[$	15
$[180; 190[$	10
$[190; 200[$	4

Calculer la moyenne et déterminer la classe médiane et la classe modale.

Exercice 12.71. Dans une province de l'Atlantique, on a pêché des truites arc-en-ciel dont on mesure la longueur (en cm) avant de les remettre à l'eau. On obtient la série statistique suivante.

Longueurs	Effectifs
$]10;20]$	12
$]20;25]$	28
$]25;30]$	41
$]30;35]$	22
$]35;40]$	18

a) Représenter l'histogramme de cette série, de même que les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.

b) Déterminer la classe modale, la classe médiane et calculer la moyenne arithmétique.

c) Déterminer la variance et l'écart-type.

d) Des mesures effectuées une année auparavant ont débouché sur une moyenne de 32 cm avec un écart-type de 7 cm. Laquelle des deux populations présente la plus forte dispersion ?

12.11 Probabilités

Exercice 12.72. Dans un département français donné, chaque véhicule automobile est muni d'une plaque minéralogique comportant 4 chiffres et 2 lettres. Combien de véhicules peut-on ainsi immatriculer dans ce département ?
(En réalité quelques couples de lettres tels que DA, DB, TT ou WW sont réservés à certaines catégories de véhicules).

Exercice 12.73. Un étudiant a l'obligation de choisir 2 cours à options parmi les 12 que propose son école.

a) Combien de choix différents peut-il faire ?

b) Qu'en est-il si deux de ces cours ont lieu en même temps ?

Exercice 12.74. Dix chevaux participent à une course soumise à des paris consistant à deviner le quarté gagnant. Calculer la probabilité des événements suivants :

$$\begin{aligned} A &= \text{"deviner le quarté gagnant"}; \\ B &= \text{"deviner le tiercé gagnant"}; \\ C &= \text{"deviner le quarté dans le désordre"}; \\ D &= \text{"deviner au moins le deuxième arrivé"}. \end{aligned}$$

Exercice 12.75. On jette deux dés et on observe la face que présente chaque dé. On considère les événements

$$\begin{aligned} A &= \text{"la somme des dés est impaire"}; \\ B &= \text{"au moins un des dés montre 1"}; \\ C &= \text{"la somme des dés vaut 5"}. \end{aligned}$$

a) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$;

b) En déduire la probabilité des événements $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $A\cap^c B$, $A\cap B\cap C$, $A\cup B$, $A\cup C$ et $B\cup C$.

12.12 Solutions

Exercice 12.1.

a) 39	b) 0
c) 44	d) 9
e) 31	f) 104
g) 480	h) 131
i) 211	j) 17
k) 188	l) 39
m) 16	n) 51
o) 14	p) 12

Exercice 12.2.

a) 0	b) 319
c) -24	d) 8
e) 12	f) Impossible
g) 2	h) Indéterminé
i) 3	j) 25

Exercice 12.3.

a) -5	b) 10
c) -4	d) -3

Exercice 12.4.

a) $\dfrac{187}{90}$	b) $\dfrac{122}{77}$
c) $\dfrac{19}{40}$	d) $-\dfrac{29}{30}$
e) $\dfrac{11}{45}$	f) $-\dfrac{1}{18}$

Exercice 12.5.

a) $\dfrac{5}{12}$	b) $\dfrac{47}{48}$
c) $-\dfrac{16}{65}$	d) 13
e) $\dfrac{33}{56}$	f) $\dfrac{44}{25}$
g) $\dfrac{1}{7}$	h) $\dfrac{33}{2}$
i) $-\dfrac{1}{10}$	j) $\dfrac{1}{3}$

Exercice 12.6. André a été le plus adroit.

Exercice 12.7. La classe de Mme Robiot.

Exercice 12.8. 630 francs.

Exercice 12.9. Il a payé 6% du prix.

Exercice 12.10.

a) 9^{-2}
b) $(-6)^7 = -6^7$
c) $(-3)^{15} = -3^{15}$
d) 2^4
e) 5^9
f) 2^3

Exercice 12.11.

a) $-\dfrac{2}{5}$
b) $-\dfrac{4}{25}$
c) $\dfrac{25}{4}$

Exercice 12.12.

a) -2
b) 1
c) 3
d) 2
e) $0,01$
f) $0,3$

Exercice 12.13.

a) $-8a^5 + 12a^4b^2$
b) $-8x^3y^2 - 4x^4y^2 + 2x^3y - 4x^2y$
c) $x^2 + x - 6$
d) $6xy - 14x - 15y + 35$
e) $11xy - xz - 5yz$
f) $32t + u + 5v$
g) $5y - 2x$
h) $7x^3 - 7xy^2$
i) $-4x^2y^2 + \dfrac{5}{2}x^2y + xy + 2x - 3$
j) $5x^3 + 15x^2 - 61x$
k) $x^3 - 7$
l) $6a^3 - 2a^2 - 6ab^4 + 24b^3$

Exercice 12.14.

a) $9x^2 - 12x + 4$
b) $9x^2 - 4$
c) $9x^2 - 12xy + 4y^2$
d) $49x^2 - 14x + 1$
e) $49x^2 - 1$
f) $16x^6 + 16x^3 + 4$
g) $a^3 - a^2 - a + 1$
h) $3a^2 + 4$

Exercice 12.15.

a) $8x(3y + 1)$
b) $8c^2(a - 3b)$
c) $2y(rn - 2n + 3)$
d) $xyz(1 + x - y + 2z)$
e) $2a(2ab - a^2c + 3v)$
f) $(a - b)(m + n)$
g) $2(x + 1)(x + 3)$
h) $(a + b)^2(a + b + 1)$

Exercice 12.16.

a) $(x + y)^2$
b) $(x + 1)^2$
c) $(x + 12)(x - 12)$
d) $(3x + 4)^2$
e) $(10a + 3b)(10a - 3b)$
f) $\left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2$

Exercice 12.17.

a) $(x+3)(x+5)$ b) $(x+7)(x-4)$

Exercice 12.18.

a) $\dfrac{2y^3}{x^3}$ b) $\dfrac{5}{7(x-1)}$

c) ab d) $\dfrac{x-2}{x+2}$

e) $\dfrac{a-1}{(a^2+1)(a+1)}$ f) $\dfrac{2(x-y)}{x+y}$

g) $\dfrac{x+1}{x-2}$ h) $\dfrac{5a+b}{18}$

i) $\dfrac{20x-4}{15}$ j) $\dfrac{25bx-15b^2-6ay-3a^2}{15ab}$

k) $\dfrac{5s^2-2s+4}{(5s-2)^2}$ l) $\dfrac{3x^2}{x^2-1}$

Exercice 12.19.

a) $x=-9$ b) $x=3$

c) Infinité de solutions d) $x=0$

e) $x=1$ f) $x=-\dfrac{61}{11}$

g) $x=-\dfrac{3}{2}$ h) $x=\dfrac{6}{7}$

i) $x=1$ j) $x=3$

k) $x=-4$ l) Infinité de solutions

Exercice 12.20.

a) $(x;y)=(7;8)$ b) $(x;y)=(15;35)$

c) $(x;y)=(-2;1)$ d) $(x;y)=(3;5)$

e) $(x;y)=(-1;27)$ f) $(x;y)=(1;3)$

g) $(x;y)=(-1;1)$ h) $(x;y)=(6;-5)$

Exercice 12.21.

a) $x=1$ et $x=5$ b) $x=-\dfrac{1}{2}$

c) $x=1$ et $x=7$ d) $x=-9$ et $x=3$

e) $x\cong-1,42$ et $x\cong 4,92$ f) Pas de solution

Exercice 12.22.

a) $x=3, x=-3, x=4$ et $x=-4$ b) $x=2$ et $x=-2$

c) $x=3, x=-3, x=\sqrt{2}$ et $x=-\sqrt{2}$ d) $x=-1$

Exercice 12.23.

a) $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$

b) $x = 1$

c) $x = 3$

d) $x = 3$

Exercice 12.24. $1,20$ franc.

Exercice 12.25. Le nombre est 120.

Exercice 12.26. Il doit mélanger 20 litres de vin à 6 francs et 40 litres de vin à 9 francs.

Exercice 12.27. 40 passagers.

Exercice 12.28. 58 et 36 ans.

Exercice 12.29. 6 cm sur 6 cm.

Exercice 12.30. 20 personnes.

Exercice 12.31.

a) 4.

b) -1.

c) 1 et -4 ; 0 et 4.

Exercice 12.32.

a) 4

b) 2

c) $12 - 3x^2$

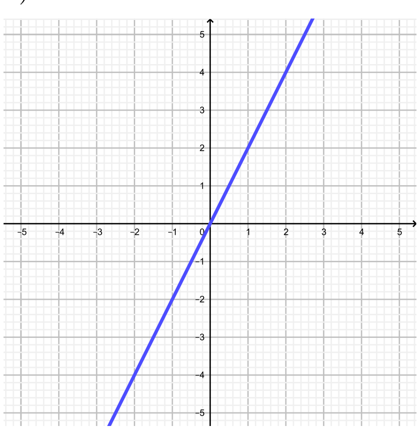
d) $4 - 9x^2$

e) $4 - x^2$

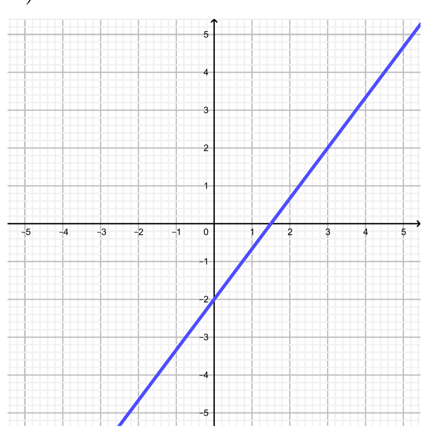
f) $4\sqrt{2} - 2$

Exercice 12.33.

a)

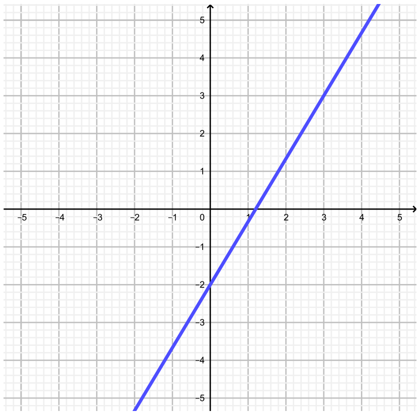


b)

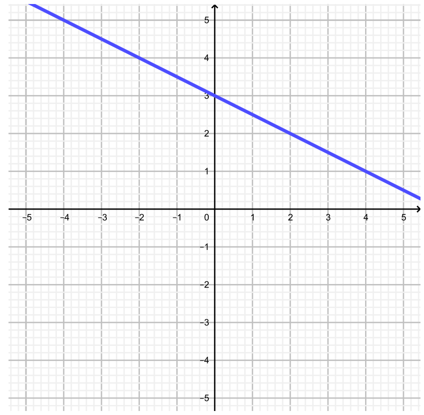


Exercice 12.34.

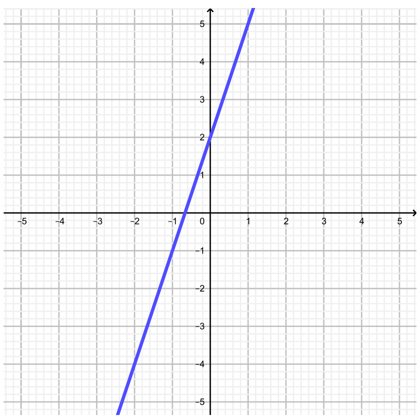
a)



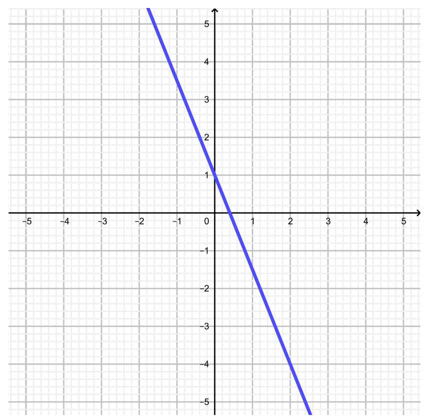
b)



c)



d)



Exercice 12.35. $f(x) = \frac{5}{4}x - \frac{21}{4}$.

Exercice 12.36.

$f(x) = 3x - 2.$

$g(x) = -x + 1.$

$h(x) = \frac{4}{7}x + 1.$

$i(x) = -\frac{5}{3}x - 2.$

$j(x) = -2.$

Exercice 12.37. $y = \frac{2}{3}x - 1.$

Exercice 12.38. $I(30; 16)$

Exercice 12.39.

a) $I\left(\frac{17}{11};\frac{14}{11}\right)$, les deux fonctions représentées sont $y=-\frac{3}{5}x+\frac{11}{5}$ et $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

b) $f(x)=\frac{14}{17}x$.

c) $g(x)=\frac{14}{17}x-\frac{45}{17}$.

Exercice 12.40.

a) $I_1(2;0)$ et $I_2(0;-8)$

b) $I_1(2;0)$ et $I_2(0;-3)$

Exercice 12.41.

a) 30 m.

b) Le père a gagné avec 3 secondes d'avance.

c) Environ $12,35$ m.

d) $v_{\text{père}}\cong 7,14$ m/s et $v_{\text{fils}}\cong 4,12$ m/s.

e) Elle correspond aux vitesses respectives.

f) Environ $70,83$ m.

Exercice 12.42. $y=\frac{5}{17}x+1$.

Exercice 12.43.

a) $y_C=2,5x+40$.

b) 202,5 francs.

c) $y_M=1,7x+100$.

d) 75 m^3.

e) Ils soutiendront le tarif en vigueur dans leurs villages respectifs.

Exercice 12.44.

a) $y_1=20x$, $y_2=14x+48$ et $y_3=300$.

b) Avec le tarif 2, il paiera 328 francs. La troisième proposition est meilleure vu qu'il ne paiera que 300 francs.

c) Entre 8 et 18 représentations.

Exercice 12.45.

a) $I_1\,(2;0)\,, I_2\,(3;0)\,, I_3\,(0;6)$ et $S\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{4}\right)$, minimum

b) $I_1\,(-3;0)\,, I_2\,(4;0)\,, I_3\,(0;24)$ et $S\left(\frac{1}{2};\frac{49}{2}\right)$, maximum

c) $I\,(0;-13)$ et $S(2;-1)$, maximum

d) $I_1\,(-6;0)\,, I_2\,(-3;0)\,, I_3\,(0;18)$ et $S\left(-\frac{9}{2};-\frac{9}{4}\right)$, minimum

e) $I_1\,(2;0)\,, I_2(0;-12)$ et $S(2;0)$, maximum

f) $I_1\,(-1;0)\,, I_2\,(2;0)\,, I_3\,(0;-8)$ et $S\left(\frac{1}{2};-9\right)$, minimum

Exercice 12.46.

a) Environ 26.12.

b) $61,25$ kg.

Exercice 12.47.

a) $I_1(-3;0)$ et $I_2(2;0)$.

b) $I_1(2;0)$ et $I_2(-1;0)$.

c) $I(0;-6)$.

d) $I(0;2)$.

e) $S\left(-\frac{1}{2};-\frac{25}{4}\right)$.

f) $S\left(\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right)$.

g) $I_1(-2;-4)$ et $I_2(2;0)$.

Exercice 12.48. $f(x) = \dfrac{2}{121}(x+6)^2 - 3$.

Exercice 12.49. $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ et $g(x) = \dfrac{2}{5}x^2 - \dfrac{8}{5}$.

Exercice 12.50. $\dfrac{35}{2}$ et $\dfrac{35}{2}$. Le produit vaut alors $\dfrac{1225}{4}$.

Exercice 12.51. 1,75 franc par partie et 6'125 francs de bénéfice.

Exercice 12.52.

a) 30 francs.

b) $R = -50p^2 + 6'300p$.

c) 63 francs.

Exercice 12.53.

a) 240 francs.

b) 32'000 montres.

c) 4'120'000 francs.

d) 96,45 francs.

Exercice 12.54.

a) $x = \dfrac{7}{4}$ b) Pas de solution

c) $x = 6$ d) $x = \dfrac{3}{2}$

Exercice 12.55.

a) 9 b) 0

c) -2 d) $\dfrac{1}{2}$

Exercice 12.56.

a) Pas de solution ($x = 1$ conduit au logarithme d'un nombre négatif.)

b) $x = 15$

c) $x = 3$

d) $x = -\dfrac{8}{3}$

Exercice 12.57. $\sim 17'516$ chiens.

Exercice 12.58. Dans 9 mois.

Exercice 12.59.

a) La clientèle de Federalphone connaît un taux annuel de décroissance de 6% et celle de Moonrise un taux de croissance de 9%.

b) En 2007.

Exercice 12.60. $q(5) \cong 3,28$ g. Après 11 minutes.

Exercice 12.61.

a) $x \in \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

b) $x \in \left]-\infty; \dfrac{9}{2}\right]$

c) $x \in]-\infty; 2[$

d) $x \in \left]-\infty; \dfrac{1}{8}\right]$

e) $x \in \left]0; \dfrac{3}{2}\right[$

f) $x \in \left]-\dfrac{26}{3}; \dfrac{16}{3}\right]$

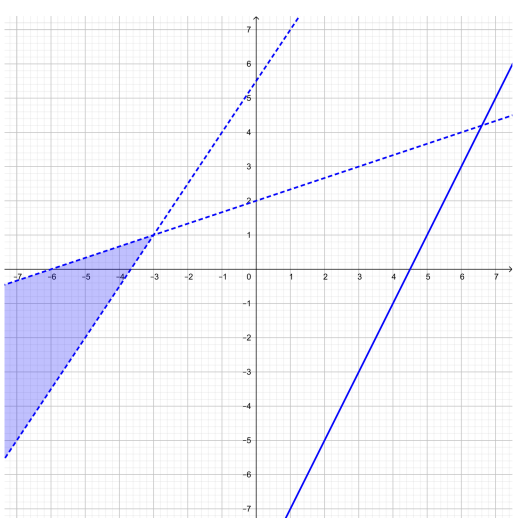
Exercice 12.62.

a) $x \in]1; 3]$

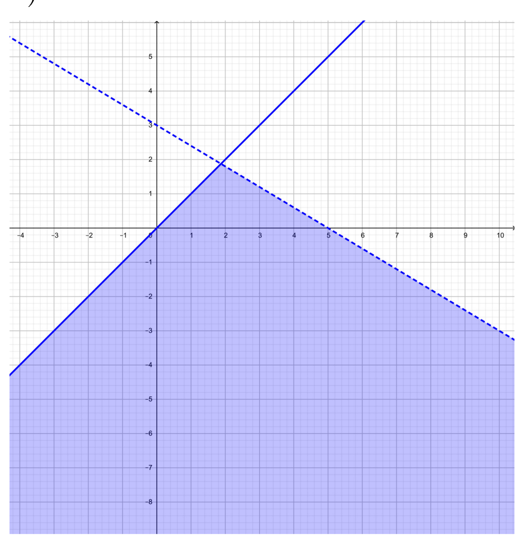
b) Pas de solution

Exercice 12.63.

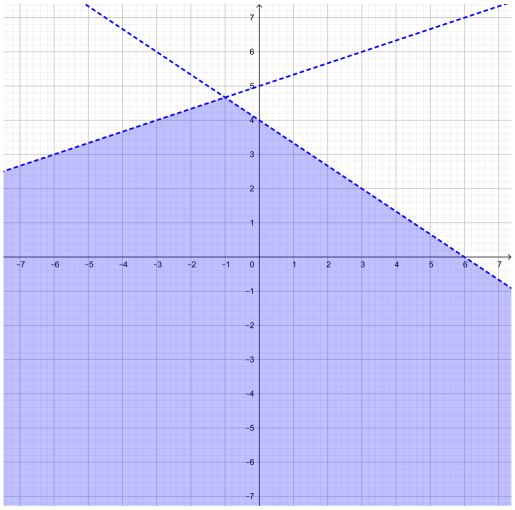
a)



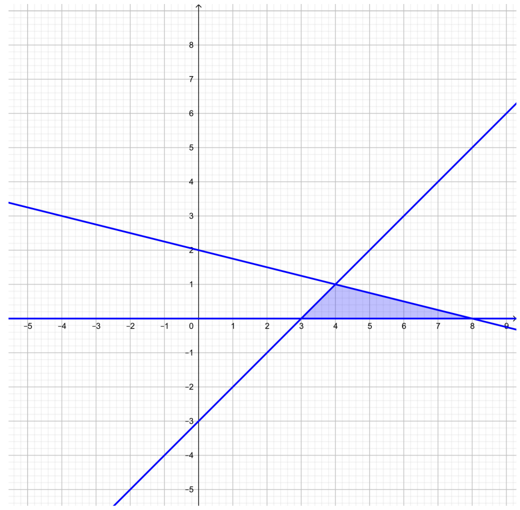
b)



c)



d)



Exercice 12.64.

$$\left\{\begin{array}{lll} y & > & 2x-6 \\ y & < & -x+6 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Exercice 12.65. La capacité maximale en passagers sera réalisée avec 2 camionnettes et 4 bus pour le transport maximum de 130 passagers.

Exercice 12.66. Le bénéfice hebdomadaire est maximal pour une production de 80 modèles de luxe et 120 modèles ordinaires.

Exercice 12.67. Le gain maximal sera réalisé avec 10 parts dans le projet A et 20 dans le projet B.

Exercice 12.68.

a) Trois classes de 3ème année primaire.

b) La variable statistique est "leur sport préféré". Elle est qualitative nominale.

c) {Hockey, Patinage, Ski, Ski de fond, Glissade, Raquette}.

d)

Sport	Effectifs	Fréquences
Hockey	21	35%
Patinage	9	15%
Ski	16	$26,\overline{6}\%$
Glissade	6	10%
Ski de fond	2	$3,\overline{3}\%$
Raquette	6	10%
Total	60	100%

FIGURE 12.1 – Distribution.

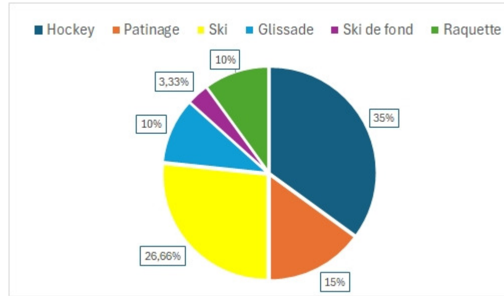


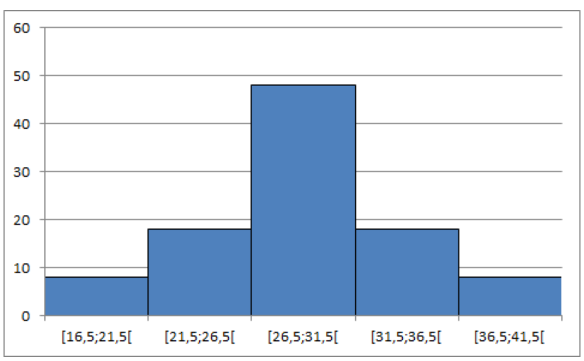
FIGURE 12.2 – Diagramme en secteurs.

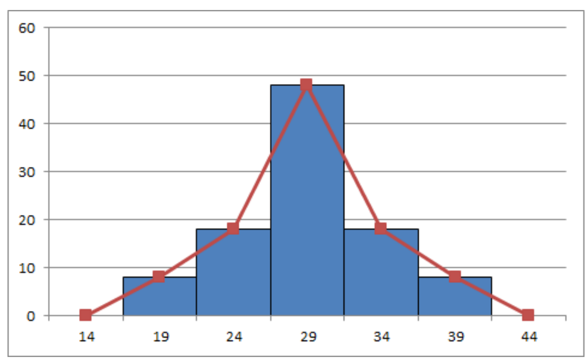
Exercice 12.69.

a)

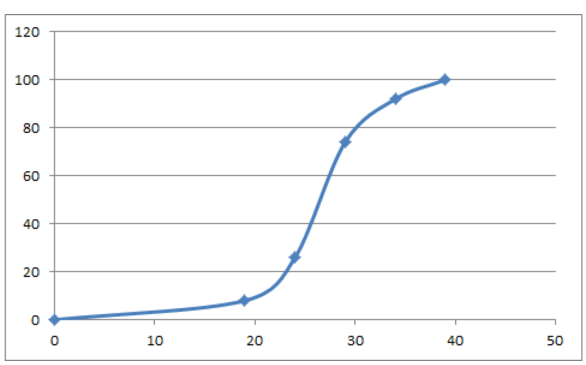
Classes	Effectifs	Fréquences en %	Fréquences cumulées en %
$[16,5;21,5[$	4	8	8
$[21,5;26,5[$	9	18	26
$[26,5;31,5[$	24	48	74
$[31,5;36,5[$	9	18	92
$[36,5;41,5[$	4	8	100

b)





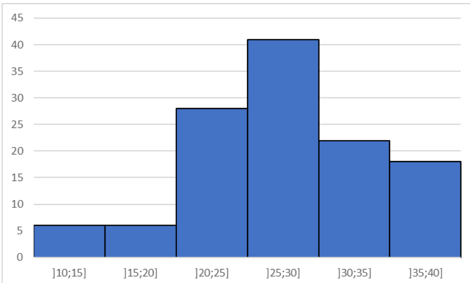
c)

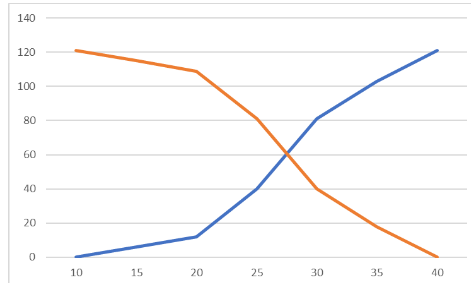


Exercice 12.70. $\overline{x} = 170,2$, $M_e \in [170;180[$ et $M_o \in [170;180[$.

Exercice 12.71.

a)





b) $M_o \in]25;30]$, $M_e \in]25;30]$ et $\overline{x} = 27,5$ cm.

c) $V \cong 40,702$ cm^2 et $\sigma \cong 6,38$ cm.

d) Le coefficient de variation actuel vaut $C \cong 23,199\%$, tandis que celui qui a été calculé à partir des données de l'année précédente est donné par environ $21,875\%$. Ainsi, la population actuelle présente la plus forte dispersion.

Exercice 12.72. 6'760'000 véhicules.

Exercice 12.73.

a) 66 b) 65

Exercice 12.74.

$$P(A) = \frac{1}{5040} \qquad P(B) = \frac{6}{5040} = \frac{1}{840}$$
$$P(C) = \frac{23}{5040} \qquad P(D) = \frac{1}{10}$$

Exercice 12.75.

a) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{11}{36}$ et $P(C) = \frac{1}{9}$

b)

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{9}$$
$$P(B \cap C) = \frac{1}{18} \qquad P(A \cap {}^cB) = \frac{1}{3}$$
$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{18} \qquad P(A \cup B) = \frac{23}{36}$$
$$P(A \cup C) = \frac{1}{2} \qquad P(B \cup C) = \frac{13}{36}$$

Bibliographie

[1] Hubert Bovet, *Ecole de culture générale Tome 1*, Editions Polymaths, 2018.

[2] Hubert Bovet, *Ecole de culture générale Tome 2*, Editions Polymaths, 2019.

[3] Hubert Bovet, *Algèbre*, Editions Polymaths, 2001.

[4] CRM, *Notions élémentaires*, Editions du Tricorne, 2005.

[5] Jean-Pierre Favre, *Mathématiques pour la maturité professionnelle*, Editions Digilex, 2016.

[6] Peter Frommenwiler, Kurt Studer, *Algèbre et analyse de données*, Cornelsen, 2014.

[7] Olivier Grandjean, *Supports de cours*, CIFOM-ET.

[8] Sylvie Guillod, *Supports de cours*, CIFOM-ET.

[9] Caroline Jacot, *Supports de cours*, CPLN-ET.

[10] Jean-Philippe Javet, *Supports de cours*, Gymnase de Morges.

[11] Juan Perreira, *Supports de cours*, CIFOM-ET.

[12] Stephane Perret, *Supports de cours*, Lycée Cantonal de Porrentruy.

[13] Violaine Sabah, *Supports de cours*, Lycée Jean-Piaget

[14] Karim Saïd, *Statistiques, Filière informatique de gestion*, HEG Arc.

[15] E. W. Swokowski, J. A. Cole, *Algèbre*, Editions LEP, 2006.

[16] Essaïd Zeroual, *Supports de cours*, ESTER.

[17] Maxime Zuber, *Supports de cours*, Gymnase Français de Bienne.

Index