Corrigé des exercies du chapitre 9

Exercice 1. Une entreprise fabrique deux types de boîtes en métal. La fabrication d'une boîte de type A demande 1 heure de travail et 3 kg de métal alors que le type B demande 2 heures de travail et 2 kg de métal. L'entreprise dispose de 80 heures de temps de travail et de 120 kg de métal.

a) Sachant que, pour une boîte, le profit est de 20 francs pour le type A et de 30 francs pour le type B, comment organiser la production afin de maximiser le profit ?

b) Après une restructuration dans l'entreprise, les profits sont modifiés en 50 francs pour le type A et 20 francs pour le type B. Faut-il alors modifier le plan de production afin de maximiser le profit ?

Solution. Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Travail	Métal	Prix1	Prix1
Boîte A	1 h	3 kg	20 Frs.	50 Frs.
Boîte B	2 h	2 kg	30 Frs.	20 Frs.
Total	$\leq$ 80 h	$\leq$ 120 kg	P_1	P_2

Posons alors x le nombre de boîtes de type A et y le nombre de boîtes de type B.
Il s'agit de maximiser

$$P_1 = 20x + 30y \text{ et } P_2 = 50x + 20y$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} x + 2y & \leq & 80 \\ 3x + 2y & \leq & 120 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases} .$$

Le domaine défini par les contraintes est le polygone coloré ci-dessus.

Pour trouver le maximum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

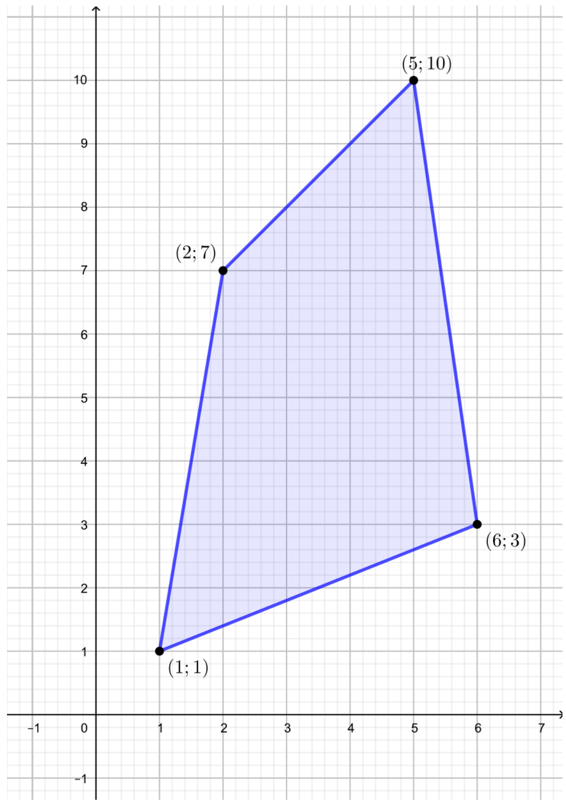
Sommet $(x;y)$	Valeur de $P_1 = 20x + 30y$	Valeur de $P_2 = 50x + 20y$
$(40;0)$	800	2000
$(20;30)$	1300	1600
$(0;40)$	1200	800

Ainsi, le bénéfice maximal sera réalisé avec

a) Il s'agit de fabriquer 20 boîtes de type A, 30 boîtes de type B pour un profit maximum de 1300 francs.

b) Oui, il s'agira alors de fabriquer 40 boîtes de type A et 0 boîte de type B pour un profit maximum de 2000 francs.

Exercice 2. Déterminer pour quel(s) point(s) de la zone colorée ci-dessous la fonction $P = 3x + 5y$ est maximale et minimale.

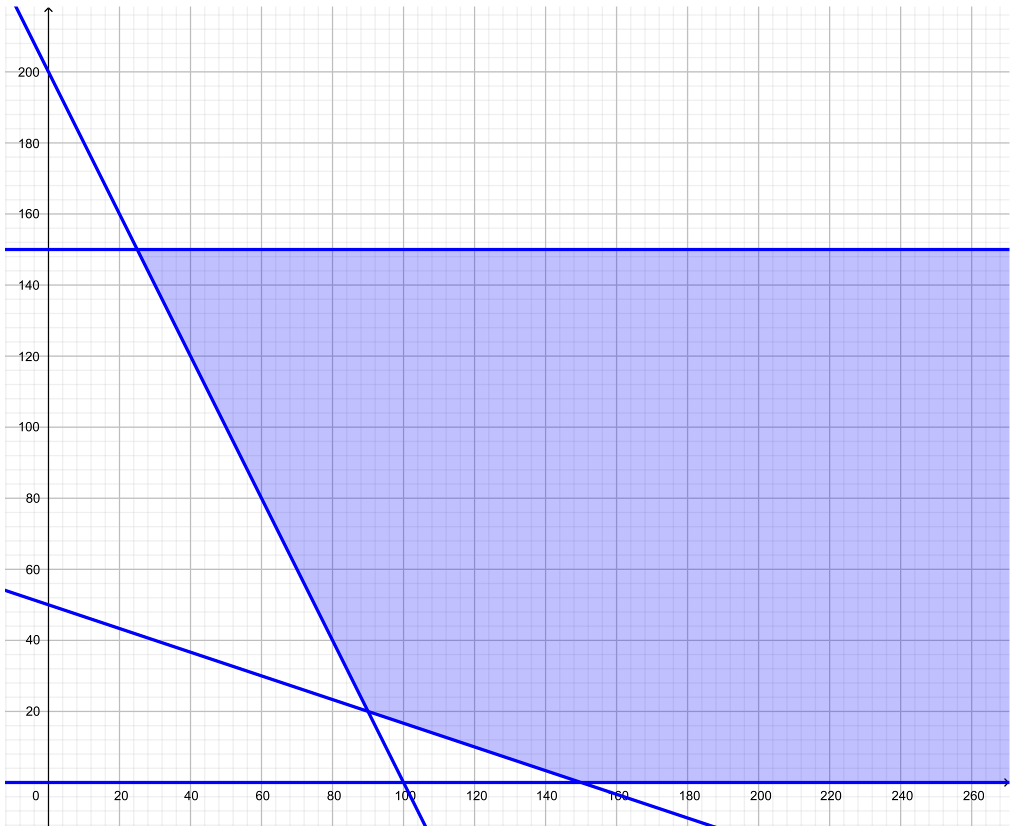


Solution.

Maximum : $P = 65$ avec $(x; y) = (5; 10)$.

Minimum : $P = 8$ avec $(x; y) = (1; 1)$.

Exercice 3. La zone colorée est solution d'un système d'inéquations



Répondre aux questions suivantes et justifier

a) $(50; 100)$ est une solution de ce système ?
b) $(140; 60)$ pourrait être une solution optimale ?
c) $(100; 0)$ pourrait être une solution optimale ?
d) Est-ce $x = 150$ est l'équation d'une frontière ?
e) Est-ce que $2x + y = 200$ est l'équation d'une fontière ?

Solution.

a) Oui.
b) Non.
c) Non.
d) Non.
e) Oui.

Exercice 4. Un pisciculteur va acheter au maximum 5000 jeunes truites et perches chez un éleveur et leur donner une nourriture spéciale pour l'année prochaine. La nourriture pour poisson coûte 0,50 franc par truite et 0,75 franc par perche, et le coût total ne doit pas dépasser 3'000 francs. A la fin de l'année, une truite ordinaire pèsera 1,360 kg et une perche 1,800 kg. Combien de poissons de chaque type devraient être élevés dans le vivier pour que le nombre total de kilos de poissons à la fin de l'année soit maximal ?

Solution. Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Nourriture	Masse
Truites	0,50 Frs.	1,360 kg
Perches	0,75 Frs.	1,800 kg
Total	$\leq 3'000$ Frs.	M

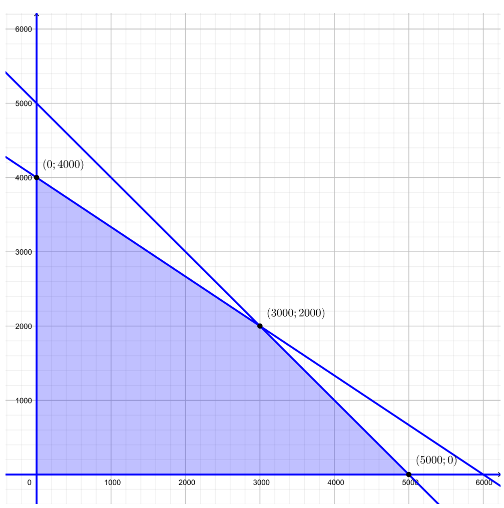
Posons alors x le nombre de truites y le nombre de perches.
Il s'agit de maximiser

$$M = 1,36x + 1,8y$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} x + y & \leq & 5'000 \\ 0,5x + 0,75y & \leq & 3'000 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases}.$$

Le domaine défini par les contraintes est le polygone coloré ci-dessus.



Pour trouver le maximum de M, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x; y)$	Valeur de $M = 1,36x + 1,8y$
$(0; 4000)$	7200
$(3000; 2000)$	7680
$(5000; 0)$	6800

Ainsi, il s'agira d'élever 3000 truites et 2000 perches pour que le nombre total de kilos soit maximal au terme de l'année.

Exercice 5. Un petit magasin vend des ordinateurs et des imprimantes. La place disponible dans le magasin est de 30 machines au maximum. En moyenne, chaque ordinateur coûte 2'000 francs et chaque imprimante 800 francs. Pour des raisons d'assurance, le magasin ne souhaite pas dépasser 40'800 francs pour la valeur du stock. Si son profit est de 200 francs net par ordinateur et de 100 francs par imprimante, combien d'ordinateurs, respectivement d'imprimantes ce magasin doit-il avoir en stock pour maximiser son profit net ?

Solution. Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Place	Prix	Profit
Ordinateurs	x	2000 Frs.	200 Frs.
Imprimantes	y	800 Frs.	100 Frs.
Total	≤ 30	$\leq 40'800$	P

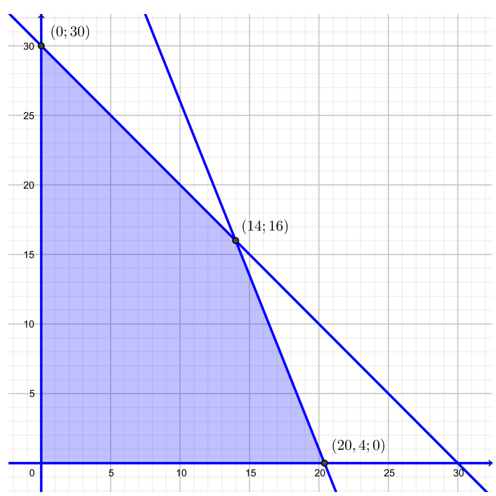
Posons alors x le nombre d'ordinateurs et y le nombre d'imprimantes.
Il s'agit de maximiser

$$P = 200x + 100y$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} 2000x + 8000y & \leq & 40'800 \\ x + y & \leq & 30 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases} .$$

Le domaine défini par les contraintes est le polygone coloré ci-dessus.



Pour trouver le maximum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x; y)$	Valeur de $P = 200x + 100y$
$(0; 30)$	3000
$(14; 16)$	4400
$(20, 4; 0)$	4080

Ainsi, le bénéfice maximal sera réalisé avec 14 ordinateurs et 16 imprimantes.

Exercice 6. Une firme automobile construit des voitures et des camions dans une fabrique divisée en deux ateliers. L'atelier A travaille sur la partie intérieure et l'atelier B se penche sur la partie extérieure du véhicule. L'atelier A a besoin de 5 jours de travail pour un camion et 2 jours pour une voiture. L'atelier B, quant à lui, nécessite 3 jours de travail que cela soit pour un camion ou une voiture. A cause des contraintes dues au staff et aux machines, l'atelier A dispose au maximum de 180 jours de travail par année et l'atelier B d'un maximum de 135 jours par année

a) Si la firme automobile réalise un bénéfice de 3000 francs par camion et 2000 francs par voiture, combien de véhicule de chaque sorte devrait-elle produire pour maximiser son profit ?

b) Même question si le profit est de 4000 francs par camion et 1000 francs par voiture.

Solution. Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Atelier A	Atelier B	Prix 1	Prix 2
Camions	5 j	3 j	3'000 Frs.	4'000 Frs.
Voitures	2 j	3 j	2'000 Frs.	1'000 Frs.
Total	$\leq$ 180 j	$\leq$ 135 j	P_1	P_2

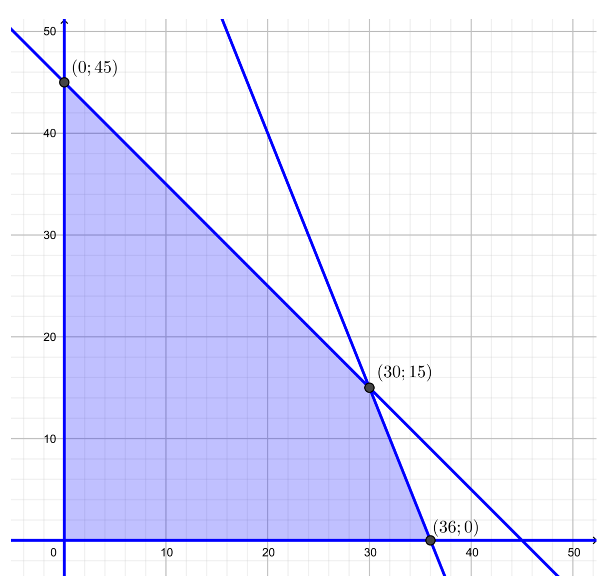
Posons alors x le nombre de camions et y le nombre de voitures P.
Il s'agit de maximiser

$$P_1 = 3000x + 2000y \text{ et } P_2 = 4000x + 1000y$$

avec les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x+2y & \leq & 180 \\ 3x+3y & \leq & 135 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Le domaine défini par les contraintes est le polygone coloré ci-dessus.



Pour trouver le maximum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x;y)$	Valeur de $P_1 = 3000x + 2000y$	Valeur de $P_2 = 4000x + 1000y$
$(36;0)$	108'000	144'000
$(30;15)$	120'000	135'000
$(0;45)$	90'000	45'000

Ainsi, le bénéfice maximal sera réalisé avec

a) 30 camions et 15 voitures.

b) 36 camions.

Exercice 7. Un club de tennis souhaite commander auprès de deux fournisseurs des balles ainsi que des raquettes de tennis pour les juniors. Il souhaite utiliser des balles de marque Wilson Junior pour les enfants et des balles de marque Tretorn pour les adultes. Les balles Wilson sont conditionnées dans des tubes contenant 3 balles et les Tretorn dans des tubes contenant 4 balles. Le fournisseur A propose un lot contenant 3 tubes Wilson, 10 tubes Tretorn et une raquette junior au prix de 200 francs. Le fournisseur B propose un lot contenant 4 tubes Wilson, 6 tubes Tretorn et une raquette junior au prix de 150 francs. Le club souhaite donc passer commande d'un certain nombre de lots auprès des deux fournisseurs. Pour ses besoins, le club souhaite disposer au moins du stock utilisé l'an passé, à savoir 117 balles Wilson, 344 balles Tretorn ainsi que 10 raquettes junior. Déterminer le nombre de lots à commander auprès des deux fournisseurs afin de minimiser les coûts.

Solution. Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Wilson	Trenton	Raquettes	Prix
Fournisseur A	$3 \cdot 3 = 9$ balles	$10 \cdot 4 = 40$ balles	1	200 Frs.
Fournisseur B	$4 \cdot 3 = 12$ balles	$6 \cdot 4 = 24$ balles	1	150 Frs.
Total	≥ 117	≥ 344	≥ 10	P

Posons alors x le nombre de lots A et y le nombre de lots B.

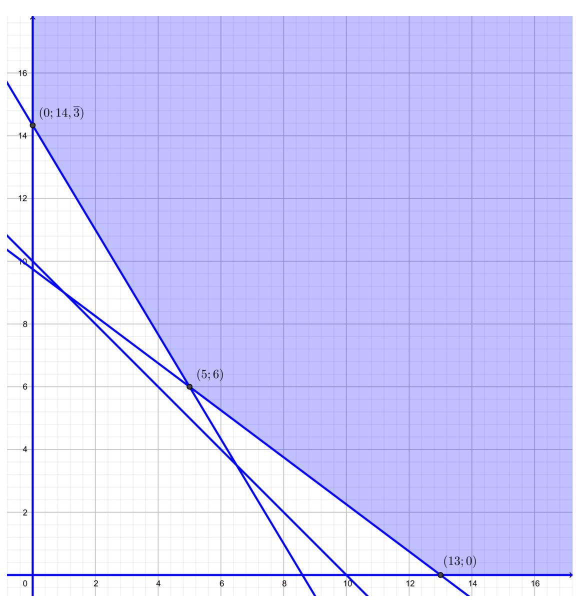
Il s'agit de minimiser

$$P = 200x + 150y$$

avec les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9x + 12y & \geq & 117 \\ 40x + 24y & \geq & 344 \\ x + y & \geq & 10 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Le domaine défini par les contraintes est le polygone coloré ci-dessus.



Pour trouver le minimum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x;y)$	Valeur de $P = 200x + 150y$
$(0;14,\overline{3})$	$2149,5$
$(5;6)$	1900
$(13;0)$	2600

Ainsi, le prix minimal sera réalisé avec 5 lots A et 6 lots B.

Exercice 8. Un étudiant décide d'utiliser ses toutes nouvelles compétences en informatique pour gagner un peu d'argent. Il propose alors deux sortes de cours individuels : initiation à 240 francs et perfectionnement à 300 francs. Chaque cours est subdivisé en trois parties :

— La théorie, 2 h par cours individuel et 3 h par cours de perfectionnement.

— La pratique, 6 h par cours individuel et 4 h par cours de perfectionnement.

— Le travail personnel (PC à disposition), 10 h par cours individuel et 10 h par cours de perfectionnement.

Il s'est fixé pour toute l'année scolaire les limites suivantes :

— Maximum 30 heures de théorie.

— Maximum 60 heures de pratique.

— Mettre son PC à disposition pendant au maximum 110 h.

Combien de chacun des deux cours l'étudiant aurait-il intérêt à organiser pour gagner le plus d'argent possible tout en respectant toutes les contraintes qu'il s'est fixées ? Combien peut-il ainsi gagner ?

Solution. Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Théorie	Pratique	Travail personnel	Prix
C. I	2 h	6 h	10 h	240 Frs.
C. P	3 h	4 h	10 h	300 Frs.
Total	$\leq$ 30 h	$\leq$ 60 h	$\leq$ 110 h	P

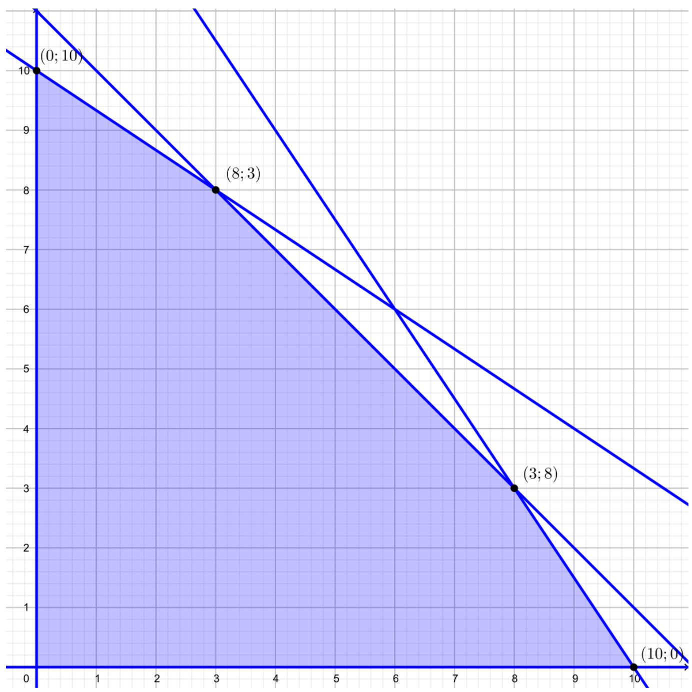
Posons alors x le nombre de cours individuels et y le nombre de cours de perfectionnement. Il s'agit de maximiser

$$P = 240x + 300y$$

avec les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & \leq & 30 \\ 6x+4y & \leq & 60 \\ 10x+10y & \leq & 110 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Le domaine défini par les contraintes est le polygone coloré ci-dessus.



Pour trouver le maximum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x;y)$	Valeur de $P = 240x + 300y$
$(0;10)$	3000
$(3;8)$	3120
$(8;3)$	2820
$(10;0)$	2400

Ainsi, le bénéfice maximal sera réalisé avec 3 cours d'initiation et 8 cours de perfectionnement, ce qui lui rapporterait 3120 francs.

Exercice 9. Pour fleurir un parc, il faut au minimum 1200 jacinthes, 3200 tulipes et 3000 narcisses. Deux pépiniéristes proposent leurs lots :

— Lot A : 30 jacinthes, 40 tulipes et 30 narcisses pour 75 francs.

— Lot B : 10 jacinthes, 40 tulipes et 50 narcisses pour 60 francs.

Déterminer le nombre de lots de chaque sorte que l'on doit acheter pour fleurir le parc avec une dépense minimale. Reste-t-il des fleurs pour le jardinier ?

Solution. Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Jacinthes	Tulipes	Narcisses	Prix
Lot A	30	40	30	75 Frs.
Lot B	10	40	50	60 Frs.
Total	≥ 1200	≥ 3200	≥ 3000	P

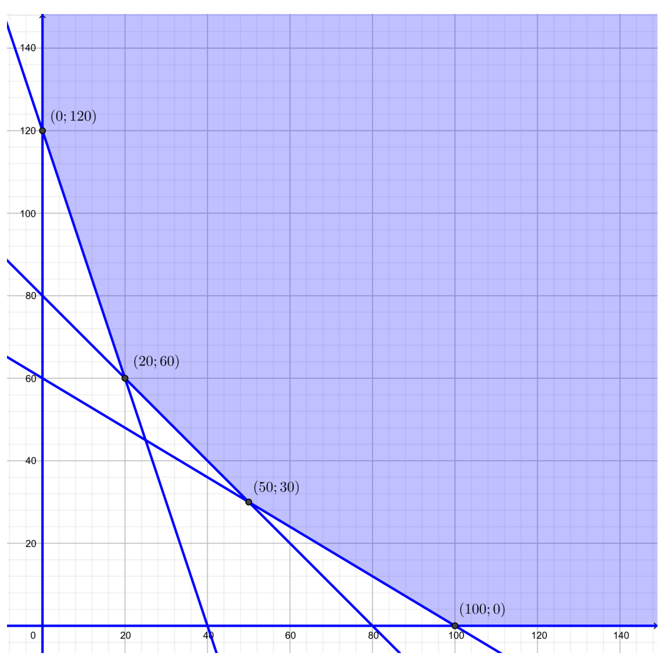
Posons alors x le nombre de lots A et y le nombre de lots B.
Il s'agit de minimiser

$$P = 75x + 60y$$

avec les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcl} 30x + 10y & \geq & 1200 \\ 40x + 40y & \leq & 3200 \\ 30x + 50y & \geq & 3000 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Le domaine défini par les contraintes est le polygone coloré ci-dessus.



Pour trouver le minimum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x;y)$	Valeur de $P = 75x + 60y$
$(0;120)$	7200
$(20;60)$	5100
$(50;30)$	5550
$(100;0)$	7500

Ainsi, le prix minimal sera réalisé avec 20 lots A et 60 lots B. Il reste alors 600 narcisses.

Exercice 10. Une menuiserie s'est spécialisée dans la fabrication de boîtes en bois. En prévision d'une grosse commande, elle décide de remplir ses stocks. Un ouvrier produit de grandes boîtes rouges et un autre de petites boîtes jaunes. Chaque boîte rouge a un volume de 20 dm^3, chaque boîte jaune a un volume de 10 dm^3. L'armoire prévue pour stocker les boîtes a un volume de 4000 dm^3. Pour des raisons techniques, le premier ouvrier ne peut produire au maximum que 150 boîtes rouges et le deuxième que 200 boîtes jaunes. Sachant que les boîtes rouges rapportent 80 francs et les boîtes jaunes 30 francs, combien la menuiserie doit-elle fabriquer de boîtes de chaque couleur pour rendre son profit maximal ?

Solution. Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Volume	Quantité	Bénéfice
Grandes boîtes	20 dm^3	≤ 150	80 Frs.
Petites boîtes	10 dm^3	≤ 200	30 Frs.
Total	$\leq 4'000$ dm^3	≤ 40	B

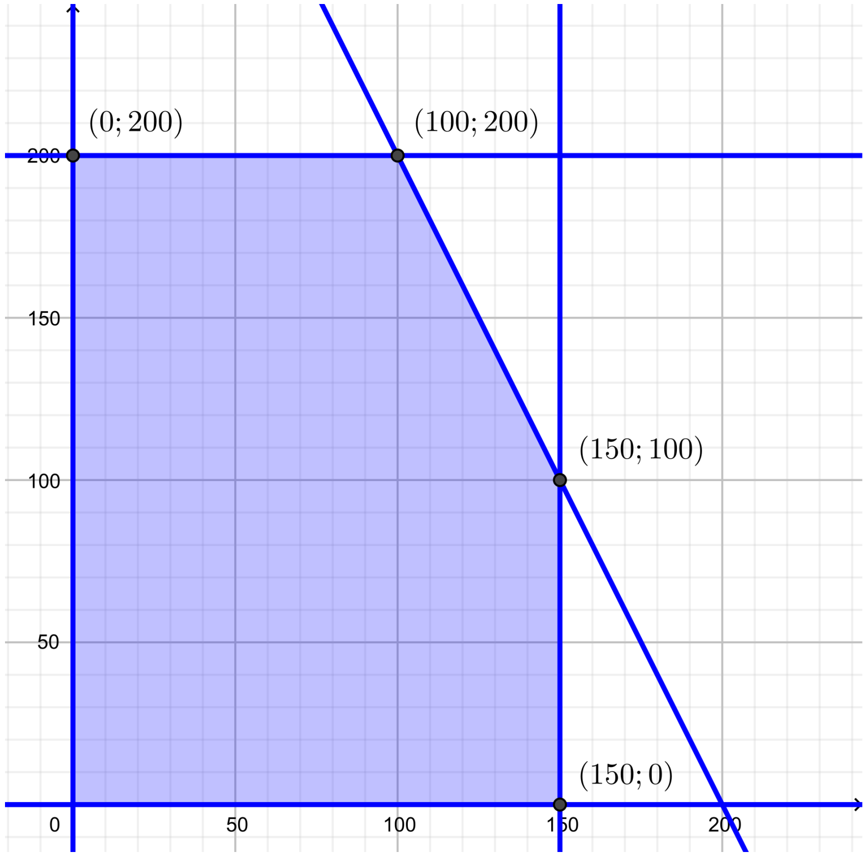
Posons alors x le nombre de grandes boîtes rouges et y le nombre de petites boîtes jaunes. Il s'agit de maximiser

$$B = 80x + 30y$$

avec les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcl} 20x + 10y & \leq & 4000 \\ x & \leq & 150 \\ y & \leq & 200 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Le domaine défini par les contraintes est le polygone coloré ci-dessus.



Pour trouver le maximum de B, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x;y)$	Valeur de $B = 80x + 30y$
$(0;200)$	6000
$(100;200)$	14'000
$(150;100)$	15'000
$(150;0)$	12'000

Ainsi, le bénéfice maximal sera réalisé avec 150 grandes boîtes rouges et 100 petites boîtes jaunes. Le profit sera alors de 15000 francs.

Exercice 11. Un homme décide d'installer un stand à une fête foraine pour vendre des paquets de cacahuètes et de bonbons. Il possède 800 francs pour acquérir la marchandise. Un paquet de cacahuètes coûte 80 centimes et un paquet de bonbon coûte le double. Il vendera ces paquets au prix de 2 francs pour les cacahuètes et 3,20 francs pour les bonbons. Pour cause de place, il ne peut pas avoir plus de 500 paquets de cacahuètes et 400 paquets de bonbons sur son stand. D'expérience, il sait qu'il ne va pas vendre plus de 700 paquet au total. Déterminer le nombre de paquets de chaque marchandise qu'il doit prévoir pour maximiser son bénéfice.

Solution. Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Prix	Place	Profit
Cacahuètes	$0,8$ Frs.	≤ 500	2 Frs.
Bonbons	$1,6$ Frs.	≤ 400	$3,2$ Frs.
Total	≤ 800		P

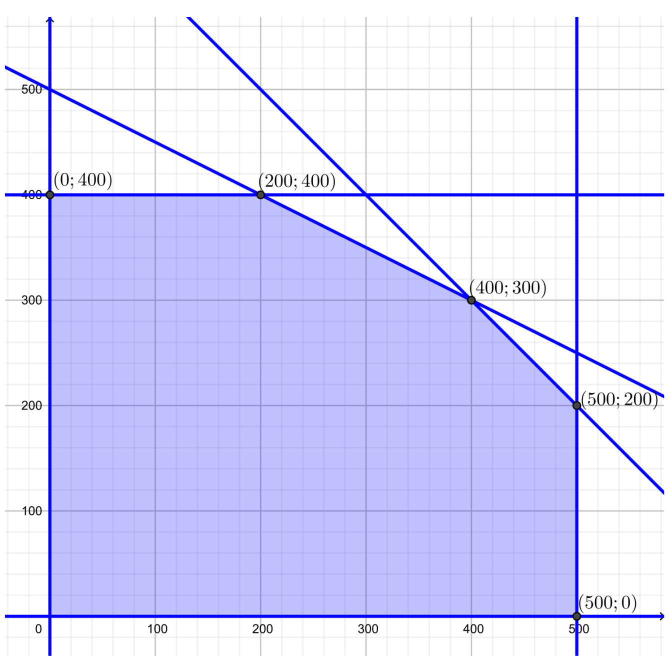
Posons alors x le nombre de paquets de cacahuètes et y le nombre de paquets de bonbons. Il s'agit de maximiser

$$P = 2x + 3,2y$$

avec les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0,8x + 1,6y & \leq & 800 \\ x + y & \leq & 700 \\ x & \leq & 500 \\ y & \leq & 400 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Le domaine défini par les contraintes est le polygone coloré ci-dessus.



Pour trouver le maximum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x; y)$	Valeur de $P = 2x + 3,2y$
$(0; 400)$	1280
$(200; 400)$	1680
$(400; 300)$	1760
$(500; 200)$	1640
$(500; 0)$	1000

Ainsi, le bénéfice maximal sera réalisé avec 400 paquets de cacahuètes et 300 paquets de bonbons.

Exercice 12. Un tour opérateur doit louer des bus pour transporter 400 personnes. Il a choisi une compagnie possédant 10 grands bus pouvant contenir 50 personnes et six petits bus ayant une capacité de 25 personnes. Le premier type de bus coûte 2500 francs à la location et le second 1'500. Déterminer le nombre de bus de chaque sorte que le tour opérateur devrait louer afin de minimiser ses coûts.

Solution. 8 grands bus.

Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Capacité	Quantité	Prix
Grands bus	50	≤ 10	2'500 Frs.
Petits bus	25	≤ 6	1'500 Frs.
Total	≥ 400		P

Posons alors x le nombre de grands bus et y le nombre de petits bus.

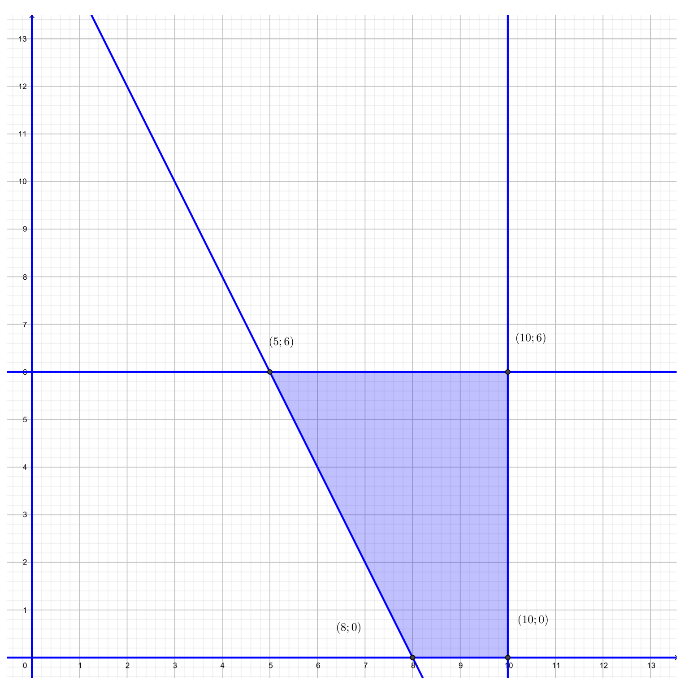
Il s'agit de minimiser

$$P = 2500x + 1500y$$

avec les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcl} 50x + 25y & \geq & 400 \\ x & \leq & 10 \\ y & \leq & 6 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Le domaine défini par les contraintes est le polygone coloré ci-dessus.



Pour trouver le minimum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x; y)$	Valeur de $P = 2500x + 1500y$
$(8; 0)$	20'000
$(10; 0)$	25'000
$(10; 6)$	43'000
$(5; 6)$	21'500

Ainsi, le prix minimal sera réalisé en louant 8 grands bus.

Exercice 13. La société Badler commercialise des calculatrices et des bloc-notes. Les calculatrices sont vendues à 5 francs et sont fabriquées pour 3 francs. Les blocs-notes sont également vendus à 5 francs mais sont produits 40% moins chers que les calculatrices. Cette société peut produire de 2'000 à 4'000 calculatrices et de 1'000 à 5'000 blocs-notes. Par ailleurs, elle ne peut écouler que 8'000 articles en tout. Combien de calculatrices et de blocs-notes doit-elle produire pour maximiser son bénéfice ?

Solution. Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Production	Bénéfice
Calculatrice	Entre 2'000 et 4'000	$5 - 3 = 2$ Frs.
Blocs notes	Entre 1'000 et 5'000	$5 - 0,6 \cdot 3 = 3,20$ Frs.
Total		B

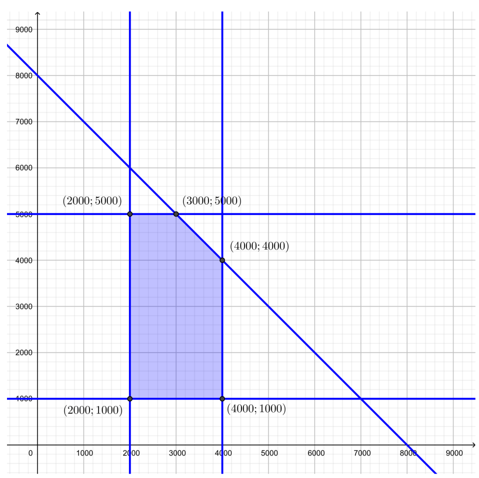
Posons alors x le nombre de calculatrices et y le nombre de blocs-notes.
Il s'agit de minimiser

$$B = 2x + 3,2y$$

avec les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & \leq & 8000 \\ x & \leq & 4000 \\ y & \leq & 5000 \\ x & \geq & 2000 \\ y & \geq & 1000 \end{array} \right. .$$

Le domaine défini par les contraintes est le polygone coloré ci-dessus.



Pour trouver le maximum de B, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x; y)$	Valeur de $B = 2x + 3,2y$
$(2000; 1000)$	7'200
$(4000; 1000)$	11'200
$(2000; 5000)$	20'000
$(3000; 5000)$	22'000
$(4000; 4000)$	20'800

Ainsi, le bénéfice maximal sera réalisé avec 3000 calculatrices et 5000 blocs-notes.

Exercice 14. Une fabrique d'automobiles construit deux modèles A et B. Chaque jour, elle peut produire au maximum 600 voitures A et 200 voitures B, mais en raison d'un manque de personnel, elle ne peut produire plus de 750 voitures en tout. De plus, la production du modèle B ne peut dépasser la moitié de celle du modèle A. Le bénéfice est de 1200 francs pour une voiture du modèle A et de 1800 francs pour une voiture du modèle B. Déterminer la production qui assurera un bénéfice maximal à la société. Quel est ce bénéfice ?

Solution. Cet énoncé se laisse résumer à l'aide du tableau ci-dessous.

	Production	Bénéfice
Modèle A	≤ 600	1200 Frs.
Modèle B	≤ 200	1800 Frs.
Total		B

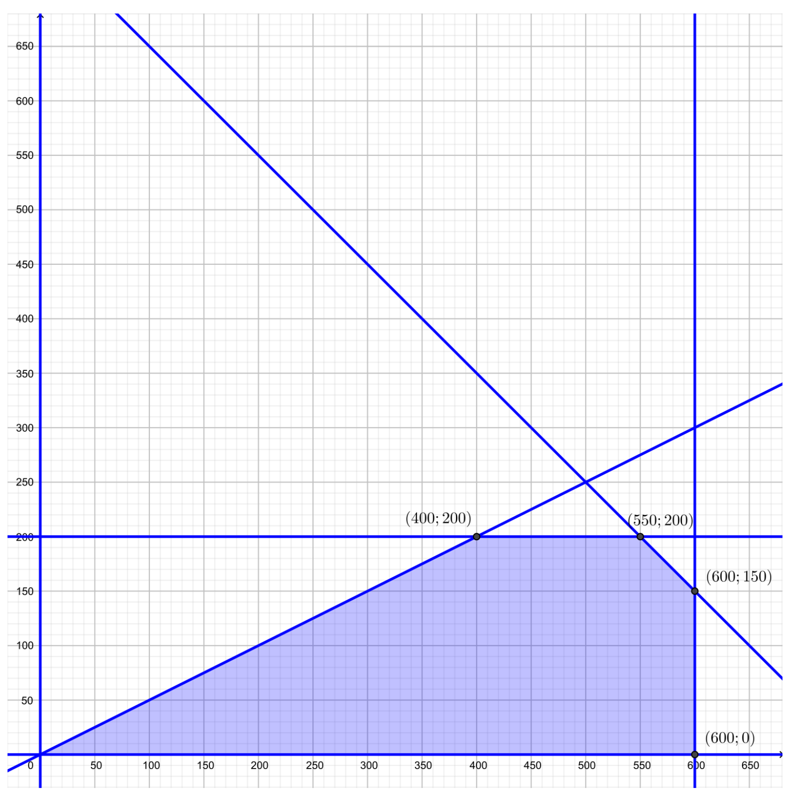
Posons alors x le nombre de voitures du modèle A et y le nombre de voitures du modèle B. Il s'agit de maximiser

$$P = 1200x + 1800y$$

avec les contraintes

$$\begin{cases} x + y & \leq & 750 \\ x & \geq & 2y \\ x & \leq & 600 \\ y & \leq & 200 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases}.$$

Le domaine défini par les contraintes est le polygone coloré ci-dessus.



Pour trouver le maximum de P, on va calculer sa valeur pour chaque sommet du polygone. On obtient les valeurs suivantes :

Sommet $(x; y)$	Valeur de $P = 1200x + 1800y$
$(400; 200)$	840'000
$(550; 200)$	1'020'000
$(600; 150)$	990'000
$(600; 0)$	720'000

Ainsi, le bénéfice maximal sera réalisé avec 550 voitures du modèle A et 200 voitures du modèle B pour un bénéfice maximal de 1'050'000 francs.